

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, ЭКВИВАЛЕНТНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЕ

Л. П. Исаев

Киев

Для получения требуемых показателей качества в системах автоматического управления широко применяются непрерывные корректирующие устройства.

В ряде случаев корректирующее устройство должно иметь передаточную функцию с высокими степенями числителя и знаменателя. Для его реализации иногда целесообразно использовать электронную цифровую вычислительную машину (ЭЦВМ). Выполняющая функцию корректирующего устройства ЭЦВМ должна обеспечивать эквивалентность дискретной и непрерывной систем управления.

Будем рассматривать ЭЦВМ (с преобразователями) как линейный дискретный фильтр. Передаточную функцию дискретного фильтра обозначим через

$$K_{\Phi}^*(e^{pT}).$$

Запишем передаточную функцию непрерывной системы (желаемую передаточную функцию) в следующем виде:

$$K_{\Sigma}(p) = \frac{K_0(p)}{1 + K_p(p)}, \quad (1)$$

где $K_0(p)$ и $K_p(p)$ — дробно-рациональные функции p .

Будем считать, что дискретная система эквивалентна непрерывной, если разность выходных величин этих систем инвариантна по отношению к входному управляющему воздействию.

В [1] показано, что условием инвариантности разности выходных величин дискретной и непрерывной систем (каналов) служит выполняемое лишь приближенно равенство:

$$K^*(e^{pT}) = \frac{K_{\Sigma}(p)}{K_{\text{вх}}(p)}, \quad (2)$$

или

$$K^*(e^{pT}) = \frac{K_1(p)}{1 + K_p(p)}, \quad (3)$$

где $K^*(e^{pT})$ — передаточная функция дискретной системы;

$K_{\text{вх}}(p)$ — передаточная функция непрерывного фильтра нижних частот, включенного на входе дискретной системы для защиты последней от воздействия высокочастотных сигналов;

$$K_1(p) = \frac{K_0(p)}{K_{\text{вх}}(p)}. \quad (4)$$

Из (3) следует, что для определения передаточной функции дискретной системы управления требуется аппроксимировать дробно-рациональной функцией переменной e^{pT} функцию $\frac{K_1(p)}{1+K_p(p)}$.

В целях упрощения вычислений при определении $K^*(e^{pT})$ вместо аппроксимации самой функции $\frac{K_1(p)}{1+K_p(p)}$ можно ограничиться аппроксимацией функций $K_1(p)$ и $K_p(p)$.

Эти функции, как правило, можно сравнительно просто представить в виде суммы элементарных слагаемых и аппроксимировать каждое из этих слагаемых своей дробно-рациональной функцией переменной e^{pT} .

Определив в результате аппроксимации передаточную функцию дискретной системы $K^*(e^{pT})$, нетрудно затем найти и передаточную функцию дискретного корректирующего устройства $K_\Phi^*(e^{pT})$. Если, например,

$$K^*(e^{pT}) = \frac{K_\Phi^*(e^{pT}) K_2^*(e^{pT})}{1 + K_\Phi^*(e^{pT}) K_3^*(e^{pT})}, \quad (5)$$

где $K_2^*(e^{pT})$ и $K_3^*(e^{pT})$ — передаточные функции соединений элементов разомкнутой системы,

то

$$K_\Phi^*(e^{pT}) = \frac{K^*(e^{pT})}{K_2^*(e^{pT}) - K_3^*(e^{pT}) K^*(e^{pT})}. \quad (6)$$

Возможно, что в некоторых случаях будет целесообразно использовать для реализации требуемой передаточной функции $K^*(e^{pT})$ два дискретных корректирующих устройства. Чтобы определить передаточные функции этих устройств, опять таки требуется аппроксимировать функции $K_1(p)$ и $K_p(p)$.

Таким образом, одним из основных этапов в определении передаточной функции дискретного корректирующего устройства является аппроксимация элементарных слагаемых, на которые могут быть разложены функции $K_1(p)$ и $K_p(p)$.

Таковыми слагаемыми обычно являются дроби вида

$$\frac{K}{p^r}, \quad \frac{K}{(p+a)^r}$$

и некоторые другие функции.

