УДК 621.372.413÷621.385.69

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ КОАКСИАЛЬНОГО ТИПА С НЕЛИНЕЙНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Предлагается решение внутренней граничной задачи электродинамики об электромагнитном поле в цилиндрическом резонаторе, частично заполненном нелинейным диэлектриком. Рассматриваются колебания вихревого мода электрического типа. Используется метод эволюционных уравнений.

1. Введение

Метод модового базиса (или метод эволюционных уравнений), который был предложен в работах [1,2], позволяет решать граничные задачи для системы уравнений Максвелла с учетом материальных уравнений общего вида, т. е. нелинейных. Преимущество данного метода заключается в том, что электродинамические параметры среды, зависящие от времени, участвуют на заключительном этапе решения. Это дает возможность не ограничиваться случаем, когда все нелинейные эффекты в механизмах поляризации, намагничивания и проводимости среды пренебрежимо малы. В физическом плане он соответствует методу собственных колебаний, который в электродинамике применяется к стационарному полю.

В работах [3-6] развивается эволюционный подход к теории электромагнетизма. Так, в [4,6, 7] обсуждаются решения эволюционных уравнений в случае возбуждения колебаний внешними источниками в резонаторе с нестационарным диэлектриком.

Указанный метод может быть использован при расчете измерителей электромагнитных параметров вещества, в которых создается модулирующее поле акустических волн.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об электромагнитных колебаниях в резонаторе с частичным заполнением нелинейным диэлектриком (рисунок).

Состояние поля в среде (область II) определяется следующими материальными уравнениями:

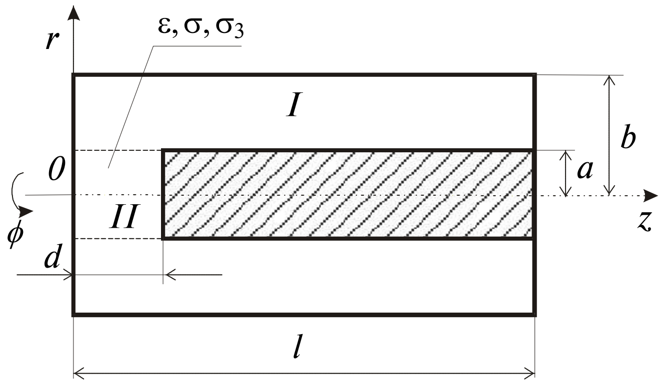
$$\vec{J}_\sigma\left(\vec{E},\vec{H}\right) = -\sigma\vec{E}(\vec{r},t) + \sigma_3\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right|^2\vec{E}(\vec{r},t), \quad (1)$$

$$\sigma,\sigma_3 \equiv const > 0,$$

$$\vec{P}\left(\vec{E}\right) = \alpha_1\vec{E}(\vec{r},t), \quad \alpha_1 \equiv const, \quad (2)$$

$$\vec{J}_e(\vec{r},t) = \vec{J}_h(\vec{r},t) = 0, \quad \vec{M}\left(\vec{H}\right) = 0.$$

Предполагаем, что взаимными преобразованиями модов на диэлектрике можно пренебречь. Это означает, что каждый мод (как вихревой, так и невихревой) совершает индивидуально колебания под воздействием среды. В таком случае электромагнитное поле рассматриваемого здесь вихревого мода можно записать следующим образом:



Резонатор, частично заполненный нелинейным диэлектриком

$$\vec{E}(\vec{r},t) = e(t)\vec{E}(\vec{r}), \quad \vec{H}(\vec{r},t) = h(t)\vec{H}(\vec{r}). \quad (3)$$

Здесь индексы, идентифицирующие вихревой мод, опущены для простоты записи. Векторные функции координат определяют элемент базиса в пространстве решений. Скалярные коэффициенты, зависящие от времени, должны удовлетворять эволюционным уравнениям [3], которые получаются путем проектирования уравнений Максвелла на данный элемент базиса. Решение эволюционных уравнений составляет основное содержание работы.

