

*А.И. СТРЕЛКОВ, д-р техн. наук, А.М. СТАДНИК, канд. физ.-мат. наук,
Т.А. СТРЕЛКОВА, канд. техн. наук, С.И. КАЛМЫКОВ*

ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕРХСЛАБОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ХЕМИЛЮМИНЕСЦЕНТНОМ АНАЛИЗЕ

Введение

В настоящее время доказано, что большинство заболеваний сопровождается активацией перекисного окисления липидов, которое при истощении собственной антиоксидатной системы может привести к нарушению структурно-функционального состояния мембран и усугублению патологического процесса [1,2].

Разработка методов исследования окислительного метаболизма биосистем имеет важное значение для понимания молекулярных механизмов активации клеток. Одним из наиболее перспективных методов для изучения возбужденных продуктов реакций является метод хемилюминисценции. Вопросы обнаружения и оценивания параметров оптического излучения при сверхслабых свечениях представляют большой интерес для оценки вирусных инфекций, бактериального загрязнения атмосферного воздуха, источников водоснабжения и пищевых продуктов [3,4].

При исследовании сверхслабых излучений возрастают требования к точности и чувствительности применяемой для регистрации аппаратуры. В этих условиях наиболее чувствительной и точной является методика счета отдельных фотонов. Это обуславливает необходимость разработки методов обнаружения и оценивания различных параметров случайных потоков общего вида [5, 6]. Ранее рассматривались различные методы оценивания интенсивности [7, 8], моментов произвольного порядка [9] и периода ненаблюдаемости нестационарного пуассоновского потока [10]. В работе [11] предложены оценки функции корреляции и спектра интенсивности дважды стохастического пуассоновского потока.

Использование пуассоновской модели для описания случайных потоков не в последнюю очередь связано с ее простотой (не учитываются корреляции между моментами появления событий потока) и возможностью продвинуться в аналитических вычислениях. В то же время адекватное описание реальных процессов зачастую требует учета корреляций между моментами появления событий случайного потока.

Поскольку, как правило, интенсивность корреляций убывает с ростом их порядка (тройные корреляции менее вероятны, чем парные, четверные – менее вероятны, чем тройные и т.д.), то основной физический интерес в большинстве случаев представляют парные корреляции. Парнокоррелированным называют поток, у которого существенны лишь попарные корреляции между моментами наступления событий.

Вопросы обнаружения парнокоррелированного потока рассматривались в работах [12, 13], где был синтезирован алгоритм оптимального по критерию Неймана-Пирсона обнаружителя, а также получены выражения и рекуррентные соотношения для функций, через которые выражаются плотности вероятности произвольного парнокоррелированного потока.

Если для пуассоновского потока оценка числа событий на интервале наблюдения при однократном отсчете сводится просто к их подсчету, то наличие корреляций в исходном потоке может существенно исказить такую оценку.

Целью данной работы является построение оптимальной оценки среднего числа событий на интервале наблюдения парнокоррелированного потока при однократном отсчете на фоне парнокоррелированных шумов.

1. Вероятностные характеристики случайных потоков

Случайный поток представляет собой процесс появления на временном интервале $(0, T)$ в случайные моменты времени τ_1, \dots, τ_k также случайного числа k событий ($k = 0, 1, 2, \dots$). Тра-

диционно вероятностное описание случайных процессов задается набором многомерных плотностей вероятности.

Пусть $\pi_k(\tau_1 \dots \tau_k; T) d\tau_1 \dots d\tau_k$ – вероятность появления k событий в интервалах $d\tau_j$ около точек τ_j ($j=1, 2, \dots, k$) и не появления любого числа событий в остальной части интервала $(0, T)$. Плотности $\pi_k(\tau; T) = \pi_k(\tau_1 \dots \tau_k; T)$ в силу неразличимости событий являются симметричными относительно перестановок аргументов τ_1, \dots, τ_k и удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d\tau \pi_k(\tau; T) = 1, \quad (1)$$

а среднее от любой случайной функции $\Phi_k(\tau)$ выражается через них посредством

$$\overline{\Phi_k(\tau)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d\tau \pi_k(\tau; T) \Phi_k(\tau),$$

где для сокращения записи введен вектор $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ и, соответственно, $\int d\tau = \prod_{j=1}^k \int d\tau_j$.