Рассмотрим, каким образом дробь $\frac{K}{p^r}$ может быть аппроксимирована дробно-рациональной функцией переменной e^{pT} . Воспользовавшись уравнением связи Z -преобразования с соответствующим преобразованием Лапласа [2], нетрудно установить, что одной из аппроксимирующих функций является умноженное на T Z -преобразование:

$$K_{ar}^*(e^{pT}) = T \cdot Z \left\{ \frac{K}{p^r} \right\} = K \frac{T^r e^{pT}}{(e^{pT} - 1)^r} D_{r-1}(e^{pT}). \quad (7)$$

$D_{r-1}(e^{pT})$ — это целая функция переменной e^{pT} , степень которой равна нулю при $r=1$ и $r-2$ при $r \geq 2$.

Формулу для определения коэффициентов полинома $D_{r-1}(e^{pT})$ можно найти, например, в [2].

Относительная ошибка аппроксимации функции $\frac{K}{p^r}$ функцией $K_{ar}^*(e^{pT})$ определяется выражением

$$\epsilon_r(pT) = \frac{\frac{K}{p^r} - K_{ar}^*(e^{pT})}{\frac{K}{p^r}} = \left(\frac{pT}{e^{pT} - 1} \right)^r \left[\left(\frac{e^{pT} - 1}{pT} \right)^r - e^{pT} D_{r-1}(e^{pT}) \right]. \quad (8)$$

Нетрудно установить, что коэффициенты полинома $D_{r-1}(e^{pT})$ имеют такие значения, при которых точка $pT = 0$ является нулем r -го порядка функции $\epsilon_r(pT)$.

Чтобы повысить точность аппроксимации и обеспечить выполнение ряда требований, предъявляемых к дискретной системе управления и ее корректирующему устройству, полином $e^{pT} D_{r-1}(e^{pT})$ целесообразно заменить полиномом более общего вида:

$$M_r(e^{pT}) = \sum_{\mu=-k}^v a_{r\mu} e^{\mu pT}. \quad (9)$$

При определении коэффициентов этого полинома необходимо выбрать ряд условий и решить уравнения, которыми выражаются эти условия.

Во-первых, следует учесть, что точка $pT = 0$ должна быть нулем r -го или более высокого порядка функции $\epsilon_r(pT)$. Во-вторых, требуется обеспечить выполнение условий устойчивости дискретной системы управления и физической реализуемости корректирующего устройства.

Важным является условие

$$K_{\Phi}^*(e^{j\pi}) = 0, \quad (10)$$

которое обусловлено непригодностью дискретной системы управления для воспроизведения сигналов, частота которых превышает $\frac{1}{2T}$.

Воспользовавшись для определения коэффициентов $a_{r\mu}$ только условиями

$$\left. \frac{d^v \epsilon_r(pT)}{d(pT)^v} \right|_{pT=0} = 0, \quad v = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

получаем:

1. $k = 0, v = r$

$$K_{a1}^*(e^{pT}) = \frac{T}{2} \frac{e^{pT} + 1}{e^{pT} - 1}, \quad (12)$$

$$K_{a2}^*(e^{pT}) = \frac{T^2}{12} \frac{e^{2pT} + 10e^{pT} + 1}{(e^{pT} - 1)^2}, \quad (13)$$

$$K_{a3}^*(e^{pT}) = \frac{T^3}{2} \frac{e^{2pT} + e^{pT}}{(e^{pT} - 1)^3}. \quad (14)$$

2. $k = 3, v = r - 1$

$$K_{a1}^*(e^{pT}) = \frac{T}{24} \frac{55e^{3pT} - 59e^{2pT} + 37e^{pT} - 9}{(e^{pT} - 1)e^{3pT}}. \quad (15)$$

3. $k = 2, v = r$

$$K_{a1}^*(e^{pT}) = \frac{T}{24} \frac{9e^{3pT} + 19e^{2pT} - 5e^{pT} + 1}{(e^{pT} - 1)e^{2pT}}. \quad (16)$$

Нетрудно установить, что функции (12) — (14) совпадают с Z -формами, которые получены, исходя из иных предпосылок, в [3].

