УДК 004.45:004.942 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.239

ПАКУВАННЯ МАСШТАБОВАНИХ КРУГІВ

Мелащенко О.П.[1], Шарай К.В.[2]
Науковий керівник – д-р техн. наук, проф. Романова Т.Є.
[1]Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, м. Харків, Україна
[2]Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків, Україна
e-mail: o.p.melashenko@gmail.com, e-mail: kateryna.sharai@nure.ua

Optimized packing a family of non-identical scaling circles in a given circular container is studied. The problem is aimed at finding a maximal scaling parameter of the circles subject to pairwise non-overlapping of scaling circles and containment each scaling circle to a fixed circular container taking into account allowable distances. The corresponding continuous nonlinear programming model is presented. A multistart solution strategy is provided and illustrated with computational results. This problem can be applied for finding feasible starting points to search for local optimal solutions of dense and sparse circular packing problems.

Задачі пакування мають широкий спектр застосувань у різноманітних галузях науки та техніки, в тому числі біології, медицині, логістиці, адитивному виробництві. Моделям та методам розв'язання оптимізаційних задач пакування кругів заданих радіусів присвячено багато публікацій (див., наприклад, [1]–[3]). У даному дослідженні розглядається задача пакування n кругів зі змінними метричними характеристиками у круговому контейнері фіксованого радіуса.

Нехай $\{\lambda C_i(v_i),\ i=1,...,n\}$ – сім'я масштабованих кругів із заданими радіусами r_i, змінним коефіцієнтом масштабування $\lambda \le \bar{\lambda}$ та змінними центрами $v_i=(x_i,y_i)$, $\lambda C_i(v_i)=\{v\in R^2:\|v-v_i\|\le \lambda r_i\}$, де $\bar{\lambda}\ge 1$ – заданий параметр. Позначимо круговий контейнер з радіусом r та центром $(0,0)$ як C_0. Припускаємо, що між кожною парою кругів, а також між кожним кругом та межею контейнера задано мінімально допустиму відстань $\rho \ge 0$.

Задача пакування сім'ї масштабованих кругів у круговому контейнері фіксованого радіуса з урахуванням мінімально допустимої відстані полягає у пошуку максимального значення коефіцієнта λ за таких умов:

$$(\lambda C_i(v_i)\oplus C_\rho)\subset C_0,\ i=1,...,n, \tag{1}$$

(умова включення масштабованого круга $\lambda C_i(v_i)$ у контейнер C_0 з урахуванням мінімально допустимої відстані ρ),

$$\mathrm{int}(\lambda C_i(v_i)\oplus C_{0.5\rho})\cap \mathrm{int}(\lambda C_j(v_j)\oplus C_{0.5\rho})=\varnothing,\ 1\le i<j\le n, \tag{2}$$

(обмеження розміщення масштабованих кругів $\lambda C_i(v_i)$ та $\lambda C_j(v_j)$ на допустимій відстані ρ). Тут $\oplus$ – оператор суми Мінковського, C_ρ – круг радіуса

ρ, а $C_{0.5\rho}$ — круг радіуса 0.5ρ з центром у точці $(0,0)$.

Математичну модель сформульованої задачі пакування може бути описано так:

$$\max_{v,\lambda} \lambda \tag{3}$$

за умов

$$-(x_i^2 + y_i^2) + (r - \lambda r_i - \rho)^2 \ge 0, i = 1,...,n, \tag{4}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (\lambda r_i + \lambda r_j + \rho)^2 \ge 0, 1 \le i < j \le n, \tag{5}$$

$$\lambda \ge 0, \lambda \le \bar{\lambda}, \tag{6}$$

де $(v,\lambda) \in R^{2n+1}$ – вектор змінних, $v = (v_1,...,v_n)$.

Модель (3)–(6) є неперервною задачею нелінійного програмування з лінійною цільовою функцією, має $2n+1$ змінних, $(n^2+n)/2$ нелінійних обмежень та два лінійних обмеження. Нерівність (4) відповідає умові (1) включення масштабованого круга λC_i в контейнер C_0, нерівність (5) – умові (2) розміщення масштабованих кругів λC_i та λC_j на допустимій відстані ρ, а умова (6) – обмеженням на допустимі значення змінної λ.

Для пошуку локально-оптимальних розв'язків задачі (3)–(6) застосовано стратегію, яка включає такі кроки:

Крок 1. Установлюємо $\lambda^0 = 0$.

Крок 2. Генеруємо випадковим чином n точок $\tilde{v}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in C_0$, координати яких задовольняють системі нерівностей $\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2 \le (r-\rho)^2$, $i = 1,...,n$, $(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2 \ge \rho^2$, $1 \le i < j \le n$.

Крок 3. Формуємо вектор $\tilde{v} = (\tilde{v}_1,...,\tilde{v}_n)$.