Вероятности появления в интервале $(0, T)$ ровно k событий безотносительно к моментам их появления находятся как

$$P_k(T) = \frac{1}{k!} \int d\tau \pi_k(\tau; T)$$

и удовлетворяют следующему из (1) естественному условию нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(T) = 1$.

Возможны и другие системы функций, каждая из которых может быть выражена через любую из остальных. Это находит свое отражение в том, что эквивалентное описание случайных потоков можно также эффективно осуществлять посредством производящего функционала (ПФЛ), определяемого как [5]

$$L[u; T] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d\tau \pi_k(\tau; T) \prod_{j=1}^k [1 + u(\tau_j)],$$

где $u(\tau)$ – произвольная функция на интервале $(0, T)$.

При таком подходе плотности $\pi_k(\tau; T)$ представляют собой производные от $L[u; T]$ в точке $u(\tau) = -1$

$$\pi_k(\tau; T) = \left. \frac{\delta^k L[u; T]}{\delta u(\tau_1) \dots \delta u(\tau_k)} \right|_{\delta u(\tau_j) = -1}$$

Для характеристики случайных потоков по степени корреляции появления событий на интервале наблюдения более удобным оказывается представление ПФЛ в виде:

$$L[u; T] = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d\tau g_k(\tau) \prod_{j=1}^k u(\tau_j) \right], \quad (2)$$

поскольку вводимые таким образом корреляционные функции потока $g_k(\tau) \equiv g_k(\tau_1 \dots \tau_k)$ отражают тенденцию k событий к сближению при положительных корреляциях и к их “расталкиванию” – при отрицательных.

2. Модель парнокоррелированного потока

Парнокоррелированным называется поток, у которого отличны от нуля только корреляции низших порядков $g_1(\tau)$ и $g_2(\tau_1, \tau_2)$, а его ПФЛ имеет, соответственно, вид [5]:

$$L[u; T] = \exp \left[\int_0^T d\tau g_1(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^T d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 g_2(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \right]. \quad (3)$$

В предыдущих работах авторов [12, 13] показано, что плотности $\pi_k(\tau; T)$ для парнокоррелированного потока находятся как

$$\pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; T) = P_0(T) \prod_{i=1}^k \chi_1(\tau_i; T) U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; T),$$

где функция $\chi_1(\tau; T) = g_1(\tau) - \int_T d\tau' g_2(\tau, \tau')$, а $U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; T)$ может быть определена из рекуррентных соотношений

$$U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; T) = U_{k-1}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}; T) + \sum_{i=1}^{k-1} q(\tau_i, \tau_k) U_{k-2}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{k-1}; T),$$

в которых $U_{k-2}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{k-1}; T)$ – функция $k-2$ аргументов, получаемых из упорядоченного множества $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1})$ исключением i – го члена ($1 \leq i \leq k-1$), функция

$$q(\tau, \tau') = \frac{\chi_2(\tau, \tau')}{\chi_1(\tau; T) \chi_1(\tau'; T)}, \text{ а } \chi_2(\tau, \tau') = g_2(\tau, \tau').$$

На основе этих выражений там же получено, что вероятности $P_k(T)$ появления k точек парнокоррелированного потока в интервале $(0, T)$ равны

$$P_k(T) = P_0(T) \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{X_1^{k-2i}(T)}{(k-2i)!} \frac{1}{i!} \left(\frac{X_2(T)}{2} \right)^i, \quad (4)$$

