УДК (031)519(083.3):355/359

ЯКОБИАНЫ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Д.И. ЛЕХОВИЦКИЙ

Получены якобианы линейных преобразований $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^*$ с преобразующими матрицами различной структуры.

Ключевые слова: якобиан, линейные преобразования, кронекеровское произведение, кронекеровский квадрат, детерминант.

А. Для отыскании законов распределения совокупности случайных величин, полученных в результате тех или иных преобразований совокупности других случайных величин с заданной совместной плотностью распределения, необходимо знать **якобианы** соответствующих преобразований [1] .

Якобианом преобразования

$$\mathbf{B} = \{b_{ij}\} = \varphi(\mathbf{A}) \tag{1}$$

матрицы $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ называется детерминант

$$J = \det \mathbf{U} = |\mathbf{U}| \tag{2}$$

матрицы частных производных (матрицы Якоби)

$$\mathbf{U} = \{u_{rs}\} = \partial \mathbf{B} / \partial \mathbf{A} = \{\partial b_{ij} / \partial a_{\nu\mu}\} . \tag{3}$$

Индексы i, j и ν, μ указывают функционально независимые элементы матрицы $\mathbf{B}$ и матрицы $\mathbf{A}$, их число определяет размерность матрицы $\mathbf{U}$.

В данной заметке определяются якобианы линейных преобразований

$$\mathbf{B} = \{b_{ij}\} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^* \tag{4}$$

в общем случае комплексной $M \times N$ матрицы $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i=1,\, j=1}^{M \quad N}$ невырожденными квадратными $M \times M$ матрицами $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{M}$ и $N \times N$ матрицами $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ с элементами, не зависящими от элементов a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$.

Б. Начнем с преобразования действительной $M \times N$ матрицы $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i=1,\, j=1}^{M \quad N}$ общего вида (все элементы функционально взаимно независимы) действительными квадратными $M \times M$ матрицей $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{M}$ и $N \times N$ матрицей $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$.

В этом случае матрица $\mathbf{B}$ (4) – действительная $M \times N$ матрица общего вида с элементами

$$b_{ij} = e_i^{(M)T} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot e_j^{(N)}, \quad i = 1, M; \; j = 1, N, \tag{5}$$

где $e_i^{(K)}$ – i- й столбец единичной $K \times K$ матрицы $\mathbf{I}$.

Размерность матрицы Якоби (3) в этом случае равна $(M \cdot N) \times (M \cdot N)$, а ее элементы

$$u_{(i-1)\cdot N + j, (\nu-1)\cdot N + \mu} = e_i^{(M)T} \cdot \mathbf{P}\left(\partial \mathbf{A} / \partial a_{\nu\mu}\right) \cdot \mathbf{Q}^T e_i^{(N)}, \quad .$$
$$i, \; \nu \in 1, M; \qquad j, \; \mu \in 1, N.$$

Поскольку $\partial \mathbf{A} / \partial a_{\nu\mu} = e_\nu^{(M)} \cdot e_\mu^{(N)T}$, то

$$u_{(i-1)\cdot N + j, (\nu-1)\cdot N + \mu} = p_{i\nu} \cdot q_{j\mu} .$$

и, следовательно, матрица Якоби

$$\mathbf{U} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} \tag{6}$$

представляет собой кронекеровское произведение [2] матриц преобразования $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

Собственные числа (с. ч.) $\lambda_{ij}(\mathbf{U})$ матрицы $\mathbf{U}$ равны $\lambda_{ij}(\mathbf{U}) = \lambda_i(\mathbf{P}) \cdot \lambda_j(\mathbf{Q})$, где $\lambda_i(\mathbf{P})$ $(i \in 1, M)$ и $\lambda_j(\mathbf{Q})$ $(j \in 1, N)$ – с. ч. матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ соответственно.

Поэтому якобиан (2) в этом случае равен

$$J(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{N} \lambda_{ij}(\mathbf{U}) = \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{N} \lambda_i(\mathbf{P}) \cdot \lambda_j(\mathbf{Q}) =$$
$$= \left\{ \prod_{i=1}^{M} \lambda_i^N(\mathbf{P}) \right\} \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{N} \lambda_j(\mathbf{Q}) \right\}^M = |\mathbf{P}|^N \cdot |\mathbf{Q}|^M . \tag{7}$$

В частности, для квадратных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ($M = N$) этот якобиан [2]

$$J(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \left(|\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}|\right)^N . \tag{8}$$

