УДК 621.317

И.П. ЗАХАРОВ, канд. техн. наук, ***М.П. СЕРГИЕНКО*** (г. Харьков)

ОЦЕНИВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Описано процедуру оцінювання невизначеності метрологічної ідентифікації динамічних характеристик засобів вимірювальної техніки. Наведено приклади оцінювання невизначеності ідентифікації часових і частотних характеристик для засобів вимірювальної техніки, які моделюються аперіодичними ланками першого та другого порядків при визначенні їхніх постійних часу методом моментів.

A procedure of an estimation of measurement instruments dynamic characteristics identification is described. The examples of an estimation of uncertainty of identification time and frequency characteristics for the measuring instruments are reduced which are modeled by aperiodic units of the first and second order at definition of their time constants by method of the moments.

Постановка проблемы. Задача измерения динамических характеристик (ДХ) средств измерительной техники (СИТ), как и задачи измерения других характеристик (например, градуировочных), относится в метрологии к области совместных измерений, поскольку предполагает одновременное нахождение искомого параметра и времени или частоты для определения зависимости между ними. На практике наиболее часто измеряют временные характеристики (переходную, импульсную), поскольку они определяются за время установления переходного процесса, а, кроме того, наиболее удобны для преобразования в другие полные характеристики, а также для анализа динамических погрешностей [1]. При метрологической идентификации временных ДХ традиционное применение метода наименьших квадратов затруднительно, поскольку исходная система уравнений описывается экспоненциальными и тригонометрическими функциями. Так, при метрологической идентификации переходной характеристики (ПХ) апериодического СИТ, измеренной в N дискретных точках, в общем случае имеем следующую систему уравнений:

$$h(t_i) = 1 + \sum_{j=1}^{m} A_j \exp(t_i / \tau_j), \quad i = 1, 2, ..., N. \qquad (1)$$

Коэффициенты A_j для конкретной модели переходной характеристики выражаются через постоянные времени, значения которых и определяют в процессе идентификации. Это в два раза уменьшает число идентифицируемых параметров, однако увеличивает нелинейность модели. Поэтому для идентификации τ_j применяют специальные методы [2-4].

Анализ литературы. В процессе идентификации возникает необходимость оценивания ее точности. При этом следует решать две задачи [5]:

1) прямая задача – оценивание влияния неопределенности входных данных и применяемых алгоритмов на точность оценок параметров модели ДХ СИТ;

2) обратная задача – исследование влияния неопределенности оценок параметров модели на точность аппроксимации ДХ СИТ. Решение прямой задачи описано в литературе [2-4], поэтому в настоящей статье остановимся на решении обратной задачи. Именно обратная задача дает нам ответ на вопрос, насколько точно произведена идентификация модели для аппроксимации заданной ДХ. При этом мы рассматриваем случай, когда погрешность из-за неадекватности модели отсутствует.

Цель статьи. Рассмотрим процедуру оценивания стандартной и расширенной неопределенности ДХ как функций времени (частоты) для известной модели, имеющей заданную неопределенность ее параметров. Решение этой задачи позволит определить необходимую точность идентификации параметров модели для получения заданной точности аппроксимации ДХ.

При решении этой задачи следует учитывать как нелинейность функции преобразования, так и возможную корреляцию оценок параметров модели передаточной функции, которые получены на основе общих входных данных. Решение этой задачи рассмотрим на примере моделей первого и второго порядков, постоянные времени которых определялись методом моментов.

Модель первого порядка.

<u>Переходная характеристика.</u>

ПХ такого СИТ имеет вид $h(t) = 1 - \exp(-t/\tau)$.

В этом случае коэффициент чувствительности будет равен

$$\frac{\partial h(t)}{\partial \tau} = -\frac{t}{\tau^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

а неопределенность идентификации ПХ в любой точке t будет определяться выражением

$$u[h(t)] = \left| -\frac{t}{\tau^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right| u(\tau) = \frac{t}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tilde{u}(\tau),$$

где $\tilde{u}(\tau) = u(\tau)/\tau$ – относительная неопределенность оценки постоянной времени.