где вероятность того, что в интервале $(0, T)$ не появится ни одной точки, дается выражением

$$P_0(T) = \exp \left[-X_1(T) - \frac{1}{2} X_2(T) \right], \quad (5)$$

а величины $X_1(T)$ и $X_2(T)$ выражаются через интегралы от корреляционных функций

$$G_1(T) = \int_T d\tau_1 g_1(\tau_1),$$

$$G_2(T) = \int_T d\tau_1 \int_T d\tau_2 g_2(\tau_1, \tau_2)$$

посредством соотношений

$$\begin{aligned} X_1(T) &= G_1(T) - G_2(T), \\ X_2(T) &= G_2(T). \end{aligned} \quad (6)$$

Наиболее важная интегральная характеристика произвольного потока, среднее число событий \bar{n} по результатам наблюдения на всем интервале $(0, T)$, находится как

$$\bar{n} = \int_0^T d\tau g_1(\tau) = G_1(T).$$

Таким образом, $g_1(\tau)$ имеет смысл интенсивности потока, а функция парной корреляции $g_2(\tau_1, \tau_2)$ является аналогом двухчастичной корреляционной функции в статистической физике [14].

3. Постановка задачи

Пусть на вход приемного устройства поступает смесь парнокоррелированного потока полезных сигналов, характеризуемого производящим функционалом

$$L^c[u; T] = \exp \left[\int_T d\tau g_1^c(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_T d\tau_1 \int_T d\tau_2 g_2^c(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \right], \quad (7)$$

и парнокоррелированного потока шумовых сигналов, ПФЛ которого имеет, соответственно, вид:

$$L^w[u; T] = \exp \left[\int_T d\tau g_1^w(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_T d\tau_1 \int_T d\tau_2 g_2^w(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \right], \quad (8)$$

где функции $g_1^c(\tau)$, $g_2^c(\tau_1, \tau_2)$ и $g_1^w(\tau)$, $g_2^w(\tau_1, \tau_2)$ представляют собой первую и вторую корреляции сигнального и шумового парнокоррелированных потоков.

При условии, что при однократном отсчете на интервале наблюдения $(0, T)$ было зарегистрировано k событий, по результатам отсчета необходимо дать оптимальную оценку среднего числа событий сигнального потока $G_1^c(T)$, полагая известными среднее число событий шумового потока $G_1^w(T)$ и соответствующих интегральных функций корреляции $G_2^c(T)$ и $G_2^w(T)$.

Если априорная информация не уточняет результат измерений, то, как известно, оценка по критерию максимума апостериорной вероятности сводится к оценке наибольшего правдоподобия, соответствующей точке максимума логарифма отношения правдоподобия [15]

$$l = \ln \frac{P_k^{c+w}(T)}{P_k^w(T)}. \quad (9)$$

Таким образом, для нахождения оптимальной оценки $G_1^c(T)$ необходимо знание апостериорной вероятности $P_k^{c+w}(T)$ регистрации k событий при наблюдении смеси парнокоррелированных сигнального и шумового потоков (физически очевидно, что вероятность $P_k^w(T)$ от $G_1^c(T)$ не зависит). Проведем соответствующие выкладки.

Для статистически независимых сигнального и шумового потоков производящий функционал их суммы равен произведению парциальных ПФЛ [5]

$$L^{c+w}[u; T] = L^c[u; T] \cdot L^w[u; T],$$

что в нашем случае с учетом (7) и (8) дает [13]:

$$L^{c+w}[u; T] = \exp \left[\int_T d\tau g_1^{c+w}(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_T d\tau_1 \int_T d\tau_2 g_2^{c+w}(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \right], \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} g_1^{c+w}(\tau) &= g_1^c(\tau) + g_1^w(\tau); \\ g_2^{c+w}(\tau_1, \tau_2) &= g_2^c(\tau_1, \tau_2) + g_2^w(\tau_1, \tau_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, сумма двух независимых парнокоррелированных потоков также является парнокоррелированным потоком, корреляции которого выражаются через корреляции слагаемых посредством (11), а вероятность $P_k^{c+w}(T)$ дается соответствующим обобщением выражений (4):

$$P_k^{c+w}(T) = P_0^{c+w}(T) \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{\left(X_1^{c+w}(T) \right)^{k-2i}}{(k-2i)!} \frac{1}{i!} \left(\frac{X_2^{c+w}(T)}{2} \right)^i, \quad (12)$$

