УДК 510.62

В. В. ШЛЯХОВ, канд. техн. наук, *Н. Н. САРНАВСКАЯ*

О СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНО СДВИНУТЫХ ПРЕДИКАТОВ

Применение метода сравнения при решении задач идентификации динамических систем приводит к необходимости изучения бинарных отношений (предикатов). В частности, предикатам эквивалентности посвящен ряд работ [1—3]. Однако подобные предикаты можно использовать в качестве математической модели не во всех реальных ситуациях, например, когда пара входных сигналов подается на различные преобразователи. В этом случае мы приходим к необходимости исследования так называемых предикатов дифункциональности. Такой класс предикатов имеет интересные приложения при систематическом моделировании работы органов чувств человека, а также играет важную роль в теории идентификации динамических систем методом сравнения.

Среди предикатов дифункциональности особый интерес для исследования представляют так называемые линейно сдвинутые предикаты с ограничениями на множестве входных сигналов — в данном случае на декартовом квадрате положительного конуса K гильбертова пространства H. Они являются хорошей математической моделью, описывающей работу органов зрения человека, поскольку с физической точки зрения входные сигналы в данном случае можно интерпретировать как строго положительные.

Определение. *Предикат $E(x, y)$, заданный на множестве $K \times K$, где K — положительный конус гильбертова пространства H, назовем n-мерным линейно сдвинутым, если он может быть представлен в виде*

$$E(x, y) = D_B(F(x) + a,\ F(y)), \tag{1}$$

где $F(x) = \{f_i(x)\}_{i=1}^n$ — набор линейных линейно независимых функционалов в H, $a \in R^{n+}$ — положительный конус в R^n.

Цель настоящей работы — нахождение экспериментально проверяемых условий, которые обеспечили бы существование линейно сдвинутых предикатов. Исходя из этого, докажем следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы предикат $E(x, y)$, определенный на декартовом квадрате положительного конуса K гильбертова пространства H, был n-мерным линейно сдвинутым предикатом, необходимо и достаточно, чтобы он имел следующие свойства:*

1) квазитранзитивность: если $E(x, y) = E(z, y) = E(z, t) = 1$, то $E(x, t) = 1$;

2) полуаддитивность: если $E(x+z, y+z) = 1$, то $E(x, y) = 1$;

3) n-мерность: существует такая система векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$, принадлежащая положительному конусу K, что для любого элемента

$x \in K$ найдутся векторы $m_1(x)$ и $m_2(x)$, принадлежащие множеству линейных комбинаций $\{e_i\}_{i=1}^n$ с неотрицательными коэффициентами $-L^+(\{e_i\}_{i=1}^n)$, для которых $E(x+m_1(x), m_2(x))=1$ и $m(x)=m_2(x)-m_1(x)$ определяется единственным образом по элементу x;

4) непрерывность: предикат $E(x, y)$ вида (1) обладает свойством непрерывности, если отображение $\varphi: x \to m(x)$, где $x \in K$ непрерывно в метрике H;

для предиката $E(x, y)$ вида (1) существуют такие векторы h_1 и h_2, принадлежащие множеству линейных комбинаций $\{e_i\}_{i=1}^n$ с неотрицательными коэффициентами — $L^+(\{e_i\}_{i=1}^n)$, что

5) псевдорефлексивность: для любого элемента $x \in K$ выполняется $E(x+h_1, x+h_2)=1$;

6) псевдосимметричность: если $E(x, y)=1$, то $E(y+2h_1, x+2h_2)=1$;

7) псевдоаддитивность: если $E(x_1, y_1)=1$ и $E(x_2, y_2)=1$, то $E(x_1+x_2+h_2, y_1+y_2+h_1)=1$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть предикат $E(x, y)$ представим в виде (1). Необходимо доказать выполнение указанных выше свойств.

С помощью несложной проверки легко убедиться в том, что предикат $E(x, y)$ обладает свойством квазитранзитивности, а также свойством полуаддитивности.