Эта зависимость представлена на рис. 1.

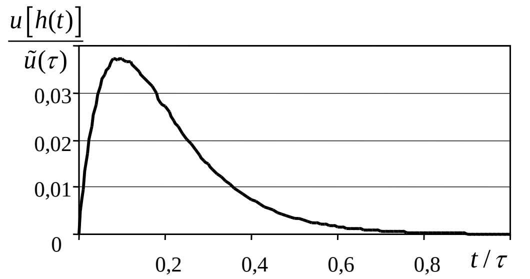


Рисунок 1 – Временная зависимость неопределенности идентификации переходной характеристики

Максимум этой зависимости приходится на время $t = \tau$ и составляет $e^{-1} \cdot \tilde{u}(\tau) =$ 0,368 $\tilde{u}(\tau)$. При оценке расширенной неопределенности необходимо знать закон распределения погрешности идентификации в каждой точке. Этот закон определяется законом распределения постоянной времени и нелинейностью модельной функции, вносящей искажение. В соответствии с методом моментов [2] выражение для оценки постоянной времени имеет вид

$$\tau = \int_0^\infty \left[1 - h(t)\right] dt$$

Это линейная функция, представляющая собой бесконечную сумму значений ПХ. Поэтому независимо от закона распределения шумов в выходном сигнале СИТ закон распределения τ в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятности будет нормальным.

Закон распределения погрешности идентификации будет отличным от нормального за счет нелинейной функции ПХ. Это видно из гистограмм, соответствующих точкам t/τ = 0,1 и 5 для $\tilde{u}(\tau)$ =0,1 (рис. 2). Зависимость эксцесса и асимметрии законов распределения идентификации от времени представлена на рис . 3-а.

Расширенную неопределенность определяли методом Монте-Карло [6]. Зависимость коэффициента охвата времени для разных значений $\tilde{u}(\tau)$ и уровня доверия 0,95 показана на рис. 3-б.

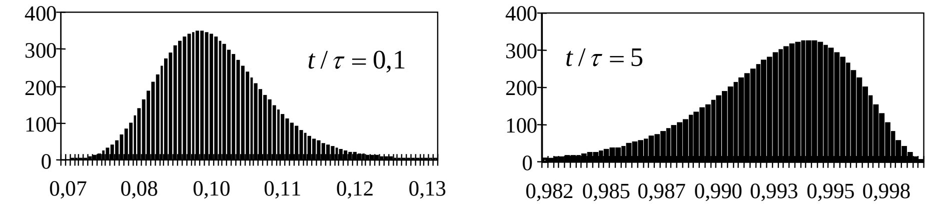
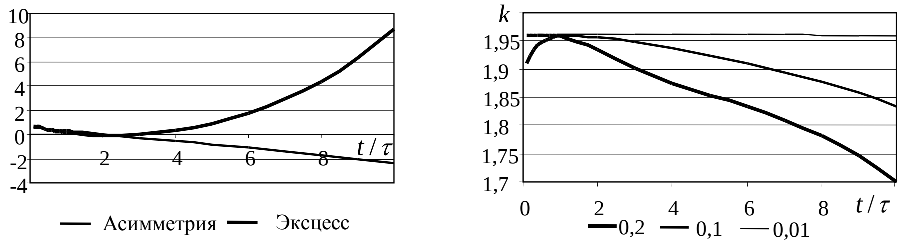


Рисунок 2 – Гистограммы распределения погрешности идентификации для $u(\tau)$ =0,1



а) б)

Рисунок 3 – Временные зависимости
а) асимметрии и эксцесса законов распределения для $\tilde{u}(\tau)$ =0,1;
б) коэффициента охвата для $\tilde{u}(\tau)$ =0,2; 0,1 и 0,01.