где, согласно (5) и (6):

$$P_0^{c+w}(T) = \exp \left[-X_1^{c+w}(T) - \frac{1}{2} X_2^{c+w}(T) \right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned} X_1^{c+\psi}(T) &= G_1^{c+\psi}(T) - G_2^{c+\psi}(T), \\ X_2^{c+\psi}(T) &= G_2^{c+\psi}(T), \end{aligned} \quad (14)$$

а, согласно (11):

$$\begin{aligned} G_1^{c+\psi}(T) &= G_1^c(T) + G_1^\psi(T), \\ G_2^{c+\psi}(T) &= G_2^c(T) + G_2^\psi(T). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь мы имеем все необходимые заготовки для нахождения оптимальной оценки среднего числа событий сигнального потока $G_1^c(T)$.

4. Оптимальная оценка среднего числа событий парнокоррелированного потока

Оптимальная оценка среднего числа событий сигнального парнокоррелированного потока $G_1^c(T)$ на фоне парнокоррелированного шума при однократном отсчете на интервале наблюдения $(0, T)$ является решением уравнения $\frac{\partial l}{\partial G_1^c(T)} = 0$, которое с учетом (9) и (12-15) можно

представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial G_1^c} \ln \frac{P_k^{c+\psi}}{P_k^\psi} &= \frac{\partial}{\partial X_1^{c+\psi}} \ln P_k^{c+\psi} = \\ &= -1 + \frac{\sum_{i=0}^{[(k-1)/2]} \frac{(X_1^{c+\psi})^{k-2i-1}}{(k-2i-1)!} \frac{1}{i!} \left(\frac{X_2^{c+\psi}}{2} \right)^i}{\sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{(X_1^{c+\psi})^{k-2i}}{(k-2i)!} \frac{1}{i!} \left(\frac{X_2^{c+\psi}}{2} \right)^i} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где для упрощения записи опущена явная зависимость всех величин от длительности интервала T .

Уравнение (16) нетрудно преобразовать к виду:

$$X_1^{c+\psi} = k \frac{Q_{k-1} \left(\frac{X_2^{c+\psi}}{2(X_1^{c+\psi})^2} \right)}{Q_k \left(\frac{X_2^{c+\psi}}{2(X_1^{c+\psi})^2} \right)}, \quad (17)$$

где функция $Q_k(x)$ определяется соотношениями

$$Q_k(x) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1; \\ 1 + \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{k!}{i!(k-2i)!} x^i, & k \geq 2. \end{cases} \quad (18)$$

Представление (17) является более удобным в нескольких отношениях. Во-первых, видно (как, впрочем, и из (16)), что приемник не может оценивать вклад парных корреляций отдельно сигнального и помехового потоков, так как они, согласно (14), (15), дают вклад в (17) на равных основаниях. Аналогично, из уравнения (17) получают оптимальную оценку $\hat{X}_1^{c+\psi}$ только суммарного среднего числа событий (смеси сигнального и шумового) парнокоррелированного потока. Лишь затем, полагая известной интегральную интенсивность парных корреляций суммарного потока $G_2^{c+\psi}$, можно получить оптимальную оценку для суммарного потока $\hat{G}_1^{c+\psi} = \hat{X}_1^{c+\psi} + G_2^{c+\psi}$,

из которой, при известной $G_1^{\text{ш}}$, находим оптимальную оценку для сигнального потока $\hat{G}_1^{\text{с}} = \hat{G}_1^{\text{с+ш}} - G_1^{\text{ш}}$.

