

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ТИПОВЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Н. Я. Ситко

Киев

1. Постановка задачи

В процессе синтеза дискретных автоматических систем задача определения передаточной функции цифрового фильтра, обеспечивающего требуемые показатели качества системы, является неоднозначной, если предварительно из каких-либо соображений не выбран однозначно период квантования системы. В общем случае можно получить достаточно много цифровых фильтров различной сложности и соответствующих каждому фильтру периодов квантования, при которых обеспечиваются требуемые показатели качества системы. При этом не ясно, какому фильтру следует отдать предпочтение.

Эта неоднозначность часто заставляет проектировщиков решать задачу упрощения цифрового фильтра. В одном случае упрощение сводится к тому, что уменьшается общее число полюсов цифрового фильтра при неизменном периоде квантования. В другом случае в процессе синтеза определяются несколько цифровых фильтров для разных периодов квантования, обеспечивающих требуемые показатели качества системы, и из этих фильтров выбирается простейший. Оценка погрешностей, возникающих при упрощении цифрового фильтра даже такими путями, представляет значительный интерес, хотя и сводится к определению погрешностей по фазе $\Delta\varphi$ и амплитуде ΔA аппроксимации сложного цифрового фильтра более простым.

Еще больший интерес представляет оценка погрешностей цифровых фильтров в тех случаях, когда в процессе синтеза дискретной системы период квантования не фиксируется и используется как дополнительная варьируемая переменная при определении передаточной функции цифрового фильтра. В частности, это относится к методу синтеза дискретной системы, предполагающему в качестве первого этапа проектирование исходной непрерывной системы с требуемыми показателями качества. В этом случае оценка погрешностей по фазе $\Delta\varphi$ и амплитуде ΔA от замены исходного непрерывного фильтра цифровым преследует цель определения диапазона относительных частот $[0, \omega_m]$, внутри которого частотные характеристики цифровых фильтров с точностью до заданных $\Delta\varphi$ и ΔA совпадают с частотными характеристиками непрерывного фильтра. Полученные значения ω_m используются как для определения периодов квантования по заданной абсолютной частоте ω_m , так и для сравнительной оценки цифровых фильтров с точки зрения их реализации, например, по величине коэффициента эффективности $k_s = \frac{\omega_m}{\theta}$ (θ — время счета).

Таким образом, важность оценки погрешностей при окончательном выборе цифрового фильтра и периода квантования системы несомненна.

При любом методе синтеза дискретной системы с непрерывным объектом ей можно поставить в соответствие некоторую непрерывную

систему с тем же объектом, обладающую такими же показателями качества. Частотные характеристики этой непрерывной и проектируемой дискретной системы в рабочем диапазоне абсолютных частот $[0, \omega_m]$ должны быть, очевидно, одинаковы. А поскольку в процессе синтеза дискретной системы может быть получено целое семейство цифровых фильтров, то некоторую непрерывную систему можно поставить в соответствие целому семейству дискретных систем с различными цифровыми фильтрами и периодами квантования.

В тех часто встречающихся случаях, когда импульсная частотная характеристика непрерывной части системы может быть достаточно точно представлена в виде произведения частотной характеристики фиксатора на частотную характеристику непрерывной части (объекта с исполнительным элементом)

$$K_{\Sigma}^*(j\omega) \approx \frac{1}{T} K_{\Phi}^*(j\omega) K_{\Pi}^*(j\omega), \quad (1)$$

где $K_{\Phi}^*(j\omega)$ — частотная характеристика фиксатора;

$K_{\Pi}^*(j\omega)$ — частотная характеристика объекта с исполнительным элементом,

можно утверждать, что для того, чтобы частотные характеристики непрерывной и дискретной систем совпадали, цифровой фильтр должен выполнять две функции:

- 1) реализовать все операции непрерывного фильтра;
- 2) скомпенсировать влияние на динамику системы фиксатора.

Поскольку компенсация влияния фиксатора достаточно эффективно осуществляется с помощью цифрового фильтра вида

$$K_{\Sigma}^*(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}}, \quad (2)$$

с достаточной для практики точностью можно утверждать, что любой цифровой фильтр дискретной системы с непрерывным объектом

$$K_{\Sigma}^*(z) = \frac{K_{\Sigma}^*(z)}{K_{\Sigma}^*(z)}, \quad (3)$$

где K_{Σ}^* — передаточная функция результирующего цифрового фильтра, реализует операции некоторого непрерывного фильтра, обеспечивающего практически такие же показатели качества системы.