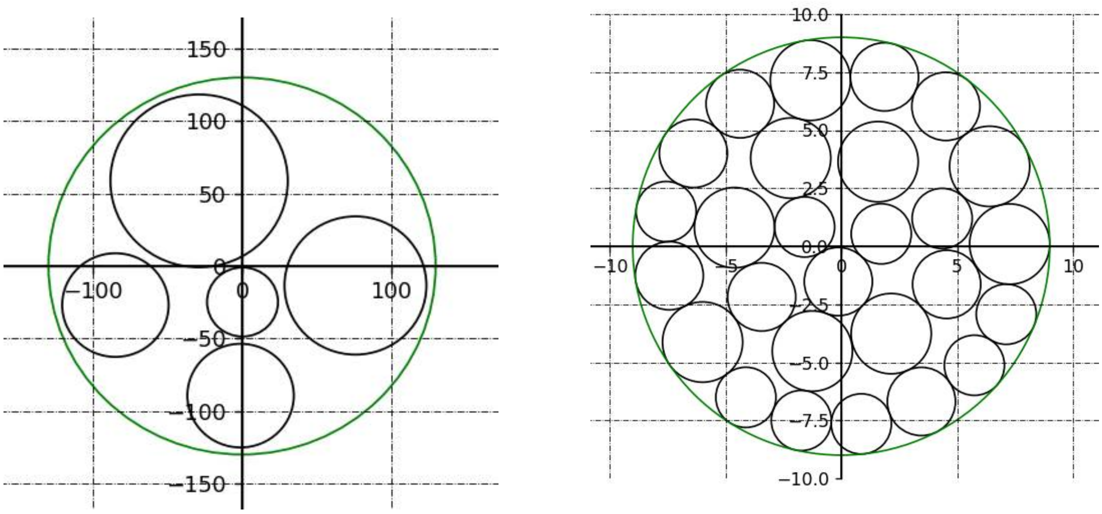
Крок 4. Розв'язуємо задачу нелінійного програмування (3)–(6), стартуючи з точки $(\tilde{v},\lambda^0)$. Отримуємо вектор $(v^*,\lambda^*) = (v_1^*,...,v_n^*,\lambda^*)$.

Для розв'язання задач великої розмірності застосовується метод декомпозиції [4], який дозволяє звести задачу (3)–(6) до послідовності задач нелінійного програмування із значно меншим числом нелінійних нерівностей.

Приклад 1. $n = 5$, $r_1 = 20, r_2 = 30, r_3 = 30, r_4 = 40, r_5 = 50$, $r = 130$, $\rho = 5$, $\bar{\lambda} = 3$, $\lambda^* = 1.192$.

Приклад 2. $n = 27$, $r_i = 1.5$, $i = 1,..,9$, $r_i = 1.7$, $i = 10,..,18$, $r_i = 2.0$, $i = 19,..,27$, $r = 9$, $\bar{\lambda} = 2$, $\rho = 0$, $\lambda^* = 0.865$.

Розміщення кругів, що відповідає локально-оптимальному розв'язку задачі (3)–(6) для прикладу 1 проілюстровано на рис. 1, а, для прикладу 2 – на рис. 1, б.



а б

Рисунок 1 – Локально-оптимальне розміщення n кругів:
а) з радіусами $1.192 \cdot r_i$ $i = 1,..,5$ для прикладу 1;
б) з радіусами $0.865 \cdot r_i$, $i = 1,..,27$ для прикладу 2

Модель (3)–(6) за умови $\overline{\lambda} = 1$ може бути застосована для генерації допустимих стартових точок при пошуку локальних екстремумів задач щільного або розрідженого [5] пакування n кругів заданих радіусів у круговому контейнері. Тоді, якщо $\lambda^* = 1$ – це означає, що можливо розмістити n кругів оригінальних радіусів $r_i, i = 1,...,n$, у круговому контейнері заданого розміру з урахуванням допустимих відстаней.

Для проведення чисельних експериментів застосовано комп'ютер DESKTOR-Q9PIRON, процесор 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-12500 3.00 GHz. Оперативна пам'ять 32.0 ГБ. Мова програмування Python 3.11.

Список використаних джерел:

1. Grosso A., Jamali A.R.M.J.U., Locatelli M., Schoen F. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container. Journal of Global Optimization. 2010. Vol. 47. P. 63–81.

2. He Y., Wu Y. Packing non-identical circles within a rectangle with open length. Journal of Global Optimization. 2013. Vol. 56. P. 1187–1215.

3. Kallrath J., Frey M. M. Packing circles into perimeter-minimizing convex hulls. Journal of Global Optimization. 2019. Vol. 73. P. 723–759.

4. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Marmolejo J. A. Decomposition algorithm for irregular placement problems. In Intelligent Computing and Optimization, AISC. 2019. Vol. 1072. P. 214–221.

5. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev, I., Plankovskyy S., Tsegelnyk Y., Shypul O. Sparsest balanced packing of irregular 3D objects in a cylindrical container. 2021. European Journal of Operational Research Vol. 291(1). P. 84–100.