Функциям же (15) и (16) соответствуют экстраполяционная и интерполяционная формулы Адамса для численного решения задачи Коши [4].

Если заменить в выражениях для $K_{ar}^*(e^{pT})$ переменную p на $p + \alpha$, то получим функции, которые аппроксимируют дробь $\frac{K}{(p + \alpha)^r}$.

Воспользовавшись методикой аппроксимации функции $\frac{K}{p^r}$, нетрудно аппроксимировать и другие простейшие функции.

После того, как определена передаточная функция дискретной системы управления, требуется произвести оценку ошибки выполнения условия эквивалентности систем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(pT) &= K_{\text{ж}}(p) - K_{\text{вх}}(p) K^*(e^{pT}) = \\ &= K_{\text{вх}}(p) \left[\frac{K_{\text{ж}}(p)}{K_{\text{вх}}(p)} - K^*(e^{pT}) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

При оценке целесообразно построить для различных значений интервала дискретности T кривые $|\varepsilon(j\omega T)|$ и выбрать по этим кривым величину T .

Пример. Определим передаточные функции дискретной системы управления и дискретного корректирующего устройства в случае, когда

$$\begin{aligned} K_{\text{ж}}(p) &= \frac{\frac{K}{p}}{1 + \frac{K}{p}}, \quad K_{\text{вх}}(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha}, \\ K_2^*(e^{pT}) &= K_3^*(e^{pT}). \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае требуется аппроксимировать функции

$$K_p(p) = \frac{K}{p} \quad \text{и} \quad K_1(p) = \frac{K}{\alpha} \frac{p + \alpha}{p}.$$

В целях обеспечения устойчивости дискретной системы управления желательно, чтобы для аппроксимации $K_p(p)$ выбиралась функция $K_{a1}^*(e^{pT})$, которая удовлетворяет условию

$$K_{a1}^*(e^{i\pi}) = 0. \quad (18)$$

Полагая, что

$$K_{a1}^*(e^{pT}) = KT \cdot \frac{a_0 e^{pT} + a_1}{e^{pT} - 1},$$

и воспользовавшись при определении коэффициентов a_0 и a_1 условиями (11) и (18), получаем:

$$K_{a1}^*(e^{pT}) = K \frac{T}{2} \frac{e^{pT} + 1}{e^{pT} - 1}. \quad (19)$$

При аппроксимации функции $K_1(p)$ требуется учесть условие физической реализуемости дискретного корректирующего устройства.

Степень числителя аппроксимирующей функции $W_{a1}^*(e^{pT})$ должна быть меньше степени знаменателя.

Поэтому будем считать, что

$$W_{a1}^*(e^{pT}) = \frac{K}{\alpha} \frac{b_0 + b_1 e^{-pT}}{e^{pT} - 1} = \frac{K}{\alpha} \frac{b_0 e^{pT} + b_1}{(e^{pT} - 1) e^{pT}}.$$

Потребовав, чтобы точка $pT = 0$ была нулем второго порядка относительной ошибки аппроксимации, получаем:

$$b_0 = 1 + 1,5 \alpha T; \quad b_1 = -(1 + 0,5 \alpha T);$$

$$W_{a1}(e^{pT}) = \frac{KT}{\alpha T} \frac{(1 + 1,5 \alpha T) e^{pT} - (1 + 0,5 \alpha T)}{(e^{pT} - 1) e^{pT}}. \quad (20)$$

Воспользовавшись выражениями (19) и (20), найдем интересующие нас функции:

$$\begin{aligned} K^*(e^{pT}) &= \frac{KT}{\alpha T} \frac{1 + 1,5 \alpha T}{1 + 0,5 KT} \times \\ &\times \frac{e^{pT} - \frac{1 + 0,5 \alpha T}{1 + 1,5 \alpha T}}{e^{2pT} - \frac{1 - 0,5 KT}{1 + 0,5 KT} e^{pT}} = \\ &= \frac{KT}{\alpha T} C_1 \frac{e^{pT} - C_2}{e^{2pT} - C_3 e^{pT}}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$K_\Phi^*(e^{pT}) = \frac{KT}{\alpha T} C_1 \times$$

$$\times \frac{e^{pT} - C_2}{e^{2pT} - \left(\frac{KT}{\alpha T} C_1 + C_3 \right) e^{pT} + \frac{KT}{\alpha T} C_1 C_2} \cdot \frac{1}{K_2^*(e^{pT})}, \quad (22)$$

$$\epsilon(pT) = \frac{KT}{pT + \alpha T} \left[\frac{pT + \alpha T}{pT + KT} - C_1 \frac{e^{pT} - C_2}{e^{2pT} - C_3 e^{pT}} \right], \quad (23)$$

