УДК 519.6 : 681.5 : 66 : 012—52

В. И. САЕНКО

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОМЕРНЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Для идентификации квазистационарных непрерывных стохастических объектов широко используют полиномиальную регрессию. Однако повышение адекватности такой модели связано с повышением степени полинома, а значит, с усложнением реализации управления.

Мы предлагаем использовать кусочно-многочленные функции вместо полиномов, позволяющие повышать степень адекватности модели без усложнения структуры модели на отдельных сегментах. В качестве таких функций хорошо зарекомендовали себя сплайн-функции [1, 2].

Аппарат сплайн-функций изучен в вычислительной математике достаточно хорошо. Однако большинство публикаций посвящено одномерным и двумерным функциям. Для построения моделей реальных технологических процессов интерес представляют многомерные модели.

Будем рассматривать многомерные сплайны первой степени на регулярной сетке в $C[a, b]\times[c, d]\times\ldots\times[q, l]$. Регулярной является сетка, образующая в μ-мерном пространстве μ-мерные параллелепипеды. Вершины в каждом параллелепипеде называются узлами. Образование параллелепипедов обусловлено разбиением пространства Ω по каждой переменной x_i на сетке Δ_{x_i}, т. е. $\Omega=\Delta_{x_1}\times\Delta_{x_2}\times\ldots\times\Delta_{x_\mu}$ —декартово произведение.

Согласно [2], если $S(x_i)$ есть сплайн одной переменной и $\Delta x_i : x_{i0} < x_{i1} < \ldots < x_{iN_i}$ сетка по x_i, то для $S(\vec{x})$ справедливо $S(\vec{x}) = S(x_1)\otimes S(x_2)\otimes\ldots\otimes S(x_\mu)$ (1), где μ — размерность пространства; $\otimes$ — знак тензорного произведения.

В случае сплайна первой степени для (1) на любом из $\Omega_{ij\ldots l} = [x_{1i}, x_{1,i+1}] \times [x_{2j}, x_{2\,j+1}]\ldots$ однозначно определена функция

$$S(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{\mu} b_i x_i + \sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{\mu-1} \sum_{j=2}^{\mu} b_{ij} x_i x_j + \ldots + \underbrace{\sum_{l}^{\mu+1-p} \sum_{j}^{\mu+2-p} \cdots \sum_{l}^{\mu}}_{i<j<\ldots<l} \times$$

$$\times\, b_{ij\ldots l}\, x_i\, x_j\, x_l. \qquad (2)$$

Для анализа поверхности, описываемой сплайном, недостаточно знать значения этой функции в каждой точке пространства. Необходимо определять все коэффициенты (2). Это представление более удобно при изучении свойств объекта.

Формулы определения коэффициентов $\vec{B}$ из (2) для любой заданной размерности μ можно вывести, рассматривая представления сплайна от одной, двух, трех μ-переменных.

В общей формуле должны быть представлены записи членов b_0, b_γ, $b_{\gamma\omega\ldots\mu}$, на области $\Omega_{i,j\ldots l}$.

Опираясь на результаты [1, 2] для одномерных и двумерных сплайнов, можно записать:

а) для одномерного случая:

$S = b_0 + b_1 x_1$, $b_0 = 1/h_{1i}(x_{1\ +1} - f_i - x_{1i}\, f_{i+1})$, $b_1 = 1/h_{1i}(f_{i+1} - f_i) = (-1)/h_{1i}(f_i - f_{i+1})$, где f_i — значение функции в узле x ;

б) для двумерного случая:

$$S = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2,\quad b_0 = 1/h_{2j} h_{1i}\,(x_{1,i+1}\, x_{2,j+1}\, f_{ij} -$$
$$- x_{1i}\, x_{2j+1}\, f_{i+1,j} - x_{1,i+1}\, x_{2j}\, f_{ij+1} + x_{1i}\, x_{2j}\, f_{i+1,\,j+1}),\ b_1 = (-1)/h_{1i}h_{2j} \times$$
$$\times\,(x_{2j+1}\, f_{ij} - x_{2j+1}\, f_{i+1j} - x_{2j}\, f_{ij+1} + x_{2j}\, f_{i+1,\,j+1}),\ b_2 = (-1)/h_{1i}h_{2j} \times$$
$$\times\,(x_{1,i+1}\, f_{ij} - x_{1\,i+1}\, j_{ij+1} - x_{1i} f_{i+1,j} + x_{1i}\, f_{i+1,j+1}),$$
$$b_{12} = (-1)^2/h_{1i}\, h_{1j}\,(f_{ij} - f_{i+1,j} - f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}).$$

Рассматривая аналогично случаи для трех и четырех переменных (которые из-за громоздкости опущены), можно обобщить формулы для размерности, равной μ.