Проверим выполнение свойства n-мерности. Для начала опишем процедуру выбора системы элементов $\{e_i\}_{i=1}^n$. Из данного набора линейных линейно независимых функционалов зафиксируем какой-либо функционал, для определенности — f_1. Коразмерность его ядра ($\mathrm{Ker}\, f_1$) равна 1. С другой стороны, аффинная оболочка положительного конуса K: $\mathrm{aff}(K)=H$, поэтому $\mathrm{aff}(K \setminus \mathrm{Ker}\, f_1)=H$. Это означает, что в $K \setminus \mathrm{Ker}\, f_1$ можно выбрать n линейно независимых векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$, для которых $L^+(\{e_i\}_{i=1}^n) \subset H \setminus \mathrm{Ker}\, f_1$.

Теперь для произвольного $x \in K$ рассмотрим систему

$$f_k(x)\, a_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) + f_k(e_i),\ k=1, 2, \ldots, n.$$

Матрица ее имеет вид $A=(f_i(e_j))$. Поскольку $L^+(\{e_i\}_{i=1}^n) \subset H \setminus \mathrm{Ker}\, f_1$, то определитель $|A| \neq 0$. Действительно, пусть $\det A = 0$. Это означает, что столбцы матрицы линейно зависимы, т. е.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f_i(e_j)=0,\ i=1, 2, \ldots, n.$$

При $i=1$, с учетом линейности функционала, получаем $f_1\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\right)=0$ или же $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \in \mathrm{Ker}\text{-}f_1$. Но это противоречит посстроению $\{e_i\}_{i=1}^n$, так как $L^+(\{e_i\}_{i=1}^n) \subset H \setminus \operatorname{Ker} f_1$, т. е. $L^+(\{e_i\}_{i=1}^n) \cap \cap \operatorname{Ker} f_1 = \varnothing$.

Таким образом, мы можем найти систему линейно независимых векторов из положительного конуса K, для которых $\det(f_i(e_j)) \neq 0$. В этом случае для любого $x \in K$ система линейных уравнений вида

$$f_k(x) + a_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l(x) f_k(e_l), \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

имеет единственное решение. Следовательно, вектор $m(x) = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l(x) e_l$ определяется единственным образом по элементу x.

Поскольку положительный конус K гильбертова пространства H является воспроизводящим, то найдутся векторы $m_1(x)$ и $m_2(x)$, принадлежащие множеству линейных комбинаций $\{e_i\}_{i=1}^n$ с неотрицательными коэффициентами — $L^+(\{e_i\}_{i=1}^n)$, и не обязательно единственным образом, для которых $m(x) = m_2(x) - m_1(x)$. Например, возьмем

$$m_1(x) = -\sum_{l \in I(x)} \alpha_l(x) e_l \tag{3}$$

и

$$m_2(x) = \sum_{l \in I(x)} \alpha_l(x) e_l, \tag{4}$$

где

$$I(x) = \{i \colon i = \{1, 2, \dots, n\};\ \alpha_i(x) \leqslant 0\}.$$

Тогда для любого k из равенств (2)—(4) с учетом линейности функционала f_k вытекает

$$f_k(x + m_1(x)) + a_k = f_k(m_2(x)). \tag{5}$$

Но так как предикат $E(x, y)$ представим в виде (1), то равенство (5) означает, что $E(x + m_1(x),\ m_2(x)) = 1$. Таким образом, n-мерность доказана.

Построение вектора $m(x)$ по данному $x \in K$ свидетельствует о том, что отображение φ, при котором $x \to m(x)$, непрерывно в метрике H. Это означает выполнение свойства непрерывности для предиката $E(x, y)$ вида (1).

