УДК 519.6

СХОДИМОСТЬ И ПОМЕХОУСТОЙЧИВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

ГРИЦЮК В.И.

Рассматриваются условия сходимости оценок. Приводятся результаты, действительные для случая параметров, изменяющихся во времени, и адаптивного регулирования. Исследуется вид приближенного M - фильтра и его ковариационной матрицы. Предлагается алгоритм оценивания, обладающий повышенной точностью.

Рассмотрим систему S:

$$y(t) = f_S(t, y^{t-1}, u^{t-1}) + \nu(t),\ y(0) = \nu(0), \qquad (1)$$

где $f_S(\cdot,\cdot,\cdot)$ – детерминированная функция и $\{\nu(t)\}$ – стохастический процесс такой, что

$$E\left[\nu(t)\middle|\nu^{t-1}\right] = 0,\ \text{где}\ \nu^{t-1} = (\nu(t-1),\cdots,\nu(0)).,$$

с входным сигналом

$$u(t) = v_X(t, y^t, u^{t-1}, w(t)). \qquad (2)$$

Здесь $v_X(\cdot,\cdot,\cdot)$ – данная детерминированная функция и $w(t)$ – данный детерминированный сигнал "внешний вход".

Система S подвержена следующим условиям .

S1: Пусть $\nu(\cdot)$ и $w(\cdot)$ – два стохастических процесса. Один из них или оба могут быть детерминированными последовательностями. Пусть W^t – σ - алгебра, генерируемая (ν^t, w^t). Предположим, что $E(\nu(t)|W^{t-1}) = 0$.

S2: $E(\nu(t)\nu(t)^T|W^{t-1}) \geq \delta I,\quad \delta \succ 0.$

S3: Замкнутая система (1), (2) – экспоненциально устойчива, что мы определяем как следующее: для каждого t, s; $t \geq s$ существуют случайные переменные $y_s^o(t), u_s^o(t)$, которые принадлежат W^t, но не зависят от W^s, где W^t - σ - алгебра, генерируемая ν^t, w^t, такие, что

$$E\left|y(t) - y_s^o(t)\right|^4 \prec C\lambda^{t-s},$$
$$E\left|u(t) - u_s^o(t)\right|^4 \prec C\lambda^{t-s} \qquad (3)$$

для некоторых $C \prec \infty, \lambda \prec 1$ при $y_t^o(t) = 0, u_t^o(t) = 0.$

Рассмотрим набор моделей, подверженных следующим условиям M1.

Предположим, что функция

$$g_M(\Theta; t, y_0^{t-1}, u_0^{t-1})$$

дифференцируема по Θ для всех $\Theta \in D_M$. Пусть D_M – компакт. Предположим [1,2], что

$$\left|g_M(\Theta; t, \alpha_1^{t-1}, \alpha_2^{t-1}) - g_M(\Theta; t, \beta_1^{t-1}, \beta_2^{t-1})\right| \leq$$
$$\leq C\sum_{s=0}^{t}\lambda^{t-s}\left\{\left|\alpha_1(s) - \beta_1(s)\right| + \left|\alpha_2(s) - \beta_2(s)\right|\right\}, \qquad (4)$$
$$\left|g_M(\Theta; t, 0^{t-1}, 0^{t-1})\right| \leq C,\ \text{где}\ 0^{t-1} = (0,\cdots,0)$$

и $\alpha_i^{t-1} = (\alpha_i(t-1),\cdots,\alpha_i(0))$ для всех t, $\alpha_i^{t-1}, \beta_i^{t-1}$ и Θ принадлежат открытой окрестности D_M, где $C \prec \infty$ и $\lambda \prec 1$. Предположим также, что $(d/d\Theta)g_M(\Theta; y_0^{t-1}, u_0^{t-1})$ подвержена (4).

Критериальные функции $l(t,\Theta;\varepsilon)$ могут быть подвержены следующим условиям регулярности:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}l(t,\Theta;\varepsilon)\right| \leq c|\varepsilon|,\ \Theta \in D_M,\ \text{для всех t},$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial\Theta}l(t,\Theta,\varepsilon)\right| \leq c|\varepsilon|^2, \Theta \in D_M, \qquad (5)$$

для всех t – условие C1.

Докажем основной результат для сходимости и анализа идентифицируемости.

Пусть система S, данная (1), с входным сигналом, данным (2), подвержена условиям S3.

