УДК 519.711.3

РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДИКАТА

БАБЕНКО В.А.

Развивается компараторная идентификация конечномерных линейных процессов на примере цветового зрения человека. На основе разработанных практических рекомендаций экспериментального нахождения линейного предиката различными способами на бесконечномерном гильбертовом пространстве осуществляется переход к конечномерному пространству входных сигналов. Выполняется переход от описания входных сигналов, заданных первоначально в виде функции, к их описанию в виде конечномерных векторов.

Метод компараторной идентификации позволяет осуществлять объективное изучение и математическое описание внутренних состояний человека, обеспечивая высокую точность описания. В [1] сформулирована проблема компараторной идентификации процессов преобразования входных сигналов, поступающих в органы чувств человека, в выходные — ответные реакции этих органов чувств. При попытке формализации данного вопроса был использован математический аппарат, базирующийся на теории линейных предикатов. Разработаны практические рекомендации экспериментального нахождения линейного предиката различными способами на бесконечномерном гильбертовом пространстве.

На практике же компараторная идентификация имеет обширную сферу применения, причем очень часто в исследованиях переходят от бесконечномерного гильбертова пространства входных сигналов идентифицируемого объекта к конечномерному. Это обусловлено тем, что при практических расчетах удобнее перейти от описания входных сигналов, заданных первоначально в виде функции, к их описанию в виде конечномерных векторов. В этой статье, основываясь на предыдущих результатах, развивается компараторная идентификация конечномерных линейных процессов на примере цветового зрения человека.

Проверим экспериментально, что предикат является линейным [1] и, тем самым, определяется каким-то набором (конечным или счетным) интегралов вида:

$$\int_0^1 \alpha_k(t)x(t)dt = \int_0^1 \alpha_k(t)y(t)dt, \; k\in I. \qquad (1)$$

Предположим, что нам известны функции $\alpha_k(t)$, $0 \le t \le 1$, являющиеся весовыми для данных интегралов. Зная эту систему, можно найти двойственную к ней систему функций $\beta_k(t)$ (в конечном случае для этого существует эффективная процедура), определить ортопроектор P равенством:

$$P(x) = \sum_{k\in J}\left(\int_0^1 \alpha_k(t)x(t)dt\right)\beta_k$$

и задать предикат Φ как $\Phi(x, y) = D(Px, Py)$, где D — тождественный предикат.

Таким образом, вопрос сводится к нахождению функций $\alpha_k \in L_2[0, 1]$, фигурирующих в интегралах. При этом единственно доступная из эксперимента информация заключается в значениях $\alpha_k(x)$ интеграла при тех или иных значениях $x\in L_2[0, 1]$. Ранее, пользуясь взаимно-однозначным каноническим соответствием между линейными функционалами и элементами $L_2[0, 1]$, обозначали одним и тем же символом α_k линейный функционал и его весовую функцию в интегральном представлении. Теперь это становится неудобным, поэтому обозначим интеграл (1) другим символом. Кроме того, для простоты обозначений опустим индекс k. Итак, пусть

$$\alpha(x) = \int_0^1 \alpha(x)x(t)dt, \; x \in L_2[0, 1]. \qquad (2)$$

Требуется по информации о величине $\alpha(t)$ найти функцию $\alpha(t)\in L_2[0, 1]$.

Покажем, что эта задача может быть решена с помощью функции Хевисайда (функции единичного скачка):

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & \tau \le t \le 1 \end{cases}.$$

Имеем
$$\int_0^\tau \alpha(t)dt = u(\tau), \qquad (3)$$

где $u(\tau) = a(x_\tau)$ — известный отклик на единичный скачок (переходная функция). Функции $\alpha(t)$ по предположению являются суммируемыми с квадратом. Отсюда вытекает, что они суммируемы. Но интеграл от суммируемой функции, как функция верхнего предела, является абсолютно непрерывной функцией. Следовательно, она почти везде имеет конечную производную. Более того, эта производная почти везде равна подынтегральной функции [2]. Таким образом, почти всюду