Теперь остановимся на доказательстве свойств псевдорефлексивности, псевдосимметричности и псевдоаддитивности. Построим векторы h_1 и h_2, принадлежащие $L^+(\{e_i\}_{i=1}^n)$, и рассмотрим систему линейных уравнений (6) относительно $\{h^l\}_{l=1}^n$:

$$\sum_{l=1}^{n} h^l f_k(e_l) = a_k, \text{ где } k = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

Эта система имеет единственное решение, так как $\det(f_k(e_i)) \neq 0$. Обозначим через

$$h_1 = -\sum_{l \in I} h^l f_k(e_l). \tag{7}$$

$$h_2 = \sum_{i \in I} h^i f_k(e_i), \tag{8}$$

где $\qquad I = \{i\colon i = \{1, 2, \dots, n\};\ a_i(x) \leq 0\}.$

Тогда $h_1, h_2 \in L^+(\{e_i\}_{i=1}^n)$, и для любого $x \in K$ справедливо

$$f_k(x) + a_k = f_k(x) + \sum_{i \in I} h^i f_k(e_i). \tag{9}$$

С учетом (6)—(9) запишем

$$f_k(x) + a_k - \sum_{i \in I} h^i f_k(e_i) = f_k(x) + \sum_{i \in I} h^i f_k(e_i).$$

Используя линейность функционала f_k имеем

$$f_k(x - \sum_{i \in I} h^i e_i) + a_k = f_k(x + \sum_{i \in I} h^i e_i)$$

и

$$f_k(x + h_1) + a_k = f_k(x + h_2).$$

Но последнее равенство означает, что $E(x+h_1,\ x+h_2) = 1$. Псевдорефлексивность доказана.

Псевдосимметричность. Пусть $E(x, y) = 1$. Тогда $f_k(x) + a_k = f_k(y)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Учитывая (6)—(8), имеем

$$f_k(y) + a_k = f_k(x) + 2a_k;$$

$$f_k(y) + a_k = f_k(x) + 2 f_k(h_2 - h_1);$$

$$f_k(y + 2h_1) + a_k = f_k(x + 2h_2).$$

И, наконец, выполнение свойства псевдоаддитивности завершает доказательство необходимости условий, сформулированных в теореме.

Пусть $E(x_1, y_1) = E(x_2, y_2) = 1$. Тогда из вида предиката (1) вытекает

$$f\ (x_1) + a_k = f_k(y_1) \tag{10}$$

и

$$f_k(x_2) + a_k = f_k(y_2). \tag{11}$$

Просуммировав (10) и (11), получим

$$f_k(x_1 + x_2) + 2a_k = f_k(y_1 + y_2).$$

Воспользовавшись (6), запишем

$$f_k(x_1 + x_2) + \sum_{i=1}^{n} f_k(e_i) h^i + a_k = f_k(y_1 + y_2).$$

И, принимая во внимание (7)—(9):

$$f_k(x_1 + x_2 + h_2) + a_k = f_k(y_1 + y_2 + h_1).$$

Последнее равенство означает, что $E(x_1 + x_2 + h_2,\ y_1 + y_2 + h_1) = 1$.

На этом доказательство необходимости завершается.

Достаточность. Нам необходимо доказать, что предикат $E(x, y)$, определенный на декартовом квадрате положительного конуса K гильбертова пространства H и удовлетворяющий условиям 1)—7), может быть представлен в виде (1).

Если предикат $E(x, y)=1$, то он по условию удовлетворяет свойствам n-мерности и псевдосимметричности, т. е.

$$E(x_1+m_1(x),\quad m_2(x))=1;\quad E(y+2h_1,\ x+2h_2)=1.$$

Теперь воспользуемся свойствами псевдоаддитивности и полуаддитивности. В результате получим

$$E(x+y+m_1(x)+2h_1+h_2,\ m_2(x)+x+2h_2+h_1)=1;$$

$$E(y+m_1(x)+h_1,\quad m_2(x)+h_2)=1.$$

Пусть $m_1(x)+h_1=m_1(y)$ **(12)**, и $m_2(x)+h_2=m_2(y)$ **(13)** соответственно. Тогда для любого элемента $y\in K$ выполняется $E(y+m_1(y),\ m_2(y))=1$, где $m(y)=m_2(y)—m_1(y)$, и определяется единственным образом по элементу y. Используя (12) и (13), запишем $m(y)=m_2(x)—m_1(x)+h_2—h_1$. В свою очередь, $m_2(x)—$ $—m_1(x)=m(x)$, а $h_2—h_1=h$. Отсюда $m(y)=m(x)+h$.

