УДК 519.632.4

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТРУКТУРНИМ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ З ГЕОМЕТРИЧНИМИ СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

Галін П.К.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна
тел. +38(067) 955-64-40, email: pavlo.halin@nure.ua

This paper considers the application of the structural method of R-functions to the solution of the problem of mathematical modeling of electrostatic fields in planar regions with geometrical singularities. Classical solution structures in this case lose the property of completeness. We describe an approach to transform such a structure into an exact one and obtain numerical results for calculating the electrostatic field in a region with an insulator.

Основою математичного моделювання різноманітних електромагнітних процесів є система рівнянь електродинаміки, або система рівнянь Максвелла. Система рівнянь, що описує поведінку електромагнітного поля, пов’язаного з постійним струмом, випливає з системи рівнянь Максвелла у результаті нехтування доданками, залежними від часу. За відсутності струму провідності остання система розпадається на дві незалежні системи рівнянь – рівняння електростатики і рівняння магнітостатики. І нарешті за умови відсутності у розглядуваній області Ω зарядів електростатичний потенціал u задовольнятиме рівнянню Лапласа $\Delta u = 0$, а якщо ж ρ – об’ємна густина зарядів, то електростатичний потенціал u задовольнятиме рівнянню Пуассона $-\Delta u = 4\pi\rho$. На межі $\partial\Omega$ області Ω для потенціалу u потрібно задати крайові умови. Наприклад, умова $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$ означатиме, що на $\partial\Omega$ задано значення потенціалу, а умова $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0$ означатиме, що межу $\partial\Omega$ електроізольовано. Отже, задача математичного моделювання електростатичного поля зводиться до розв’язання крайової задачі математичної фізики. Точні методи розв’язання таких задач (метод Фур’є, метод інтегральних перетворень, метод функцій Гріна тощо) застосовні лише у випадку досить простої геометрії області Ω, а багато чисельних методів (метод скінченних різниць, метод скінченних елементів тощо) не завжди точно враховують на аналітичному рівні геометричну інформацію, що міститься у постановці задачі. Вільним від цього недоліку є структурний метод (метод R-функцій), запропонований академіком НАН України В.Л. Рвачовим [1]. Для задачі розрахунку фізико-механічних полів цей метод полягає у наступному:

– точний опис геометрії області, тобто побудова такої функції $\omega(\mathbf{x})$, яка є додатною у Ω і дорівнює нулю на $\partial\Omega$ (також ця функція може мати певні диференціальні властивості, зокрема, нормалізованість: $|\nabla\omega(\mathbf{x})| = 1$ на $\partial\Omega$);

– продовження, користуючись функцією $\omega(\mathbf{x})$, межових значень та межових диференціальних операторів в область Ω;

– побудова структури розв'язку крайової задачі, тобто жмутка функцій, що точно задовольняє крайові умови задачі;

– апроксимація невизначених компонент структури якимось чисельним методом (зазвичай варіаційним чи проєкційним) з метою задовольнити рівняння задачі.

Описаний підхід довів свою ефективність при розв'язанні у областях складної геометрії найрізноманітніших задач теплопровідності, гідродинаміки, теорії пружності, теорії пластичності, електродинаміки тощо. Але його реалізація натикається на певні труднощі, якщо область Ω містить так звані геометричні сингулярності – розрізи, щілини, тонкі включення тощо. Тоді зазвичай класичні структури розв'язку втрачають свою повноту і ми не матимемо можливість наблизити шукану функцію як завгодно точно. для того, щоб трансформувати структуру у повну, можна скористатися наступним підходом [1]. Нехай область Ω містить розріз і рівняння $\omega_0(x, y) = 0$ – це нормалізоване рівняння зовнішнього контуру Ω, $\omega_1(x, y) = 0$ – нормалізоване рівняння розрізу, причому $l = 0$ – нормалізоване рівняння лінії, що містить розріз (зі зміною знака при переході через цю лінію), а $\omega \equiv \omega_0 \wedge_\alpha \omega_1 = 0$ – рівняння межі області з розрізом. Тоді повнота структури буде відновлена, якщо невизначену компоненту Φ подати у вигляді $\Phi = q_1 \cdot \Phi_1 + q_2 \cdot \Phi_2$, де

$$q_i = \frac{1}{2}(1 - (-1)^i D_1^{(l)}\omega_1)\Big|_{\omega_1=0} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + (-1)^i), & l = -0, \\ \frac{1}{2}(1 - (-1)^i), & l = +0, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

$$D_1^{(l)} = \frac{\partial l}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Обчислювальний експеримент було проведено для задачі розрахунку електростатичного поля у круговій області

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4,\ x \notin [-1; 1]\},$$

якщо на межі круга підтримується одиничний потенціал, а відрізок $[-1; 1]$ осі Ox займає вставка-ізолятор.

Список використаних джерел:

1. Кравченко, В.Ф., & Рвачев, В.Л. (2006). *Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях*. ФИЗМАТЛИТ.