

СТАТИСТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК С НИЗКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬЮ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИАГРАММ К ФЛУКТУАЦИЯМ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИСТОЧНИКОВ

Попытка синтезировать нереализуемые диаграммы направленности (ДН) приводит, как правило, к диаграммам очень чувствительным к малым возмущениям полученного оптимального распределения источников. На практике это означает, что при реализации найденных амплитудно-фазовых распределений (АФР), из-за всегда присутствующих в антенне флуктуаций источников, получаемые реально ДН (т.е. отдельные реализации ДН) могут значительно отличаться от синтезированной, а, следовательно, и от заданной ДН. В качестве меры чувствительности удобно взять дисперсию диаграммы по полю, ибо её значение как раз и оценивает степень разброса отдельных реализаций относительно средней ДН. Существующие методы синтеза антенных решеток (АР) по заданной ДН не позволяют в процессе решения гарантировать малую или заданную степень чувствительности получаемого решения. В данной работе рассмотрена в статистической постановке задача синтеза АР по критерию минимума квадратичного отклонения средней ДН по полю от заданной при условии, что дисперсия её не должна превышать заданного уровня.

Диаграмма направленности антенной решетки, состоящей из N одинаково ориентированных излучателей, с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$F(\mathbf{i}, \vec{u}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i},$$

где $\mathbf{A} = \|a_m\|$ – матрица-столбец с элементами $a_m = q_m(\vec{u}) \exp(jk\vec{r}_m \vec{u})$, $m = \overline{1, N}$; $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$ – вектор комплексных токов возбуждения в пространстве R_N ; $\vec{r}_m$ – вектор положения m -го излучателя, направленный в точку наблюдения; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Будем полагать, что флуктуациям подвержен вектор комплексных токов $\mathbf{i}^{(\xi)} = (i_1(1 + \xi_1), \dots, i_N(1 + \xi_N))$, причем случайные величины ξ_n центрированы с корреляционной матрицей $\mathbf{D}(\xi) = M(\xi \cdot \xi^*) = \sigma_\Sigma^2 \|\omega_{nm}\|_1^N$. Здесь ξ – матрица-строка случайных величин ξ_n ; $\sigma_\Sigma^2 = \max_n M|\xi_n|^2$ – максимальная суммарная дисперсия; M – знак математического ожидания;

* – знак сопряжения матрицы.

Усредненная по всем направлениям в пространстве дисперсия диаграммы направленности определяется следующим выражением [1]:

$$\sigma_F^2 = \frac{1}{4\pi} M \int_{\Omega} |F(\mathbf{i}^{(\xi)}, \vec{u})|^2 d\Omega - \int_{\Omega} |F(M\mathbf{i}, \vec{u})|^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла.

Рассмотрим следующую задачу. Синтезировать такую диаграмму антенной решетки $F(\vec{u})$, чтобы дисперсия ДН σ_F^2 была минимальной, а точность аппроксимации заданной диаграммы $F_0(\vec{u})$ синтезируемой, определяемая метрикой пространства L_Ω^2 , не превышала бы определенного уровня ε_0 . Таким образом, задача синтеза АР может быть сформулирована как задача на условный экстремум:

$$\min_{i \in I_0} \rightarrow \sigma_F^2, I_0 \left(M\mathbf{i} : \|MF - F_0\|_\circ^2 \leq \varepsilon_0 \right),$$

где $\|F\|_\circ^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} |F(\vec{u})|^2 d\Omega$ – норма в пространстве L_Ω^2 .

Поставленная задача эквивалентна задаче минимизации невязки $\varepsilon = \|MF - F_0\|_0^2$ при условии, что дисперсия ДН не превышает фиксированного уровня δ_0 . Чтобы исключить возможность выхода синтезированной диаграммы из класса оптимальных за счет последующей её нормировки, рационально включить в невязку нормирующий множитель при синтезируемой диаграмме. Если оптимальный нормирующий множитель найти из критерия минимума невязки [2], то ε примет вид

$$\varepsilon = \|F_0\|_0^2 - |(A \cdot Mi, F_0)|^2 / \|A \cdot Mi\|_0^2. \quad (1)$$