Следовательно, можно сделать вывод, что $E(x,\ y)=1 <=>$ $\Leftrightarrow m(x)+h=m(y)$.

Так как мы доказали, что любые элементы x и y, принадлежащие положительному конусу K, удовлетворяют свойству n-мерности, то выполняется

$$E(x+m_1(x),\ m_2(x))=1;\quad E(y+m_1(y),\ m_2(y))=1.$$

Воспользуемся еще раз свойством псевдоаддитивности. В результате получим

$$E(x+y+m_1(x)+m_1(y)+h_2,\ m_2(x)+m_2(y)+h_1)=1.\quad (14)$$

С другой стороны, для элемента $x+y$ условие n-мерности

$$E(x+y+m_1(x+y),\ m_2(x+y))=1,\qquad (15)$$

где $m_2(x+y)—m_1(x+y)=m(x+y)$ и $m(x+y)$ определяется единственным образом по элементу $x+y$.

Сравнив (14) и (15), находим, что

$$m_2(x+y)-m_1(x+y)=m_2(x)+m_2(y)+h_2-m_1(x)-m_1(y)-h_1=$$

$$=m_2(x)+m_2(y)-m_1(y)+h_2-h_1.$$

В результате $m(x+y)=m(x)+m(y)+h$ **(16)**. По условию под вектором $m(x)$ мы подразумевали систему $L^+(\{e_i\}_{i=1}^n)$ линейных комбинаций векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$ с неотрицательными коэффициентами $\alpha_i(x)$:

$$m(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\,e_i.$$

Следовательно, учитывая (16), имеем $\alpha_i(x+y)=\alpha_i(x)+\alpha_i(y)+h$.

Рассмотрим $f(x)=\alpha(x)+h$. Тогда для любого элемента $x+y$ выполняется

$$f(x+y)=\alpha(x+y)+h=\alpha(x)+\alpha(y)+2h=f(x)+f(y).$$

Отсюда $f(x+y)=f(x)+f(y)$, т. е. $f_i(x)$ — линейный функционал в H, и для любого i справедливо равенство $\alpha_i(x)=f_i(x)+h_i$ **(17)**. Так как

$$E(x, y)=1;\ m(x)+h=m(y);\ m(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)e_i;$$

$$m(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y)e_i;\qquad h=\sum_{i=1}^{n}h_i e_i,$$

получим

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)e_i+\sum_{i=1}^{n}h_i e_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y)e_i.$$

Сократим обе части равенства на $\sum_{i=1}^{n} e_i$ и воспользуемся (17):

$$\alpha_i(x)+h_i=\alpha_i(y);\quad f_i(x)+2h_i=f_i(y)+h.$$

В результате получим $f_i(x)+h_i=f_i(y)$.

Обозначим

$$F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{pmatrix};\ F(y)=\begin{pmatrix} f_1(y)\\ \vdots\\ f_n(y)\end{pmatrix};\ a=\begin{pmatrix} h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix},$$

после чего имеем $F(x)+a=F(y)$, а это, в свою очередь, означает, что данный предикат $E(x, y)$ представим в виде $E(x, y)=D_B(F(x)+a, F(y))$, здесь D_B — стандартный предикат равенства на $H\times H$; $F(x)=\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ — набор линейных функционалов в H; $a\in R^{n+}$, где a — положительный конус в R^n. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. М., 1979. 302 с. 2. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М., 1969. 1072 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Аксиоматическое построение модели цветового зрения//Пробл. бионики. 1970. Вып. 4. С. 45—58.

Поступила в редколлегию 28.03.88

УДК 519.7

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ, канд. физ.-мат. наук

КАНОНИЗАЦИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Основным математическим средством моделирования интеллектуальных процессов являются формальные системы (исчисления), к числу которых относятся различные логические языки, исчисления зависимостей в базах данных [1, 2], формальные грамматики. Формальные системы служат для выявления синтаксического ас-