$$\alpha(t) = u\;\;(t) = \frac{\partial}{\partial t}a(x_\tau). \qquad (4)$$

Заметим, что вопрос о значении функции $a(x_\tau)$ во всех точках не имеет физического смысла: если две функции $\alpha(t)$ и $\overline{\alpha}(t)$ отличаются лишь на множестве меры нуль, то при любых x(t) имеет место равенство

$$\int_0^1 \alpha(t)x(t)dt = \int_0^1 \overline{\alpha}(t)x(t)dt,$$

другими словами, величины $\alpha(t)$ для них совпадают. Поскольку в эксперименте для наблюдения доступны лишь эти величины, отсюда вытекает, что функции $\alpha(t)$ принципиально не могут быть восстановлены в каждой точке. Так, равенство (4) теоретически полностью решает задачу о нахождении весовой функции.

На практике, однако, оно не может быть применено непосредственно, так как в эксперименте измеряется не значение производной $\frac{\partial}{\partial t} a(x_\tau)$, а значение самой функции $a(x_\tau)$. Поэтому непосредственное применение выражения (4) на практике означает использование приближенной формулы

$$\alpha(\tau) \approx \frac{a(x_\tau + t) - a(x_\tau)}{t}, \tag{5}$$

где t — достаточно малое число. Но процедура численного дифференцирования является некорректной задачей — сколь угодно малые погрешности в вычислении функции могут вести к сколь угодно большим погрешностям в вычислении производной. Для того чтобы обойти это препятствие, используются различные методы решения некорректно поставленных задач.

Один из них, принадлежащий М.М.Лаврентьеву, в применении к рассматриваемой задаче состоит в замене (3) уравнением

$$\int_0^\tau \alpha(t)dt + \lambda \cdot \alpha(\tau) = u(\tau), \tag{6}$$

здесь λ — положительный малый параметр. Это интегральное уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром $k(\tau - t)$, где

$$k(\xi) = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \xi \ge 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Оно является корректным при любом $\lambda \neq 0$. Выпишем его явное решение. Дифференцируя, получаем

$$\lambda\alpha'(t) + \alpha(t) = u'(t), \quad \alpha(0) = \frac{1}{\lambda}u(0).$$

Пользуясь известной формулой для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка, находим

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\tau u'(t)e^{-\frac{\tau - t}{\lambda}}dt + \frac{1}{\lambda}u(0)e^{-\frac{\tau}{\lambda}}.$$

Произведя интегрирование по частям в правой части, получаем

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{\lambda}u(\tau) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\tau u(t)e^{-\frac{\tau - t}{\lambda}}dt. \tag{7}$$

Эта формула уже может быть использована в практических вычислениях. Для этого следует произвести дискретную аппроксимацию *u(t)* и заменить интеграл в (7) какой-либо формулой приближенного интегрирования (Симпсона или трапеций).

Приведенный метод имеет тот недостаток, что не указывает способ подбора параметра λ. Приведем другой метод, находящийся в круге тех же идей, но снабженный эффективной процедурой нахождения регуляризующего параметра. Речь идет об обобщенном методе невязки [3]. Рассмотрим некорректное уравнение

$$A\alpha = u, \tag{8}$$

где A — линейный инъективный оператор в $L_2[0, 1]$, обратный к которому не является ограниченным. Правая часть уравнения известна приближенно, т.е. известна некоторая функция u_ε такая, что

$$\|u - u_\varepsilon\| \le \varepsilon, \tag{9}$$

где ε — известное положительное число. Метод состоит в решении вспомогательной задачи

$$\|\alpha\| \to \inf, \|A\alpha - u_\varepsilon\| = 2\varepsilon. \tag{10}$$

Она имеет единственное решение α_ε, причем, если уравнение (8) имеет решение, то α_ε стремится к какому-либо решению (8) при $\varepsilon \to 0$ (т.е. метод является регуляризующим по А.И.Тихонову [4]). В нашем случае оператор *A* имеет вид

$$[A\alpha](t) = \int_0^t \alpha(\tau)d\tau. \tag{11}$$

Найдем сопряженный вектор A^*. Используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$(A\alpha, \beta) = \int_0^1 (\int_0^t \alpha(\tau)d\tau)\beta(t)dt = \int_0^1 (\int_0^1 \beta(t)dt)\,\alpha(\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$[A^*\beta](\xi) = \int_\xi^1 \beta(t)dt. \tag{12}$$