Из правой части этого равенства видно, что величина невязки определяется токами решетки с точностью до постоянного множителя. Поэтому и уровень дисперсии ДН целесообразно определить в относительных единицах, например, в единицах мощности средней диаграммы по полю. При таком подходе ограничение на дисперсию диаграммы σ_F^2 запишется в виде

$$\sigma_F^2 / \|A \cdot Mi\|_0^2 \leq \delta_0. \quad (2)$$

Если решать задачу минимизации (1) при условии (2), то в (2) знак строгого неравенства нужно исключить, так как в противном случае решается задача на безусловный экстремум, что противоречит первоначальной постановке. Предварительно задачу на условный экстремум перепишем в матричном виде:

$$\varepsilon = \|F_0\|_0^2 - \left| (i, A_0^* F_0) \right|^2 / (Hi, i) \rightarrow \min, \quad I_0 \left(i : \left(\sigma_\Sigma^2 \tilde{H}i, i \right) / (Hi, i) = \delta_0 \right),$$

$i \in I_0$

где $H = \|h_{nm}\|_1^N = 1/4\pi \int_{\Omega} A A^* d\Omega$ – нормированная матрица взаимных сопротивлений; $A_0^* F_0$ – вектор в R_N с компонентами $(1/4\pi) \int_{\Omega} \tilde{q}(\tilde{u}) \exp(-jk\tilde{r}_m \tilde{u}) F_0(\tilde{u}) d\Omega$, $m = \overline{1, N}$, который получается как результат отображения заданной диаграммы направленности в сопряженное пространство; $(\circ, \circ)$ – скалярное произведение в R_N ; $\tilde{H} = \|\omega_{nm} h_{nm}\|_1^N$ – положительно определенная матрица.

Рассматривая введенную относительную дисперсию как отношение двух эрмитово положительных форм, заключаем, что δ_0 должно находиться в интервале, образованном минимальным и максимальным значениями пучка $(\tilde{H}i, i) - \lambda(Hi, i)$. Меняя корреляционные связи в токах АР, можно менять интервал изменения допустимых значений дисперсии. Так, когда отсутствуют корреляционные связи ($\omega_{nm} = 0$, $n \neq m$) и случайные величины ξ_n имеют одинаковую дисперсию, относительная дисперсия находится в интервале $[\sigma_\Sigma^2 / \lambda_{\min}, \sigma_\Sigma^2 / \lambda_{\max}]$, где $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ – соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы H . При усилении корреляционных связей происходит сужение этого интервала вплоть до его исчезновения при $\omega_{nm} \rightarrow 1$.

Будем считать, что при заданной корреляционной матрице величина δ_0 находится в указанном интервале. В противном случае требование относительно δ_0 либо занижено, либо завышено.

Задачу на условный экстремум (3) решаем вариационным методом с помощью множителя Лагранжа и находим, что оптимальные токи удовлетворяют линейному уравнению

$$(H + \alpha \sigma_\Sigma^2 \tilde{H}) i_\alpha = A_0^* F_0,$$

где множитель α находится из условия принадлежности оптимальных токов множеству I_0 , т.е. находятся из уравнения

$$\sigma_\Sigma^2 (\tilde{H}i_\alpha, i_\alpha) / (Hi_\alpha, i_\alpha) = \delta_0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения сильно упрощается, если рассматривать дисперсию на оптимальных токах как функцию переменной величины $\alpha \geq 0$:

$$\psi(\alpha) = \sigma_{\Sigma}^2 (\tilde{\mathbf{H}} \mathbf{i}_{\alpha}, \mathbf{i}_{\alpha}) / (\mathbf{H} \mathbf{i}_{\alpha}, \mathbf{i}_{\alpha}).$$

Эта функция, как было сказано ранее, ограничена сверху и снизу, а также монотонно убывает с ростом α , что легко доказывается, с использованием идеи, изложенной в [3]. Поэтому, определив пробным путем интервал изоляции корня, можно, например, методом хорд найти корень уравнения (4) с любой степенью точности.

Для оценки чувствительности полученного решения к влиянию флуктуаций в распределении источников введем коэффициент чувствительности (КЧ) синтезированной диаграммы направленности (СДН) как нормированную дисперсию в энергетической метрике

$$\rho = \left(1/\|F_0\|_0^2\right) M \left(\left\| F(\mathbf{i}_{\alpha}, \bar{u}) - F(\mathbf{i}_{\alpha}^*, \bar{u}) \right\|_0^2 \right).$$