3. Задача на собственные значения для базисного элемента (определение элементов базиса)

Рассмотрим симметричные моды электрического типа. Электромагнитное поле может быть выражено через однокомпонентный вектор Герца. Потенциальные функции могут быть записаны следующим образом:

$$\Pi(r,z) = \begin{cases} \Pi_1(r,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n R_n(p_n r)\cos\dfrac{\pi nz}{l}, & a \le r \le b,\ 0 \le z \le l, \\ \Pi_2(r,z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m B_m J_0(q_m r)\cos\dfrac{\pi mz}{d}, & 0 \le r \le a,\ 0 \le z \le d, \end{cases}$$

где $\varepsilon_j\,(j = n,m)$ – число Неймана; A_n, B_m – неизвестные числовые коэффициенты; $J_0(x), N_0(x)$ – функции Бесселя и Неймана;

$$R_n(p_n r) = J_0(p_n r)N_0(p_n b) - J_0(p_n b)N_0(p_n r),$$

$$p_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/l)^2}, q_m = \sqrt{k^2 - (\pi m/d)^2},$$

k – собственные числа оператора задачи.

Компоненты поля должны подчиняться следующим граничным условиям: 1) тангенциальные компоненты вектора электрического поля должны быть равны нулю на внутренней металлической поверхности резонатора, которая полагается идеально проводящей; 2) электрическое и магнитное поля должны быть непрерывны на границе раздела двух областей внутри резонатора.

Подчиняя компоненты поля граничным условиям $(r = a)$:

$$\begin{cases} E_z^I = 0, & d \le z \le l\,; \\ E_z^I = E_z^{II}, 0 \le z \le d\,; \\ H_\varphi^I = H_\varphi^{II}, 0 \le z \le d\,, \end{cases}$$

получаем прямую формулу для коэффициентов B_m:

$$B_m = \frac{1}{q_m J_0'(q_m a)} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s p_s A_s R_s'(p_s a) K_{ms},$$

$m = 0,1,2,...;$

и бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_n:

$$\begin{aligned} & p_n^2 A_n R_n(p_n a) - \\ & - \theta \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m q_m K_{mn} \frac{J_0(q_m a)}{J_0'(q_m a)} \times \\ & \times \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s p_s A_s R_s'(p_s a) K_{ms} = 0, \\ & n = 0,1,2,... \end{aligned}$$

Из последней СЛАУ вытекает дисперсионное уравнение относительно собственных значений k:

$$\det\left[\delta_{sn} p_s^2 R_s(p_s a) - \varepsilon_s p_s R_s'(p_s a) L_{sn}\right] = 0, \quad (4)$$

$n = 0,1,2,...;\ s = 0,1,2,...,$

где

$$L_{sn} = \theta \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m q_m \frac{J_0(q_m a)}{J_0'(q_m a)} K_{ms} K_{mn}\ ,$$

$$K_{ms} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \pi(m - s\theta)}{\pi(m - s\theta)} + \frac{\sin \pi(m + s\theta)}{\pi(m + s\theta)} \right),$$

k содержатся в выражениях для p_s и q_m; δ_{sn} – символ Кронекера.

Далее рассмотрим случай малого геометрического параметра $\left(\theta = \dfrac{d}{l} << 1 \right)$.

Вектор-функции координат в обеих областях резонатора представляются в виде:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{E}^I(r,z), & a \le r \le b, \quad 0 \le z \le l\,; \\ \vec{E}^{II}(r,z), & 0 \le r \le a, \quad 0 \le z \le d\ , \end{cases}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{H}^I(r,z), & a \le r \le b, \quad 0 \le z \le l\,; \\ \vec{H}^{II}(r,z), & 0 \le r \le a, \quad 0 \le z \le d\,; \end{cases}$$

и являются трехмерными векторами:

$$\vec{E}^i(r,z) = \left(E_r^i(r,z);\ 0\ ;\ E_z^i(r,z) \right), \quad (5)$$

$$\vec{H}^i(r,z) = \left(0;\ H_\varphi^i(r,z);\ 0 \right), \quad (6)$$

где индекс $i = I, II$ определяет частичную область.