В. Если $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{M} = \mathbf{A}^T$ – действительная симметричная $M \times M$ матрица, $\mathbf{Q} = \mathbf{P} = \left\| p_{ij} \right\|$ – действительные $M \times M$ матрицы, то $\mathbf{B} = \{b_{ij}\} = \mathbf{B}^T$ – также действительная симметричная $M \times M$ матрица. В этом случае размерность матрицы Якоби (3) равна $L = M \cdot (M+1)/2$, а ее элементы

$$u_{(i-1)\cdot M + j, (\nu-1)\cdot M + \mu} = \frac{p_{i\nu} \cdot p_{j\mu} + p_{i\mu} \cdot p_{j\nu}}{1 + e_\nu^{(M)T} \cdot e_\mu^{(M)}},$$
$$i, \; \nu \in 1, M; \qquad j \in i, M; \qquad \mu \in \nu, \; M.$$

Матрица Якоби в целом $\mathbf{U} = \mathbf{P}_{[2]}$ является при этом “кронекеровским квадратом” [2] матрицы $\mathbf{P}$, ее собственные числа $\lambda_{ij}(\mathbf{U}) = \lambda_i(\mathbf{P}) \cdot \lambda_j(\mathbf{Q})$, $i \in 1, M$, $j \in 1, i$. Поэтому якобиан (2) равен

$$J(\mathbf{P}, \mathbf{P}) = \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{i} \lambda_i(\mathbf{P}) \cdot \lambda_j(\mathbf{P}) = \prod_{i=1}^{M} \lambda_i^{M+1}(\mathbf{P}) = |\mathbf{P}|^{M+1} .$$

Г. Аналогичным образом можно получить якобианы и некоторых других линейных преобразований, сведенные в табл. 1.

Использованы следующие условные обозначения:

- Д – действительная матрица;
- К – комплексная матрица;
- Пр – произвольная матрица;
- ОВ – матрица общего вида;
- С – симметричная матрица;
- Э – эрмитова матрица;
- П – персимметричная матрица.

Таблица 1

Якобианы преобразования $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^*$

Размеры и свойства матриц				$J(\mathbf{P},\mathbf{Q})$
P	**A**	**Q**	**B**	
$M \times M$ ДПр	$M \times N$ ДОВ	$N \times N$ ДПр	$M \times N$ ДОВ	$\lvert\mathbf{P}\rvert^N \cdot \lvert\mathbf{Q}\rvert^M$
$M \times M$ ДПр	$M \times M$ ДС	$M \times M$ Q=P	$M \times M$ ДС	$\lvert\mathbf{P}\rvert^{M+1}$
$2L \times 2L$ ДСП	$2L \times 2L$ ДСП	$2L \times 2L$ **Q=P**	$2L \times 2L$ ДСП	$\lvert\mathbf{P}\rvert^{L+1}$
$M \times M$ КПр	$M \times N$ КОВ	$N \times N$ КПр	$M \times N$ КОВ	$\lvert\mathbf{P}\rvert^{2N} \cdot \lvert\mathbf{Q}\rvert^{2M}$
$M \times M$ КПр	$M \times M$ КЭ	$M \times M$ **Q=P**	$M \times M$ КЭ	$\lvert\mathbf{P}\rvert^{2M}$
$M \times M$ КЭП	$M \times M$ КЭП	$M \times M$ **Q=P**	$M \times M$ КЭП	$\lvert\mathbf{P}\rvert^{M+1}$

Литература

[1] *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика.– М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 496 с.

[2] *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. 352 с.

Поступила в редколлегию 14.10.2011

Леховицкий Давид Исаакович, фото и сведения об авторе см. на с. 404.

УДК (031)519(083.3):355/359

Якобіани деяких лінійних перетворень / Д.І. Леховицький // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2011. Том 10. № 4. – С. 454-455.

Отримані якобіани лінійних перетворень $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^*$ із перетворюючими матрицями різної структури.

Ключові слова: якобіан, лінійні перетворення, кронекерівський добуток, кронекерівський квадрат, детермінант.

Табл. 1. Бібліогр.: 2 найм.

UDC (031)519(083.3):355/359

Jacobian determinants of some linear transformations / D.I. Lekhovytskiy // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. 2011. Vol. 10. № 4. – P. 454-455.

Jacobian determinants of the linear transformations $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^*$ with transformation matrices of different structure are obtained.

Keywords: Jacobian determinant, linear transformations, Kronecker product, Kronecker squared, determinant.

Tab. 1. Fig. Ref: items.