Непрерывный фильтр обычно легко можно представить в виде последовательного соединения типовых звеньев (интегрирующих, дифференцирующих, апериодических и форсирующих). Поэтому большой интерес представляет определение погрешностей типовых цифровых фильтров, возникающих вследствие того, что дифференциальные и интегральные зависимости реализуются таким фильтром неточно. Результирующие погрешности цифрового фильтра легко определяются через погрешности типовых цифровых фильтров с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_{\Sigma} &= \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i \\ \Delta A_{\Sigma} &= A_{\Sigma} - \prod_{i=1}^n (A_i + \Delta A_i) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\Delta\varphi_{\Sigma}$ и ΔA_{Σ} — результирующие погрешности цифрового фильтра $K_{\Sigma}^*(z)$ по фазе и амплитуде соответственно;

$\Delta\varphi_i$ и ΔA_i — погрешности типовых цифровых фильтров;

A_{Σ} — амплитудная частотная характеристика непрерывного фильтра.

Таким образом, в общем случае для определения погрешностей цифрового фильтра $\Delta\varphi_z(\bar{\omega})$ и $\Delta A_z(\bar{\omega})$ необходимо:

1. Найти передаточную функцию эквивалентного непрерывного фильтра.

2. Произвести оценку погрешностей $\Delta\varphi_i(\bar{\omega})$ и $\Delta A_i(\bar{\omega})$ для типовых цифровых фильтров, реализующих соответствующие типовые звенья непрерывного фильтра.

3. С помощью соотношений (4) определить результирующие погрешности цифрового фильтра.

Определение передаточной функции эквивалентного непрерывного фильтра является частью общей задачи упрощения цифрового фильтра и связано с большими трудностями, так как часто передаточная функция цифрового фильтра, подлежащего упрощению, получается с числовыми коэффициентами. Поэтому передаточную функцию эквивалентного непрерывного фильтра нелегко определить даже в тех случаях, когда удастся использовать некоторые эвристические соображения, поскольку характер зависимости коэффициентов передаточной функции цифрового фильтра от периода квантования неизвестен.

В тех случаях, когда известна передаточная функция эквивалентного непрерывного фильтра, задача оценки погрешностей цифрового фильтра сводится к оценке погрешностей типовых цифровых фильтров и к определению результирующих погрешностей по соотношениям (4).

2. Определение погрешностей типовых цифровых фильтров

Передаточные функции и частотные характеристики типовых цифровых фильтров можно получить с помощью аппарата численного анализа. Семейство цифровых интеграторов, дифференциаторов, апериодических и форсирующих звеньев приводится в [2].

Для определения погрешностей типовых цифровых фильтров используется соотношение

$$K_i^*(j\omega) - K_i(j\omega) = \Delta A_i e^{j\Delta\varphi_i}, \quad (5)$$

которое путем ряда преобразований распадается на два:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_i^*(\bar{\omega}) - A_i(\omega)}{A_i(\omega)} &= \epsilon_i \\ \varphi_i^*(\bar{\omega}) - \varphi_i(\omega) &= \Delta\varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $\epsilon_i = \frac{\Delta A_i}{A_i}$ — относительная погрешность цифрового фильтра по амплитуде.

С помощью соотношений (6) можно подсчитать значения погрешностей $\Delta\varphi_i$ и ϵ_i в функции относительной частоты $\bar{\omega}$. По результатам подсчета могут быть составлены таблицы или построены графики функциональных зависимостей:

$$\Delta\varphi_i = F_{1i}(\bar{\omega}) \quad (7)$$

и

$$\epsilon_i = F_{2i}(\bar{\omega}). \quad (8)$$

На рис. 1 представлены графики функциональных зависимостей $F_{1d}(\bar{\omega})$ и $F_{2d}(\bar{\omega})$ цифровых дифференциаторов, полученных из формулы [1]:

$$K_d^*(z) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (1 - z^{-1})^i \quad (9)$$

для

$$n = 1, 2, 3, 4.$$

Аналогичным путем могут быть построены графики функциональных зависимостей F_1 и F_2 и для других типовых звеньев.

При этом следует отметить, что для форсирующих и апериодических звеньев погрешности зависят не только от частоты $\bar{\omega}$, но и от параметра $\alpha = \frac{T}{T_1}$, где T_1 — постоянная времени форсирующего или апериодического звена. В этих случаях для каждого звена необходимо определить зависимости

$$\Delta\varphi_i = F_{1i}(\bar{\omega}, \alpha) \quad (10)$$

$$\varepsilon_i = F_{2i}(\bar{\omega}, \alpha), \quad (11)$$

то есть необходимо составлять столько таблиц, сколько значений параметра α нас интересует, или строить семейство графиков для различных значений параметра α , что не всегда удобно.

Кроме того, для промежуточных значений параметра α погрешности цифровых фильтров определяются не совсем точно.