Компоненты поля в областях резонатора записываются так:

$$E_r^I(r,z) = -A_0 \frac{2\pi}{l} \sum_{s=1}^{\infty} s \tilde{E}_s R_s'(p_s r) \sin \frac{\pi s}{l} z\,,$$

$$E_z^I(r,z) = A_0 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s p_s^2 \tilde{E}_s R_s(p_s r) \cos \frac{\pi s}{l} z\,,$$

$$E_r^{II}(r,z) \cong -A_0 \frac{2\pi}{d} \frac{J_1(q_1 r)}{J_1(q_1 a)} U^E \sin \frac{\pi}{d} z\,,$$

$$E_z^{II}(r,z) \cong A_0 q_0 \frac{J_0(q_0 r)}{J_0'(q_0 a)} U^E \cos \frac{\pi}{d} z\,,$$

$$H_\varphi^I(r,z) = ikA_0 \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \tilde{E}_s R_s'(p_s r) \cos \frac{\pi s}{l} z\,,$$

$$H_\varphi^{II}(r,z) \cong ikA_0 \frac{J_1(q_0 r)}{J_1(q_0 a)} U^E \cos \frac{\pi}{l} z\,,$$

где нормирующий множитель A_0 и коэффициенты $\tilde{E}_s$ и U^E приведены в [4] и [7].

Зная компоненты поля E_r, E_z и H_φ, можем сформировать базисный элемент, который в нашем случае является шестимерным вектором $X(r,z)$:

$$X(r,z) = \begin{pmatrix} \vec{E}^i(r,z) \\ \vec{H}^i(r,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r^i(r,z) \\ 0 \\ E_z^i(r,z) \\ 0 \\ H_\varphi^i(r,z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы имеем два подпространства электрических и магнитных частей базисных элементов:

$$\overset{\circ}{J}_E : \left\{ \vec{E}(r,z), div\vec{E}(r,z) = 0, \left[\vec{\nu} \times \vec{E}\right]\Big|_S = 0 \right\},$$

$$\overset{\circ}{J}_H : \left\{ \vec{H}(r,z), div\vec{H}(r,z) = 0, \left(\vec{\nu} \cdot \vec{H}\right)\Big|_S = 0 \right\},$$

вихревое подпространство представляется как

$$\overset{\circ}{J} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{J}_E \\ \overset{\circ}{J}_H \end{pmatrix}.$$

4. Решение эволюционных уравнений

Проектируя систему уравнений Максвелла на базисный элемент, получаем с учетом (1), (2) систему эволюционных уравнений относительно скалярных коэффициентов, зависящих от времени:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}e(t)+ickh(t)= \\ =-4\pi\sigma e(t)-\sigma_3\zeta e^3(t)-\alpha_1\rho\dfrac{d}{dt}e(t), \\ \dfrac{d}{dt}h(t)+icke(t)=0, \end{cases} \tag{7}$$

где c – скорость света; k – собственные значения, определяемые в результате решения уравнения (4); ζ и ρ – известные числовые коэффициенты, определяемые геометрическими размерами резонатора.

Из второго уравнения системы (7) выразим производную по времени от искомого коэффициента $h(t)$ и подставим ее в продифференцированное по той же переменной первое уравнение. Полученное в результате указанных действий дифференциальное уравнение второго порядка разделим на $(ck)^2$. Тогда имеем

$$\frac{1+\alpha_1\rho}{(ck)^2}\frac{d^2e(t)}{dt^2}-\left(\frac{4\pi\sigma}{(ck)^2}-\frac{3\sigma_3\zeta}{(ck)^2}e^2(t)\right)\frac{de(t)}{dt}+e(t)=0. \tag{8}$$

Разделив уравнение (8) на $\dfrac{1}{\omega_0^2}$, где $\omega_0=ck$ – угловая частота автоколебаний, и применив метод медленно меняющихся амплитуд [8,9], получим для искомых временных коэффициентов $e(t)$ прямую формулу:

$$e(t)=\frac{4\sqrt{\pi\sigma}}{\sqrt{3\sigma_3\zeta_n}\sqrt{1+C_1\exp(-\xi_1 t)}}\sin\omega_0 t,$$

где $\xi_1=\dfrac{4\pi\sigma}{1+\alpha_1\rho}$, C_1 – постоянная интегрирования; σ, σ_3 – заданные удельные проводимости среды.