Правило Лагранжа сводит экстремальную задачу (10) к системе уравнений относительно α и λ (λ-число):

$$\alpha + \lambda A^*(A\alpha - u_\varepsilon) = 0. \tag{13}$$

Используя (11) и (12), перепишем первое из этих уравнений в виде

$$\alpha(\xi) + \lambda\int_\xi^1\int_0^1 \alpha(\tau)d\tau = \lambda\int_\xi^1 u_\xi(t)dt, \tag{14}$$

$$\alpha'(\xi) - \lambda\alpha(\xi) = -\lambda u'_\xi(\xi), \quad \alpha(1) = 0,$$

$$\alpha'(0) = -\lambda u_\xi(0). \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что общее решение дифференциального уравнения (15) имеет вид

$$\alpha(t) = c_1 ch\sqrt{\lambda}t + c_2 sh\sqrt{\lambda}t - \lambda\int_0^t u_\varepsilon(\tau)ch\left(\sqrt{\lambda}(t - \tau)\right)d\tau.$$

Тогда частным решением, удовлетворяющим краевым значениям (15), будет

$$\alpha(t)=\lambda\int_0^1 u_\varepsilon(\tau)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda}(1-\tau)\right)d\tau\,\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}t}{\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}}-$$
$$-\lambda\int_0^t u_\varepsilon(\tau)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda}(t-\tau)\right)d\tau\,. \qquad (16)$$

Второе уравнение (10) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_0^1\left[\int_0^\xi \alpha(t)dt-u_\varepsilon(\xi)\right]^2 d\xi=4\varepsilon^2\,.$$

Подставляя сюда (16), получаем:

$$\int_0^1[\sqrt{\lambda}\int_0^1 u_\varepsilon(\tau)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda}(1-\tau)\right)d\tau\,\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}\xi}{\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}}-$$
$$-\lambda\int_0^\xi dt\int_0^t u_\varepsilon(t)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda}(1-\tau)\right)d\tau-u_\varepsilon(\xi)]^2\,d\xi=4\varepsilon.^2$$

Обозначим левую часть этого равенства через $f(\lambda)$. По экспериментально найденному приближению $u_\varepsilon(t)$ для функции $u(t)$ можно, пользуясь приближенными формулами интегрирования, вычислить значения $f(\lambda)$ при любом λ. Это позволяет, используя какой-либо метод одномерного поиска [2], приближенно найти число λ, удовлетворяющее условию $f(\lambda)=4\varepsilon^2$. Подставляя найденное значение λ в (16), получаем требуемое приближение для функции $\alpha(t)$.

Укажем еще два метода, которые могут быть применены для решение некорректной задачи (4). Один из них предназначен специально для уравнений типа свертки [5], другим является общий прокс-алгоритм [6].

Рассмотрим теперь пробные функции вида

$$x_{\tau,h}(t)=\begin{cases}\frac{1}{h}, & t\in[\tau,\tau+h],\\ 0, & t\notin[\tau,\tau+h]\,.\end{cases} \qquad (17)$$

Имеем из (2)

$$\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\alpha(t)dt=u(\tau), \qquad (18)$$

где $u(\tau)=a(x_{\tau,h})$. В силу теоремы Лебега о точках суммируемых функций почти для всех точек t справедливо равенство

$$\lim\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\alpha(t)dt=\alpha(\tau). \qquad (19)$$

Сравнивая (18) и (19), получаем, что почти для всех точек

$$\alpha(\tau)=\lim_{h\to 0}a(x_\tau,h). \qquad (20)$$

Формула (20) теоретически решает задачу о нахождении целевой функции. Ее использование на практике означает применение при достаточно малых h приближенной формулы