Импульсная характеристика (ИХ).

ИХ СИТ первого порядка описывается выражением

$$g(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

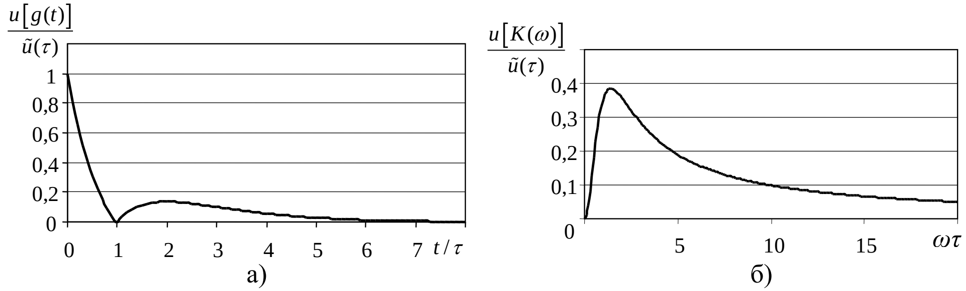
В этом случае коэффициент чувствительности будет равен

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau^2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\frac{t}{\tau} - 1\right),$$

а неопределенность идентификации ИХ в любой точке t будет определяться выражением

$$u\left[g(t)\right] = \left|\frac{1}{\tau^2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\frac{t}{\tau} - 1\right)\right| u(\tau) = \left|\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\frac{t}{\tau} - 1\right)\right| \tilde{u}(\tau) ,$$

Эта зависимость для τ =1 представлена на рис. 4-а. Максимумы этой зависимости приходятся на $t = 0$ и $t = 2\tau$, а нуль на $t = \tau$.



а) б)

Рисунок 4 – Зависимости неопределенности идентификации
а)ИХ от времени; б)АЧХ от частоты.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

АЧХ СИТ первого порядка описывается выражением

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}},$$

где ω - круговая частота.

В этом случае коэффициент чувствительности будет равен

$$\frac{\partial K(\omega)}{\partial \tau} = \frac{-\omega^2\tau}{\sqrt{(1 + \omega^2\tau^2)^3}},$$

а неопределенность идентификации АЧХ в любой точке ω будет определяться выражением

$$u\left[K(\omega)\right] = \frac{\omega^2\tau^2}{\sqrt{(1 + \omega^2\tau^2)^3}}\tilde{u}(\tau) ,$$

Эта зависимость представлена на рис. 4-б.

Максимум этой зависимости приходится на $\omega\tau = \sqrt{2}$ и составляет 0,385.

При исследовании ИХ и АЧХ наблюдаются аналогичное искажение формы закона распределения, что и в случае ПХ, а следовательно и изменение значения коэффициента охвата как функции времени и неопределенности оценки постоянной времени.

Модель второго порядка.

Переходная характеристика.

В качестве примера рассмотрим модель апериодического СИТ второго порядка, параметры которой определены методом моментов [2]. ПХ такого СИТ имеет вид:

$$h(t) = 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right).$$

В этом случае коэффициенты чувствительности будут равны

$$C_{1,2}(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial \tau_{1,2}} = \frac{\tau_{2,1}}{\left(\tau_{1,2} - \tau_{2,1}\right)^2}\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau_{1,2}}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{2,1}}\right)\right) - \frac{t}{\tau_{1,2}\left(\tau_{1,2} - \tau_{2,1}\right)}\exp\left(-\frac{t}{\tau_{1,2}}\right),$$

а неопределенность идентификации переходной характеристики в любой точке t будет определяться общим выражением

$$u[h(t)] = \sqrt{C_1^2(t)u^2(\tau_1) + C_2^2(t)u(\tau_2) + 2C_1(t)C_2(t)u(\tau_1)u(\tau_2)r(\tau_1,\tau_2)}\,, \qquad (1)$$

в котором $u(\tau_{1,2})$- стандартные неопределенности оценок постоянных времени; $r(\tau_1,\tau_2)$ - коэффициент корреляции между ними.