Можно предложить аналитический способ подсчета погрешностей цифровых форсирующих и апериодических звеньев, если они получаются на базе дифференциаторов и интеграторов с помощью известных соотношений:

$$K_{\Phi}^*(z) = T_{\Phi} K_A^*(z) + 1 \quad (12)$$

"

$$K_A^*(z) = \frac{K_n^*(z)}{T_n + K_n^*(z)}, \quad (13)$$

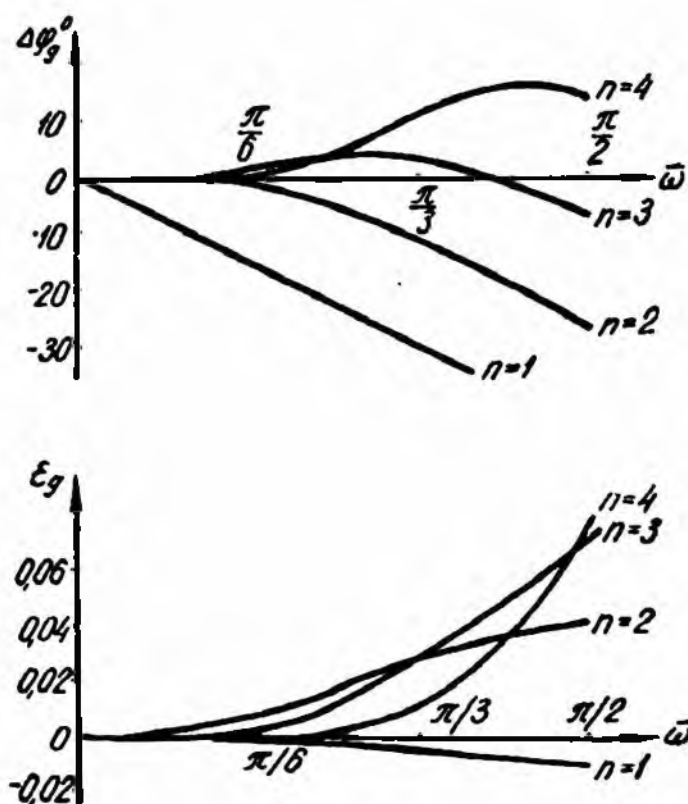


Рис. 1.

где T_{Φ} и T_n — постоянные времени цифрового форсирующего и апериодического звеньев соответственно.

Если цифровые фильтры $K_{\Phi}^*(z)$ и $K_A^*(z)$ получены другим путем и для них неизвестны передаточные функции $K_A^*(z)$ и $K_n^*(z)$, последние могут быть искусственно выделены с помощью соотношений (12) и (13).

Попытаемся найти общие выражения для погрешностей $\Delta\varphi_{\Phi}$ и ΔA_{Φ} цифровых форсирующих звеньев.

Цифровой дифференциатор может быть представлен в виде суммы

$$K_A^*(j\bar{\omega}) = R_A^*(\bar{\omega}) + jI_A^*(\bar{\omega}),$$

а цифровое форсирующее звено на базе этого дифференциатора будет иметь вид

$$K_{\Phi}^*(j\bar{\omega}) = R_{\Phi}^*(\bar{\omega}) + jI_{\Phi}^*(\bar{\omega}), \quad (14)$$

и ΔA_ϕ ; неопределенность типа $\frac{0}{0}$ раскрывается по правилу Лопиталья. Частные формулы имеют вид

$$\operatorname{tg} \Delta \varphi_\phi = \frac{T_\phi \Delta A_\pi \cos \varphi_\phi}{A_\phi + T_\phi \Delta A_\pi \sin \varphi_\phi}; \quad (23)$$

$$\Delta A_\phi = T_\phi \Delta A_\pi \sin \varphi_\phi^*. \quad (24)$$

При определении погрешностей $\Delta \varphi_\pi$ и ΔA_π цифровых апериодических звеньев можно предварительно найти погрешности вспомогательного звена:

$$K_1^*(z) = \frac{1}{K_\pi^*(z)} = \frac{T_\pi}{K_\pi^*(z)} + 1, \quad (25)$$

а затем уже перейти к определению погрешностей апериодического звена по соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_\pi &= -\Delta \varphi_1 \\ \Delta A_\pi &= \frac{\Delta A_1}{A_1(A_1 + \Delta A_1)} \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

На основании изложенного можно предложить следующую последовательность оценки погрешностей цифрового фильтра, эквивалентного некоторому непрерывному фильтру:

1. Определяются погрешности исходных цифровых интеграторов и дифференциаторов в нужном диапазоне относительных частот. При этом для их определения можно воспользоваться таблицами или графиками функциональных зависимостей вида (7) и (8).

2. С помощью соотношений (20), (21), (25) и (26) находятся погрешности цифровых форсирующих и апериодических звеньев. В частном случае вместо (20) и (21) можно воспользоваться выражениями (23) и (24).

3. Результирующие погрешности цифрового фильтра находят по соотношениям (4).

Точность определения погрешностей цифрового фильтра зависит только от того, с какой точностью определены погрешности исходных цифровых интеграторов и дифференциаторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Т. Кузнецов. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, М., 1962.
2. Н. Я. Сятко. Оценка цифровых корректирующих устройств из условия их реализации. Сб. «Автоматические системы с цифровыми вычислительными устройствами», Киев, КВАНУ, 1964.
3. Частотные методы в автоматике. Сборник статей ИИЛ, М., 1957.