Он характеризует степень разброса реализаций оптимальной диаграммы вследствие наличия флуктуаций в токовом режиме антенны. Наиболее просто анализ КЧ можно провести, когда корреляционная матрица $\|\omega_{nm}\|_1^N = \mathbf{I}$ – единичная матрица. Для этого случая имеем

$$\rho = \left(1/\|F_0\|^2\right) \sigma_{\Sigma}^2 (\mathbf{i}_{\alpha}, \mathbf{i}_{\alpha}),$$

где оптимальные токи уже удовлетворяют уравнению

$$(\mathbf{H} + \alpha \sigma_{\Sigma}^2 \mathbf{I}) \mathbf{i}_{\alpha} = A_0^* F_0.$$

Такая запись уравнения относительно оптимальных токов позволяет для получения явного выражения этих токов использовать в качестве ортонормированного базиса собственные векторы $\{\varphi_n\}_1^N$ матрицы $\mathbf{H}$ ($\mathbf{H}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$). Простые преобразования приводят к следующему выражению:

$$\mathbf{i}_{\alpha} = \sum_{n=1}^N \frac{(A_0^* F_0, \varphi_n)}{\lambda_n + \alpha \sigma_{\Sigma}^2} \varphi_n. \quad (5)$$

Полученное спектральное разложение оптимального вектора токов показывает, что для решеток с увеличенным количеством элементов, матрица взаимных сопротивлений которых имеет $\lambda_{\min} \ll 1$ (например, сверхнаправленные АР), с вычислительной стороны статистический подход значительно предпочтительнее детерминированного, так как улучшает обусловленность линейной системы алгебраических уравнений для искомого решения.

Используя соотношение (5), перепишем КЧ в виде

$$\rho = \sigma_{\Sigma}^2 \sum_{n=1}^N \frac{\left| (A_0^* F_0, \varphi_n) / \|F_0\|_0 \right|^2}{(\lambda_n + \alpha \sigma_{\Sigma}^2)^2}.$$

Отсюда видно, что КЧ всегда будет мал при малой суммарной дисперсии – СДН обладает малой чувствительностью к флуктуациям в АФР, если только минимальное собственное значение матрицы сопротивлений не очень мало. Если $\lambda_1 \sim \sigma_{\Sigma}^2$, то основной вклад в КЧ дает проекция вектора $A_0^* F_0$ на минимальный главный вектор и

$$\rho \approx \frac{\left| (A_0^* F_0, \varphi_1) / \|F_0\|_0 \right|^2}{\sigma_{\Sigma}^2 (1 + \alpha)^2}.$$

В этом случае КЧ будет расти обратно пропорционально суммарной дисперсии. Такая ситуация характерна для решеток, взаимные сопротивления которых близки к собственным (решетки с малыми межэлементными расстояниями). Очевидно, что наименее чувствительными диаграммами, полученными при синтезе, будут те, которые соответствуют заданным диаграммам F_0 из класса диаграмм, проектируемых в сопряженном пространстве только на максимальный главный вектор.

Представляет интерес исследование на чувствительность класса реализуемых диаграмм. Нетрудно показать, что (для заданной реализуемой диаграммы) $A_0^* F_0 = Hc$, где c – вектор, компонентами которого являются коэффициенты разложения диаграммы F_0 . Поэтому КЧ для реализуемых диаграмм принимает вид

$$\rho = \frac{\sigma_{\Sigma}^2}{\sum_{m=1}^N \lambda_m |(c, \varphi_m)|^2} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n^2 |(c, \varphi_n)|^2}{(\lambda_n + c \sigma_{\Sigma}^2)^2}$$

Анализ полученного выражения показывает, что даже при самом неудачном выборе коэффициентов реализуемой диаграммы $((c, \varphi_n) = 0, n = \overline{2, N}, \lambda_1 \ll 1)$ коэффициент чувствительности будет ограничен, а в остальных случаях мал при малой суммарной дисперсии σ_{Σ}^2 . Таким образом, реализуемые диаграммы относятся к классу диаграмм, мало чувствительных к флуктуациям в распределении источников.

Список литературы: 1. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн. М.: Сов. Радио, 1970. 2. Дымский В.Н., Чони Ю.И. Об одном приближенном решении задач синтеза антенн, допускающем экспериментальное моделирование // Известия вузов. Радиофизика. 1970. №9. С. 1389-1385. 3. Мартынов М.А., Павлюк В.А., Рыбалко А.М. Максимизация интегральных параметров антенных решеток с подавлением бокового излучения // Радиотехника и электроника. 1977. № 3. С. 609-613.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 14.05.2001