Помимо прочего, это означает также, что данная методика может быть использована для оценки среднего числа событий парнокоррелированного шумового потока, если в эксперименте есть возможность выделить измерительный канал, в котором отсутствуют события сигнального потока.

Во-вторых, уравнение (17) представлено в форме $x = f(x)$, готовой для его решения методом простых итераций. В качестве начального приближения естественно брать $x_0 = k$, а последующие итерации $x_i = f(x_{i-1})$ проводятся до получения необходимой точности и прекращаются при выполнении условия $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$.

Наконец, в-третьих, представление уравнения в виде (17) позволяет делать качественные выводы о характере его решения. Поскольку, как видно из (18), $Q_k(0) = 1$, то при отсутствии парных корреляций в обоих потоках $X_2^{\text{с+ш}} = 0$ оптимальная оценка сводится к предельному пуассоновскому случаю $\hat{X}_1^{\text{с+ш}} = k$.

Далее из (17) прямо следует на первый взгляд несколько неожиданный вывод о том, что при $k \rightarrow \infty$ эффект парных корреляций также пропадает, и оптимальной оценкой является опять $\hat{X}_1^{\text{с+ш}} = k$. Объяснение состоит в том, что степень парных корреляций в произвольном парнокоррелированном потоке определяется не абсолютной величиной X_2 , а, как показано в [12], отношением $r(T) = G_2(T) / G_1(T)$, причем, значение $r(T) = 0$ соответствует отсутствию парных корреляций, а максимальное значение $r(T) = 1$ - вырождению в поток парных событий. Поэтому случай $k \rightarrow \infty$, соответствующий независимому неограниченному увеличению $G_1(T)$, приводит к мнимому парадоксу «пропадания» парных корреляций.

5. Результаты численных расчетов

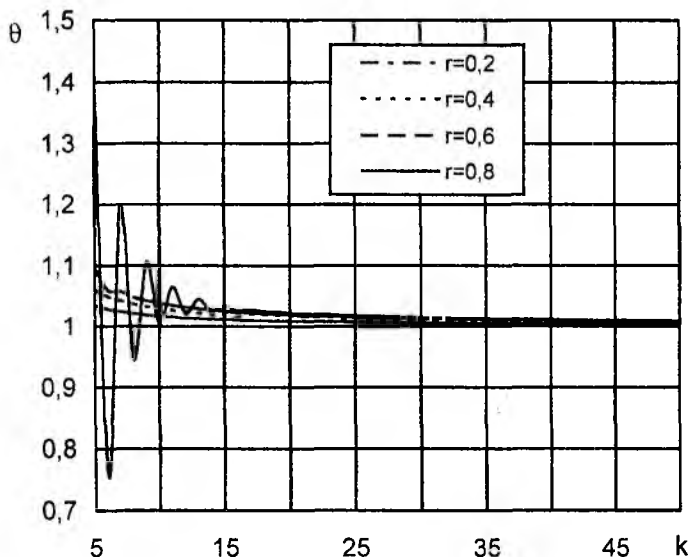


Рис. 1

Иллюстративные численные расчеты были проведены для функции $\theta = \hat{G}_1 / k$, отличие которой от единицы характеризует отклонение оптимальной оценки среднего числа событий \hat{G}_1 на интервале наблюдения $(0, T)$ от значения k , соответствующего случаю отсутствия парных корреляций. По изложенным выше причинам здесь и ниже у всех величин опущен индекс «с+ш», отмечающий их принадлежность к полному (суммарному) потоку.

После некоторых преобразований из (17) следует уравнение непосредственно для θ , которое и решалось численно методом простых итераций при различных значениях параметра r , характеризующего, как отмечалось выше, суммарную интенсивность парных корреляций в исходном потоке. Результаты расчетов представлены на рис. 1.

Поведение кривых при значениях r от 0,2 до 0,6 предсказуемо: большим значениям r соответствуют большие отличия θ от единицы, то есть большие значения интенсивности парных корреляций обуславливают необходимость более существенной коррекции полученных из реализаций значений среднего числа событий. Причина стремления θ к единице при $k \rightarrow \infty$ обсуждалась выше.