Введем ряд обозначений. Ввиду того, что формулы рассматриваются на области $\Omega_{i,\,j\ldots l}$, индексы принимают только два значения p и $p+1$. Элемент f имеет для размерности μ ровно μ индексов $i, j\ldots l$. Если индекс равен p, будем его опускать, а если индекс равен $p+1$, для элемента f пишем новый индекс места p, т. е. для $f_{ij+1k\ldots l} = f_{(2)}$. У членов вида $[x_{1i}\, x_{2j} \ldots x_{\mu l}]$, наоборот, индекс опущен, если он равен $p+1$, и пишем новый, соответствующий номеру фактора, если индекс равен p. т. е.

Тогда

$$[x_{1i}\, x_{2j}\, x_{3k+1}\, x_{4s+1} \dots x_{\mu i+1}] = [x_1\, x_2\, x_3 \dots x_\mu]_{(1,2)} \tag{3}$$

$$x_{1l}\, x_{2j+1}\, x_{3k}\, x_{4s+1}\, x_{5p} \dots x_{\mu 1}\, f_{l+1,j,k+1,s,p+1\dots\mu+1} = ([x_1\, x_2 \dots x_\mu]\, f)_{(1,3,5,6\dots\mu)}. \tag{4}$$

Для элементов аналогичных (4) при условии, что $x_m = x_n = x_t = 1$ введем верхний индекс:

$$x_{2j+1}\, x_{3k}\, x_{5p} \dots x_{\mu l}\, f_{l+1j,k+1,s,p+1,\dots,\mu+1} = ([x_1\, x_2 \dots x_\mu] f)^{(1,4)}_{(1,3,5,6\dots\mu)}.$$

С учетом принятых обозначений формула для b_0 запишется так:

$$b_0 = (-1)^0/h_{1l}\, h_{2j}\, h_{3k} \dots h_{\mu l}\, (([x_1\, x_2 \dots x_\mu] f)_{(0)} + \sum_{l_1=1}^{\mu} (-1)\, ([x_1\, x_2 \dots$$

$$\dots x_\mu] f)_{(l_1)} + \sum_{l_1=1}^{\mu-1} \sum_{l_2=2}^{\mu} (-1)^2\, ([x_1\, x_2 \dots x_\mu] f)_{(l_2)} + \dots \sum_{l_1=1}^{\mu+1-p} \sum_{l_2=1}^{\mu+2-p} \dots \tag{5}$$

$$\dots \sum_{l_p=p}^{\mu} (-1)^p\, ([x_1\, x_2 \dots x_\mu] f)_{(l_1 l_2 \dots l_p)} + \dots + (-1)^\mu\, ([x_1 x_2 \dots x_\mu] \times$$

$$\times f)_{(l_1 l_2 \dots l_\mu)} = (-1)^0/HX_0^T AF,$$

где A — диагональная матрица $r \times r$ ($r = 2^\mu$ с элементами (± 1)); X — вектор размерности r с элементами $[x_1,\ x_2,\ x_3 \dots\ x_\mu]$; F — вектор размерности r с элементами $f_{ij\dots l}$.

Для $b_{\gamma}, \gamma = 1, \mu$ формула запишется в виде

$$b_\gamma = (-1)^1/h_{1l}\, h_{2j} \dots h_{\mu l}\, (([x_1 x_2 \dots x_\mu] f)^\gamma_0 + \sum_{l_1=1}^{\mu} (-1)([x_1 x_2 \dots x_\mu] f)^\gamma_{l_1} +$$

$$+ \sum_{l_1=1}^{\mu-1} \sum_{l_2=2}^{\mu} (-1)^2([x_1 x_2 \dots x_\mu] f)^\gamma_{l_2} + \dots + (-1)^\mu([x_1 x_2 \dots x_\mu] f)^\gamma_{(l_1 l_2 \dots l_\mu)} = \tag{6}$$

$$= (-1)\,(b_0)^\gamma = (-1)/HX_\gamma^T AF.$$

Аналогично можно записать формулы для $b_{\gamma\omega}, \dots,$ $b_{\gamma\omega\dots\mu}$:

$$b_{\gamma\omega} = (-1)^2/HX^T_{\gamma\omega} AF, \tag{7}$$

$$b_{\gamma\omega\nu} = (-1)^3/HX^T_{\gamma\omega\nu} AF \tag{8}$$

. . . .