Коэффициенты $h(t)$ также определяются из системы (7) и имеют вид

$$ickh(t)=-\sqrt{\frac{\pi\sigma}{3\sigma_3\zeta}}\frac{1}{\sqrt{1+C_1\exp(-\xi_1 t)}}\times$$
$$\times\left[\frac{16}{3}\pi\sigma\sin ckt+4(1+\alpha_1\rho)ck\cos ckt+\right.$$
$$\left.+\frac{8\pi\sigma C_1\sin ckt\exp(-\xi_1 t)}{1+C_1\exp(-\xi_1 t)}\right].$$

Таким образом, для временных коэффициентов получены аналитические представления, выраженные в элементарных функциях.

5. Выводы

Итак, граничная задача об электромагнитных колебаниях в объеме, частично заполненном нелинейным диэлектриком, решена методом эволюционных уравнений. Решение имеет вид произведения скалярных коэффициентов, зависящих от времени, и векторных базисных элементов, которые физически соответствуют собственным модам резонатора (3). Векторные базисные элементы определены путем решения граничной задачи на собственные значения для лапласиана тем же самым способом, как и в классической электродинамике. Эволюционные уравнения для скалярных коэффициентов, зависящих от времени, получены путем проектирования уравнений Максвелла на базисные элементы. Полученная система эволюционных уравнений сводится к дифференциальному уравнению, описывающему нелинейные процессы в рассматриваемой системе. Для анализа движений в исследуемой нелинейной системе используется известный метод медленно меняющихся амплитуд [8,9]. Временные коэффициенты для электромагнитного поля получены аналитически и выражены в терминах элементарных функций.

Литература. 1. *Третьяков О.А.* Метод модового базиса // Радиотехника и электроника. 1986. №6. С.1071-1082. 2. *Третьяков О.А.* Волноводные и эволюционные уравнения // Радиотехника и электроника. 1989. №5. С.917-926. 3. *Tretyakov O.A.* Essentials of Non-stationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory. Analitical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory / Edited by Hashimoto M., and Tretyakov O.A. Tokio: Science House Co., Ltd, 1993. P.572. 4. *Третьяков О.А., Чумаченко С.В.* Колебания в резонаторе с нестационарным диэлектриком // Радиофизика и радиоастрономия. 1997. Т.2, №2. С. 222-229. 5. *Третьяков О.А., Чумаченко С.В.* Построение модового базиса для резонатора сложной формы // Радиоэлектроника и информатика. 1998. №1(2). С. 12-18. 6. *Svetlana V. Chumachenko, Oleg A. Tretyakov.* Rotational Mode Oscillations in a Cavity with a Time-Varying Medium. // Proc. International Conf.on Math. Methods in Electromagnetic Theory VII (MMET). Kharkov (Ukraine). 1998. С. 355-357. 7. *Третьяков О.А., Чумаченко С.В.* Колебания в резонаторе с линейной нестационарной средой без дисперсии // Электромагнитные волны и электронные системы. 1998. №4. С.12-24. 8. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978. 392 с. 9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

Поступила в редколлегию 11.08.1998

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руженцев И.В.

Чумаченко Светлана Викторовна, аспирантка кафедры теоретической радиофизики ХГУ. Научные интересы: методы решения внутренних и внешних граничных задач со сложными граничными условиями, теория электромагнитных полей во временной области. Адрес: Украина, 310077, Харьков, пл. Свободы, 4, тел. 45-72-57.