Совершенно неожиданным представляется осциллирующее поведение θ при значениях r , близких к единице. Этот факт можно объяснить тем, что при $r \rightarrow 1$ парнокоррелированный поток начинает вырождаться в поток парных событий. Поэтому при регистрации в эксперименте крайне маловероятного нечетного числа событий алгоритм оптимальной оценки вынужден весьма существенно изменять его, «подтягивая» к ближайшему четному значению. При больших значениях k такие осцилляции также присутствуют, однако на рисунке практически неразличимы в силу их малости.

Заключение

В работе построена оптимальная по критерию максимума правдоподобия оценка среднего числа событий на интервале наблюдения парнокоррелированного потока при однократном отсчете на фоне парнокоррелированных шумов. Уравнение для данной оценки приведено к виду, удобному как для качественного анализа, так и для его численного решения методом простых итераций. Приведены результаты численных расчетов функции, отличие которой от единицы характеризует уклонение оптимальной оценки среднего числа событий от значения, соответствующего отсутствию парных корреляций. Осциллирующий характер поведения этой функции при сильных парных корреляциях объяснен вырождением парнокоррелированного потока в поток парных событий.

Список литературы: 1. Кузмина Е.И., Подгусков Н.С., Ермолин С.В., Мошкова С.В. Использование хемилюминисцентного анализа мочи и сыворотки крови в ранней диагностике злокачественных и воспалительных заболеваний органов мочеполовой системы // Люминесцентный анализ в медицине и биологии и его аппаратное обеспечение. Рига. 1988. 189 с. 2. Добрецов Г.Е. Флуоресцентные зонды в биофизике мембран, медицине и фармакологии // Люминесцентный анализ в медико-биологических исследованиях. 1986. 264 с. 3. Калмыков С.И. Высокоточная оценка биологического заражения в местах дислокации воинских формирований // Системы обработки информации. Зб. наук. праць. Харьков: ХВУ. 2001. Вып. 5(15). С. 155-158. 4. Вирусы и вирусные заболевания. Республиканский межведомственный сборник. 1990. Вып. 18. 145 с. 5. Большаков И. А., Ракошиц В. С. Прикладная теория случайных потоков. М.: Сов. Радио, 1978. 248 с. 6. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высш. школа, 1990. 376 с. 7. Никитин Н. Н., Снегова А. А. Рекуррентное оценивание параметров нестационарного пуассоновского потока // Автоматика и телемеханика. 1984. № 1. С. 86-90. 8. Никитин Н. Н., Снегова А. А. Применение метода стохастической аппроксимации при оценивании параметров нестационарного пуассоновского потока // Автоматика и телемеханика. 1984. № 7. С. 89-93. 9. Daudpota Q. I., Dowrick G., Greated C. A. Estimation of moments of a Poisson-sampled random process // J. Phys. A 1977. V. 10, no 4. Pp. 471-483. 10. Горцев А. М., Климов И. С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // Радиотехника (Москва). 1996. № 2. С. 8-11. 11. Идрисов Ф. Ф. Оценка функции корреляции и спектра интенсивности дважды стохастического пуассоновского потока // Радиотехника (Москва). 1996. № 2. С. 3-7. 12. Стрелков А. И., Стадник А. М., Калмыков С. И., Лытюга А. П. Обнаружение парнокоррелированного потока сигналов на фоне пуассоновского шума // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб., 1999. Вып. 112. С. 3-11. 13. Стадник А. М. Оптимальное обнаружение парнокоррелированного потока сигналов на фоне парнокоррелированного шума // Радиопизика и радиоастрономия. 1999. Т. 4. № 4. С. 331-341. 14. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с. 15. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. Радио, 1978. 320 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники
Харьковский военный университет

Поступила в редколлегию 24.04.2002