$$b_{\gamma\omega.\mu} = (-1)^\mu/HAF. \tag{9}$$

Как видно из (6) — (9), матрица $X^T_{\gamma\omega\nu...\eta}$ получается из матрицы X_0^T путем замены в каждом элементе $[x_1 x_2 x_3 ... x_\mu]$, $x_\gamma = x_\omega = x_\nu = ... = 1$. Таким образом, численный алгоритм построения сплайна первой степени в форме (2) по регулярной сетке сводится к следующему: задаемся размерностью μ; выбираем подобласть $\Omega_{ijk...l}$; формируем вектор F размерностью r с элементами согласно (5); формируем диагональную матрицу $A[r \times r]$ с элементами $(-1)^{l_i}$ согласно (5); формируем вектор X_0^T с элементами $[x_1, x_2, x_3 ... x_\mu]$ согласно (5); вычисляем по формуле (5) коэффициент b_0; формируем вектор X_1^T путем замены в каждом элементе вектора X_0^T $x_1 = 1$; вычисляем по формуле (6) b_1; аналогично b_1 производим для b_i, $i = \overline{2, \mu}$; формируем вектор X_{12}^T путем замены в векторе X_0^T $x_1 = x_2 = 1$; вычисляем по формуле (7) b_{12}; аналогично $b_{1,2}$ делаем для b_{ij}, $i < j$, $i = \overline{1, \mu - 1}$, $j = \overline{2, \mu}$; аналогично b_{ij} делаем для b_{ijk}; вычисляем $b_{\gamma\omega...\mu}$ по формуле (9).

Выделим два случая, когда преимущество применения сплайна первой степени очевидно. Первый, если решается задача описания объекта моделью в широком диапазоне изменения значений факторов, когда информация об объекте поступает последовательно и ограничений на количество экспериментов нет. Здесь удобно реализовывать последовательное расширение области экспериментирования с регулируемым шагом дискретности разбиения сетки, достраивая μ-мерный параллелепипед в различных направлениях другими μ-мерными параллелепипедами.

Второй случай, если необходимо построить модель управления при условии, что управление производится в пределах μ-мерного параллелепипеда и структура модели в нем может быть адекватна представлена полиномом не выше второй степени.

Отметим, что большинство публикуемых работ ориентировано на использование сплайнов на сетках с количеством узлов >10. При решении задачи идентификации, наоборот, необходимо стремиться к уменьшению количества узлов из-за сложности интерпретируемости модели, так как для построения сплайна используется полный перебор всех сочетаний узлов, т. е. при равномерном разбиении по каждой из переменных проводится N^μ опытов. При неравномерном разбиении — $N_1 \times N_2 \times ... \times N_\mu$ опытов.

Рассмотрим численные примеры для сплайнов (2) от трех переменных при количестве узлов по каждому фактору, равному двум и трем.

А. Дана сетка $\Omega = \Delta x_1 \times \Delta x_2 \times \Delta x_3$, $\Delta x_i = [-1, 1]$. Это наиболее часто используемое в вычислительной математике пространство $C[-1, 1] \times [-1, 1[\times [-1, 1]$. Для вывода формул используем табл. 1, где элементы c_i есть $1/HAF$ и значение b_i полу-

	f_{ijk}	f_{i+1jk}	f_{ij+1k}	f_{ijk+1}
b_0	$x_{1i+1}x_{2j+1}x_{3k+1}$	$x_{1i}x_{2j+1}x_{3k+1}$	$x_{1i+1}x_{2j}x_{3k+1}$	$x_{1i+1}x_{2j+1}x_{3k}$
$-b_1$	$x_{2j+1}x_{3k+1}$	$x_{2j+1}x_{3k+1}$	$x_{2j}x_{3k+1}$	$x_{2j+1}x_{3k}$
$-b_2$	$x_{1i+1}x_{3k+1}$	$x_{1i}x_{3k+1}$	$x_{1i+1}x_{3k+1}$	$x_{1i+1}x_{3k}$
$-b_3$	$x_{1i+1}x_{2j+1}$	$x_{1i}x_{2j+1}$	$x_{1i+1}x_{2j}$	$x_{1i+1}x_{2j+1}$
b_{12}	x_{3k+1}	x_{3k+1}	x_{3k+1}	x_{3k}
b_{13}	x_{2j+1}	x_{2j+1}	x_{2j}	x_{2j+1}
b_{23}	x_{1i+1}	x_{1i}	x_{1i+1}	x_{1i+1}
$-b_{123}$	1	1	1	1

чается путем умножения c_i на элемент $x_i x_j \ldots x_\mu$ на пересечении строки и столбца. Все элементы в таблице равны ± 1 (табл. 2).

Таблица 2

Коэффициенты сплайна	Элементы матрицы $(1/H\ DF)$							
	c_1	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	c_5	c_6	c_7	$-c_8$
b_0	1	−1	−1	−1	1	1	1	−1
$-b_1$	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
$-b_2$	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
$-b_3$	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
b_{12}	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1
b_{13}	1	1	−1	1	−1	1	−1	−1
b_{23}	1	−1	1	1	−1	−1	1	−1
$-b_{123}$	1	1	1	1	1	1	1	1

Учитывая, что они образуют полный перебор по отношению к факторам, т. е. 2^3 опытов, налицо широко известная матрица ПФЭ. Коэффициенты $\vec{B}$ находятся аналогично применению МНК для ПФЭ. Таким образом, ПФЭ есть частный случай сплайна первой степени на регулярной сетке.