Пусть набор моделей M подвержен условиям M1 и пусть критериальная функция $l(t,\Theta,\varepsilon)$ соответствует C1. Тогда

$$\sup_{\Theta\in D_M}\left|Q_N(\Theta, y^N, u^{N-1}) - EQ_N(\Theta, y^N, u^{N-1})\right| \to 0 \quad (6)$$

с вероятностью 1 при $N \to \infty$.

Последовательность функций $EQ_N(\Theta, y^N, u^{N-1})$ непрерывна в Θ.

Типичный выбор в применениях

$$l(t,\Theta,\varepsilon) = |\varepsilon|^2,\quad l(t,\Theta,\varepsilon) = 1/2(\varepsilon^T\Lambda_\Theta^{-1}\varepsilon) +$$
$$+1/2(\log\det\Lambda_\Theta)$$

(h(Q)=Q) или $l(t,\Theta,\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon^T,\quad (h(Q) = \det Q)$. (7)

Эти критерии квадратичны по ε. В реальных применениях чаще всего используется $l(t,\Theta,\varepsilon)$, которое возрастает более медленно, чем квадратично по ε, т.е. следует принять

$$l(t,\Theta,\varepsilon) = \alpha(|\varepsilon|^2), \qquad (8)$$

где $\alpha(t)$ – возрастающая функция такая, что $\alpha(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$. Это делает критерий робастным против плохих измерений и соответствует предположениям, что вероятность выбросов выше, чем при распределении Гаусса.

Для функции $l(t,\Theta,\varepsilon)$ нужно ввести некоторые соотношения, необходимые для доказательства сходимости оценок и состоятельности метода параметрической идентификации, включающие распределения ошибок предсказания.

Приведем два условия на критериальную функцию $h(\cdot)$.

C2: Функция $h(\cdot)$ непрерывна, и если A и B симметричные, положительно-полуопределенные матрицы, то $h(A) \succ h(B) \Leftrightarrow trA \succ trB$.

C3: Функция $h(\cdot)$ непрерывна и $trA \succ 0 \Rightarrow h(\Lambda + A) \succ h(\Lambda)$ для некоторой строго положительно-определенной матрицы Λ.

Условие C2 более сильное, чем C3. Функция $h(A) = trA$ удовлетворяет и C2, и C3, тогда как $h(A) = \det A$ удовлетворяет C3, но не C2.

Определим функцию $h(\cdot)$ в критерии

$$\begin{aligned} &V_N(\Theta; y^N, u^{N-1}) = h(Q_N(\Theta; y^N, u^{N-1})), \\ &Q_N(\Theta; y^N, u^{N-1}) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} l(t, \Theta, \varepsilon(t, \Theta)), \\ &y(t) - g_M(\Theta; t, y^{t-1}, u^{t-1}) = \varepsilon(t, \Theta). \end{aligned} \tag{9}$$

Результат (6) означает, что матрица

$$Q_N(\Theta; y^N, u^{N-1})$$

становится произвольно близко, равномерно в $\Theta \in D_M$ к её ожидаемой величине. Предположим, что предел

$$\overline{Q}(\Theta) = \lim_{N\to\infty} EQ_N(\Theta; y^N, u^{N-1}) \tag{10}$$

существует. Сходимость в (10) равномерная по Θ. Так как функция $h(\cdot)$ в критерии (9) – непрерывная, то

$$V_N(\Theta; y^N, u^{N-1}) \to h(\overline{Q}(\Theta)) \tag{11}$$

равномерно в $\Theta \in D_M$ с вероятностью 1 при $N \to \infty$ (11).

Пусть набор величин Θ, который минимизирует $h(\overline{Q}(\Theta))$, обозначен

$$D_I(S, M, K, X) = \left\{\Theta \middle| \Theta \in D_M; h(\overline{Q}(\Theta)) \le \min_{\phi \in D_M} h(\overline{Q}(\phi))\right\}. \tag{12}$$

Более того, так как оценка $\hat{\Theta}_N$ минимизирует V_N, из (11) следует, что $\hat{\Theta}_N \to D_I(S, M, K, X)$ с вероятностью 1 при $N \to \infty$ (13). Для получения результатов, действительных для случая параметров, изменяющихся во времени, и адаптивного регулирования, требуется определенный априорный анализ механизма адаптации для подтверждения (10). Введем функции

$$U^S(\Theta) = \lim_{N\to\infty} \sup h(EQ_N(\Theta; y^N, u^{N-1})), \tag{13}$$

$$U^I(\Theta) = \lim_{N\to\infty} \inf h(EQ_N(\Theta; y^N, u^{N-1})). \tag{14}$$

Общее определение набора D_I, которое было определено (12) в предположении (10), представляет

$$D_I(S, M, K, X) = \left\{\Theta \middle| \Theta \in D_M; U^I(\Theta) \le \min_{\phi \in D_M} U^S(\phi)\right\}. \tag{15}$$

При выполнении условия (6) доказываем, что (13) выполняется.