Корреляция между постоянными времени обусловлена использованием при их вычислении одних и тех же входных данных. При наличии в них одного влияющего фактора – аддитивного шума Δ, зависимости постоянных времени от Δ выражаются формулами $\tau_1 = g_1(\Delta)$; $\tau_2 = g_2(\Delta)$, а коэффициент предполагаемой корреляции определиться из выражения

$$r_{1,2} = u(\tau_1,\tau_2)\big/\left[u(\tau_1)u(\tau_2)\right] = \frac{\partial g_1}{\partial \Delta}\frac{\partial g_2}{\partial \Delta}u^2(\Delta)\Big/\left[\left|\frac{\partial g_1}{\partial \Delta}\right|u(\Delta)\left|\frac{\partial g_2}{\partial \Delta}\right|u(\Delta)\right] = 1\cdot\operatorname{sign}\left(\frac{\partial g_1}{\partial \Delta}\frac{\partial g_2}{\partial \Delta}\right),$$

то есть будет равен –1 или +1, в зависимости от знака произведения коэффициентов чувствительности.

Изучение методом Монте-Карло статистики оценок постоянных времени, получаемых методом моментов [5], показывает, что коэффициент корреляции между ним равен –1 (рис. 5).

В этом случае выражение (1) упростится:

$$u[h(t)] = \left|C_1(t)u(\tau_1) - C_2(t)u(\tau_2)\right|. \qquad (2)$$

Расширенную неопределенность определяли методом Монте-Карло. На рис. 6 показаны зависимости границ рассеяния (расширенной неопределенности) и стандартной неопределенности идентификации ПХ от времени.

Деление этих зависимостей дает постоянный коэффициент охвата во всем диапазоне времени, среднее значение которого составляет 1,97 для уровня доверия 0,95. Однако с увеличением уровня аддитивного шума искажение законов распределения погрешности идентификации возрастает (также как и для модели первого порядка) и разброс коэффициентов охвата в зависимости от времени становится значительным.

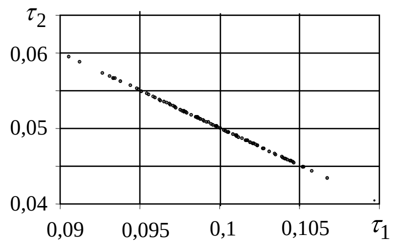


Рисунок 5 – Корреляция между оценками постоянных времени

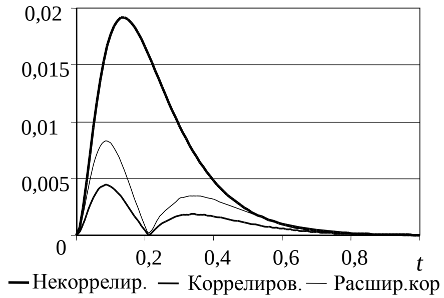


Рисунок 6 – Зависимости стандартной и расширенной неопределенности идентификации ПХ от времени

На рис. 7 изображены гистограммы рассеяния оценок постоянных времени.

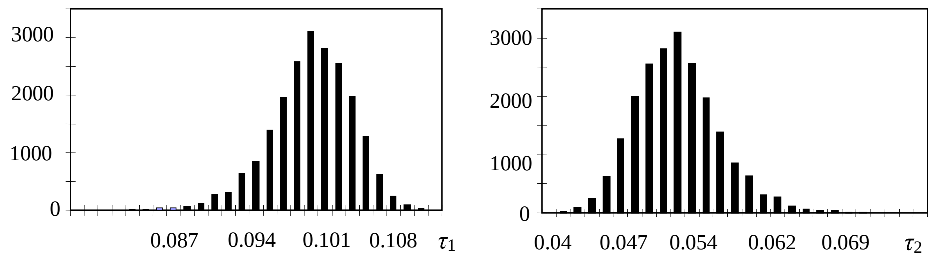


Рисунок 7 – Гистограммы рассеивания оценок постоянных времени

Их стандартные отклонения составили 0,0037 с, коэффициенты эксцесса равны 0,75, а коэффициенты асимметрии одинаковы по модулю и противоположны по знаку (–0,54 для τ_1 для и 0,54 для τ_2). Это говорит о влиянии нелинейности функции преобразования на закон распределения постоянных времени.