Таблица 1

$f_{i+1j+1k}$	$f_{i+1jk+1}$	$f_{ij+1k+1}$	$f_{i+1j+1k+1}$
$x_{1i}x_{2j}x_{3k+1}$	$x_{1i}x_{2j+1}x_{3k}$	$x_{1i+1}x_{2j}x_{3k}$	$x_{1i}x_{2j}x_{3k}$
$x_{2j}x_{3k+1}$	[illegible] $+1\, x_{3k}$	$x_{2j}x_{3k}$	$x_{2j}x_{3k}$
$x_{1i}x_{3k+1}$	$x_{1i}x_{3k}$	$x_{1i+1}x_{3k}$	$x_{1i}x_{3k}$
$x_{1i}x_{2j}$	$x_{1i}x_{2j+1}$	$x_{1i+1}x_{2j}$	$x_{1i}x_{2j}$
x_{3k+1}	x_{3k}	x_{3k}	x_{3k}
x_{2j}	x_{2j+1}	x_{2j}	x_{2j}
x_{1i}	x_{1i}	x_{1i+1}	x_{1i}
1	1	1	1

Б. Дана сетка $\Omega = \Delta x_1 \times \Delta x_2 \times \Delta x_3$ $\Delta x_1 = [-1, 0, 1]$, $\Delta x_2 = [-1, 0, 1]$, $\Delta x_3 = [-1, 0, 1]$. Сплайн рассматриваем на восьми параллелепипедах: $\Omega_{111} = [-1{,}0] \times [-1{,}0] \times [-1{,}0]$, $\Omega_{112} =$

$= [-1, 0] \times [-1, 0] \times [1, 0]$, $\Omega_{121} = [-1, 0] \times [0, 1] \times [-1, 0]$, $\Omega_{122} =$

$= [-1, 0] \times [0, 1] \times [0, 1]$, $\Omega_{211} = [0, 1] \times [-1, 0] \times [-1, 0]$, $\Omega_{212} =$

$= [0, 1] \times [-1, 0] \times [0, 1]$, $\Omega_{221} = [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 0]$, $\Omega_{222} =$

$= [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Коэффициент b_0^{ijk} равен значению функции в узле $(x_1, x_2, x_3) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ для каждой из Ω_{ijk} это значение единственно (т. е. одна клеточка в табл. 1). Коэффициент b_γ^{ijk} равен разности значений функции в узле $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ и узле $(0, \pm 1, \pm)$. Коэффициент $b_{\gamma\omega}$ равен разности четырех значений функции в узлах $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$; $(0, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, \pm 1)$, $(0, 0, \pm 1)$.

Формула для b_ω остается одинаковой для всех сегментов.

Значения коэффициентов $\vec{B}$ сведены в табл. 3 для области Ω_{111}. Для остальных областей сумма единиц в строках не меняется, меняется только столбец.

Таблица 3

Коэффициенты сплайна	Элементы матрицы $(1/H\ DF)$							
	c_1	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	c_5	c_6	c_7	$-c_8$
b_0	0	0	0	0	0	0	0	−1
$-b_1$	0	0	0	0	0	0	1	1
$-b_2$	0	0	0	0	0	1	0	1
$-b_3$	0	0	0	0	1	0	0	1
b_{12}	0	0	0	−1	0	−1	−1	−1
b_{13}	0	0	−1	0	−1	0	−1	−1
b_{23}	0	−1	0	0	−1	−1	0	−1
$-b_{123}$	1	1	1	1	1	1	1	1

В заключение отметим, что рассматриваемые в работе [3] сплайны первой степени вычисляются по формуле, требующей формирования матриц блочно-диагональных очень большой размерности при увеличении количества узлов и факторов. Представленный в настоящей работе алгоритм лишен этого недостатка, так как дает представление сплайна на отдельном μ-мерном параллелепипеде. Если поиск необходимого параллелепипеда осуществляется не на каждом шаге вычисления значения сплайна, то этот недостаток не влияет на эффективность использования алгоритма. Численная реализация его проста. Кроме того, рассматриваемое представление сплайна позволяет выявлять структурные изменения моделей в области допустимых значений факторов, что важно при анализе поведения объекта.

Список литературы: 1. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976. — 248 с. 2. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 362 с. 3. *Григорьев Ю. Д.* Оптимальное планирование эксперимента для кусочно-гладких функций отклика.—Зав. лаб., 1980, **46**, № 7, с. 634—637.

Поступила в редколлегию 11.04.82