Если $l(t, \Theta, \varepsilon)$ – скаляр (и $h(\cdot)$ – возрастающая), могут быть сделаны некоторые упрощения. Предположим, что $l(t, \Theta, \varepsilon)$ – скаляр и

$$\begin{aligned} &E|\varepsilon(t, \Theta_1|^2 \succ E|\varepsilon(t, \Theta_2)|^2 \Rightarrow El(t; \Theta_1, \varepsilon(t, \Theta_1)) \succ \\ &\succ El(t; \Theta_2, \varepsilon(t, \Theta_2)). \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что (16) – условие как на функцию $l(t, \Theta, \varepsilon)$, так и на свойства истинной системы. Например, если $l(t, \Theta; \varepsilon)$ принадлежит общему критерию типа следа (8), то (16) выполняется, когда распределение $\varepsilon(t, \Theta)$ – гауссовское, но не необходимо для общих распределений, так как $\alpha(\cdot)$ может не быть выпуклой. Если (16) и S1 выполняются, то минимизация $h(Q_N(\Theta; y^N, u^{N-1}))$ есть то же самое, что минимизация

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} E|\varepsilon(t, \Theta)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} E|v(t)|^2 + \\ &+ \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} E|\hat{y}_S(t) - \hat{y}_M(t|\Theta)|^2. \end{aligned} \tag{17}$$

В (17) только последний член зависит от Θ.

Определим

$$W^S(\Theta) = \lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} E|\hat{y}_S(t) - \hat{y}_M(t|\Theta)|^2,$$

$$W^I(\Theta) = \lim_{N\to\infty} \inf \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} E|\hat{y}_S(t) - \hat{y}_M(t|\Theta)|^2,$$

$$D'_I(S, M, X) = \left\{\Theta \middle| \Theta \in D_M; W^I(\Theta) \le \min_{\phi \in D_M} W^S(\phi)\right\}. \tag{18}$$

Следовательно, при выполнении условий (6), а также условия S1 и (16), оценка $\hat{\Theta}_N$ ведет к набору $D'_I(S, M, X)$ с вероятностью 1 при $N \to \infty$.

Опишем вид приближенного M-фильтра и его ковариационной матрицы. Оценим состояние $x(n)$ линейной динамической модели, описываемой уравнением состояния

$$x(n+1) = \Phi(n+1, n)x(n) + u(n), \tag{19}$$

где $\Phi(n+1, n)$ – матрица перехода между состояниями размерности $m \times m$; $u(n)$ – m-мерный вектор шума с ковариационной матрицей Q_n. Результаты наблюдений $Z(n)$ оцениваемой функции представляются так:

$$Z(n) = Hx(n) + v(n), \tag{20}$$

здесь H — матрица констант, размерности m и v(n) - погрешность наблюдений. По аналогии с происхождением метода фильтрации, основанного на методе наименьших квадратов, минимизируется выражение

$$\sum_{i=1}^{N} l((Z(i)-Hx(i))/s_i)+u^T(i)Q_i^{-1}u(i)/2 \qquad (21)$$

при ограничениях вида

$$x(i+1)-\Phi x(i)-u(i)=0;\ i=\overline{1,n-1}. \qquad (22)$$

Минимизация (21) дает систему уравнений, описывающих приближенные фильтры:

$$\begin{gathered}\hat{x}(n+1/n+1)=\hat{x}(n+1/n)+\\ +P_{n+1}H^T l'\left(\frac{Z(n+1)-H\hat{x}(n+1/n)}{s_{n+1}}\right)s_{n+1};\\ \hat{x}(n+1/n)=\Phi\hat{x}(n).\end{gathered} \qquad (23)$$

Приближенная матрица ковариаций $\hat{x}(n+1/n+1)$ задается формулой

$$\begin{gathered}P_{n+1}^{-1}=P_{n+1/n}^{-1}+H^TH\times\\ \times l''((Z(n+1)-H\hat{x}(n+1/n))/s_{n+1})/s_{n+1}^2;\\ P_{n+1/n}=\Phi P_n\Phi^T+Q_n,\end{gathered} \qquad (24)$$

$$l'(x)=\begin{cases}x, & |x|\le k\hat{\sigma},\\ 0, & |x|\ge k\hat{\sigma}.\end{cases} \qquad (25)$$