$$\alpha(\tau)\approx a(x_\tau,h). \qquad (21)$$

Отметим, что с математической точки зрения выражения (5) и (21) совпадают, однако экспериментальные процедуры, предусматривающие их использование, резко отличаются. В первом случае используются сигналы с равномерно распределенной плотностью, во втором – с плотностью, сосредоточенной в окрестности фиксированной точки (т.е. почти монохроматические). Заметим еще, что конкретный вид функции с плотностью, сосредоточенной в окрестности точки, не является существенным. Взамен функции (17) можно использовать любую неотрицательную функцию $d\tau$, носитель которой находится в малой окрестности точки τ, а площадь соответствующей криволинейной трапеции равна 1. Любая такая функция является приближенной реализацией импульсной функции (δ – функция Дирака), для которой почти всюду

$$\alpha(\tau)=a(\delta_\tau). \qquad (22)$$

Последнее равенство вытекает из формулы

$$\int_0^1\alpha(t)\delta(t-\tau)dt=\alpha(\tau). \qquad (23)$$

Она является обобщением выражения (20). Для любой приближенной реализации d_τ функции Дирака имеет место приближенная формула

$$\alpha(\tau)=a(d_\tau). \qquad (24)$$

Она обобщает (21).

С (20) и (22) дело обстоит так же, как и с задачей (4) – их непосредственное применение ведет к решению некорректно поставленных задач - интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки. В случае (22) ядром уравнения является δ - функция, в случае (20) ядро имеет вид

$$k(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\in[-h,0]\,,\\ 0, & \xi\notin[-h,0]\,.\end{cases}$$

Отметим, что к таким же вопросам приводят задачи определения: 1) формы радиоимпульса, излученного источником, по результатам записи его на больших расстояниях от источника, 2) формы электрического импульса на входе кабеля по результатам записи на выходе, 3) переходных функций в линейных преобразователях автоматического регулирования и др. [7]. Для решения этих задач могут быть применены те же методы, что и описанные выше в применении к (4).

Укажем, еще один способ нахождения функции $\alpha(t)$. На этот раз будем пользоваться срезками любой непрерывной положительной на [0, 1] функции $\varphi(t)$. Положим

$$\varphi_\tau(t)=\varphi(t)x_\tau(t)=\begin{cases}\varphi(t), & 0\le t\le\tau\,,\\ 0, \tau\le t\le 1 & \end{cases}.$$

Тогда (2) дает $a(\varphi_\tau)=\int_0^\tau\varphi(t)\alpha(t)d\tau$.

Так же, как и в случае равенства (3), имеем почти всюду $\frac{\partial}{\partial\tau}a(\varphi_\tau) = \varphi(\tau)\alpha(\tau)$, откуда

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\varphi(\tau)} \cdot \frac{\partial}{\partial\tau} a(\varphi_\tau). \qquad (25)$$

При использовании формулы (25) возникают те же вопросы, связанные с некорректностью, что и при применении (4), (20) или (22).

Теория компараторной идентификации практически применима для математического описания многих реальных объектов. В данной статье сделана попытка компараторной идентификации процесса преобразования светового излучения в зрительное ощущение, осуществляемого органом зрения человека, в виде линейного оператора, который отображает пространство световых излучений в виде конечномерных векторов в трехмерное пространство цветов. Существует много других сенсорных способностей человека, к которым можно практически применить предложенные методы идентификации.

Литература: 1. *Походенко В.А.* Линейные предикаты и их применение в системах машиной обработки визуальной информации: Дисс. канд. техн. наук. Харьков, 1998. 183 с. **2.** *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 50с. **3.** *Ульянченко О.В., Лебідь М.Т., ХлівнякГ.Г., Бабенко В.О.* Математичне програмування. Навч. посібник / Харк. держ. аграр. ун-т ім.В.В. Докучаєва. Київ, 2002. 296 с. 4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. С. 134. **5.** *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1962. С. 11. **6.** *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 386с. **7.** *Натансон И.П,* Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957. 234 с.

Поступила в редколлегию 28.01.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Левыкин В.М.

Бабенко Виталина Алексеевна, канд. техн. наук, ст. преподаватель кафедры экономической кибернетики ХНАУ, кафедры информатики ХНУРЭ. Научные интересы: системы обработки визуальной информации, компараторная идентификация сенсорных способностей человека. Адрес: Украина, 61000, Харьков, п/о «Коммунист»-1, уч. гор. ХНАУ, д. 34, кв. 39, тел. 99-78-32.