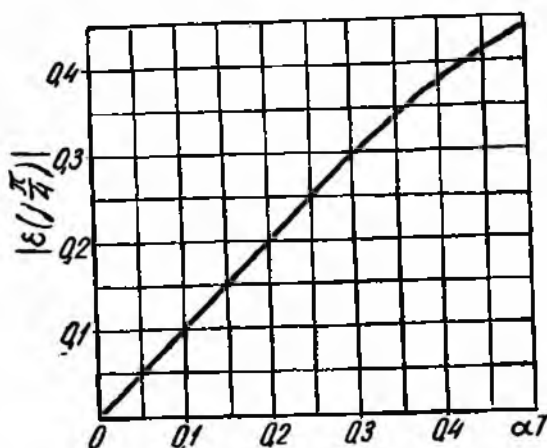


Рис. 2.

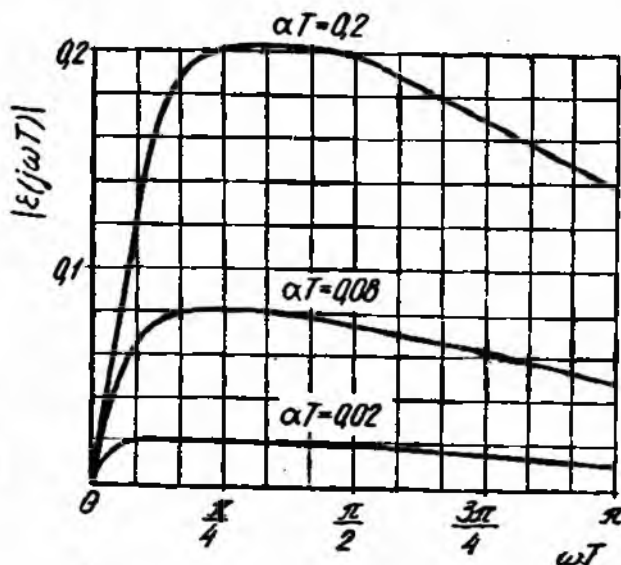


Рис. 1.

$$\text{где } C_1 = \frac{1 + 1,5 \alpha T}{1 + 0,5 KT}.$$

$$C_2 = \frac{1 + 0,5 \alpha T}{1 + 1,5 \alpha T}.$$

$$C_3 = \frac{1 - 0,5 KT}{1 + 0,5 KT}.$$

Передаточная функция (21) может быть реализована только при выполнении условий грубости [5].

Воспользовавшись (23), можно рассчитать и построить кривую $|\epsilon(j\omega T)|$ для различных значений αT и KT .

На рис. 1 приведены кривые для случаев, когда

$$\alpha T = KT = 0,2, 0,08, 0,02.$$

Как видно из рис. 1, с уменьшением интервала дискретности T повышается точность выполнения условия эквивалентности систем.

На рис. 2 показана зависимость модуля ошибки аппроксимации от αT для $\omega T = \frac{\pi}{4}$ (при $\omega T = \frac{\pi}{4}$ модуль ошибки аппроксимации принимает значение, близкое к максимальному).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Кухтенко. Проблема инвариантности в автоматике. Гостехиздат УССР, 1963.
 2. Л. Т. Кузин. Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, 1962.
 3. R. Boxer and S. Thaler. A simplified method of solving linear and non-linear systems, Proc. of the IRE, pp. 89—101, January 1956.
 4. И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. II, Физматгиз, 1959.
 5. Л. Н. Волгин. Элементы теории управляющих машин. «Советское радио», 1962.
-