Следовательно, результаты наблюдений обрабатываются, если остаточные разности находятся в пределах $\pm k\hat{\sigma}$, где $\hat{\sigma}$ — оценка стандартного отклонения наблюдаемого шума, $1\le k\le 1{,}8$; s — мера рассеяния остаточных разностей. Рекомендуется оценка вида $\hat{\sigma}=MAD/0{,}7$ [3,4]. Здесь MAD — медиана множества $\{|\varepsilon(t)-\tilde{\varepsilon}|\}$, где $\tilde{\varepsilon}$ — медиана $\{\varepsilon(t)\}$. Для увеличения точости матрицы P_{n+1} предлагается представлять в факторизованном виде согласно методу, предложенному в [5]. Теперь можно улучшать результаты помехоустойчивой фильтрации, используя разные виды функции l' и другие концепции, применяемые в задачах помехоустойчивого оценивания параметров регрессии.

Литература: 1. *Ljung L.* On consistency and identiability // Mathematical Programming Study, 1976. N 5. P. 169-190. 2. *Ljung L.* Consistency of the least-squares identification method// IEEE Trans. Automatic Control, 1976. V. AC-21. P. 779-781. 3. *Holland P.* W., *Welsch R. E.* Robust regression using interactively reweghted least squares // Commun. Statist.,1977. V.A6. P. 813-828. 4. *Polyak B. T., Tsypkin Ya. Z.* Robust identification// Automatica. 1980. Vol. 16. P. 53-63.5.*Грицюк В. И.* Рекуррентный алгоритм идентификации модели, основанный на ортогональном разложении // Радиоэлектроника и информатика, 1999. №3. С.46-48.

Поступила в редколлегию 21.11.2001

Рецензент: д-р техн.наук, проф. Шабанов-Кушнаренко С.Ю.

Грицюк Вера Ильинична, канд. техн. наук, докторант ХНУРЭ. Научные интересы: стохастические системы управления. Хобби: музыка, литература. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

УДК 621.338.27:537.221

РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАДАНОГО РОЗПОДІЛЕННЯ ТЕПЛОВОЇ ДІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМИ СТРІЧКОВИХ ЕЛЕКТРОННИХ ПРОМЕНІВ

ВАЩЕНКО В.А., КАНАШЕВИЧ Г.В., ДРОБОТ І.В., БОНДАРЕНКО М.О.

Описується постановка задачі реалізації заданого розподілу по поверхні виробу теплового впливу за допомогою сукупності нерухомих, дискретно розташованих уздовж зазначеної поверхні джерел теплового впливу гаусівського типу (одиничних стрічкових електронних променів) різної інтенсивності впливу і коефіцієнта зосередженості. Наводиться опис програм реалізації задачі та аналіз отриманих результатів.

В різних технологічних процесах обробки матеріалів рухомими джерелами теплової дії виникає задача визначення параметрів закону руху джерела, при яких забезпечується розподілена квазістаціонарна дія $F_{пов}(x)$ [1—3]. Вона відома як задача реалізації заданого розподіленого керування за допомогою рухомого джерела дії, або просто — задача реалізації [3, 4]. При її вирішенні неодмінно постає питання щодо формального уявлення джерела рухомої дії. Повний математичний опис різного роду рухомих джерел можна знайти в працях [1, 5].

В практичних задачах реалізації [3] в основному використовується уявлення рухомих джерел у такому вигляді (одновимірний випадок):

$$F(x,t)=u(t)\cdot\psi[x-s(t),k(t)], \qquad (1)$$

де F(x,t) — функція, що описує дію рухомого джерела (керування); x — координата у напрямку руху джерела; t — час; u(t) — інтенсивність дії; y — нормована функція, що описує форму джерела; s(t),k(t) — відповідно, закон переміщення центра дії і закон зміни його форми (коефіцієнт зосередженості).

Прийнята на теперішній час математична постановка задачі реалізації зводиться до такого [3,4].

Необхідно знайти параметри u(t), s(t), k(t) джерела заданої форми, яке рухається по об‘єкту, із інтегрального рівняння:

$$F_{пов}(x)=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u(t)\cdot\psi[x-s(t),k(t)]dt \qquad (2)$$

при наявності визначених обмежень на указані параметри (T—час обробки, тобто період при багатоцикловому русі джерела).