Импульсная характеристика

ИХ рассматриваемого СИТ второго порядка описывается выражением

$$g(t) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right).$$

В этом случае коэффициенты чувствительности будут равны

$$C_{1,2}(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial \tau_{1,2}} = -\frac{1}{(\tau_{1,2} - \tau_{2,1})^2}\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau_{1,2}}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{2,1}}\right)\right) + \frac{t}{\tau_{1,2}^2(\tau_{1,2} - \tau_{2,1})}\exp\left(-\frac{t}{\tau_{1,2}}\right),$$

а неопределенность идентификации ИХ в любой точке t будет определяться выражениями, аналогичными (1) и (2).

Для постоянных времени с τ_1=0,1 и τ_2=0,05 с и СКО шума 0,001 В (количества точек в ПХ 10[7]) СКО равны $u(\tau_{1,2}) \approx 0,000365$. График этой зависимости показан на рис. 8.

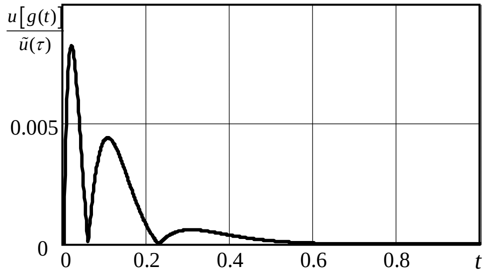


Рисунок 8 – Временная зависимость неопределенности идентификации импульсной характеристики

Амплитудно-частотная характеристика

АЧХ рассматриваемого СИТ описывается выражением

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\omega^2\tau_1^2\right)\left(1+\omega^2\tau_2^2\right)}}.$$

В этом случае коэффициенты чувствительности будут равны

$$\frac{\partial K(\omega)}{\partial \tau_{1,2}} = \frac{-\omega^2\tau_{1,2}}{\sqrt{(1+\omega^2\tau_{1,2}^2)^3(1+\omega^2\tau_{2,1}^2)}},$$

а неопределенность идентификации АЧХ в любой точке ω будет определяться выражениями, аналогичными (1), (2). Эта зависимость для приведенных ранее параметров показана на рис. 9.

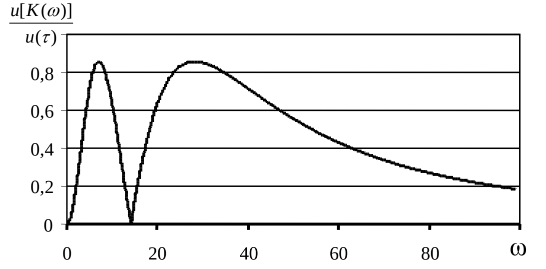


Рисунок 9 – Зависимости неопределенности идентификации АЧХ от частоты.

При исследовании ИХ и АЧХ наблюдаются аналогичное искажение формы закона распределения, что и в случае ПХ. Коэффициент охвата также остается близок к 1,96 (для уровня доверия 0,95) только при малых значениях неопределенности постоянных времени.

Выводы

1. При определении неопределенности идентификации ДХ следует учитывать как нелинейность функции преобразования, так и корреляцию оценок параметров модели передаточной функции, которые получены на основе общих входных данных.

2. Нелинейность функциональной зависимости переходной характеристики от ее параметров обуславливает искажение формы закона распределения ДХ.

3. Форма закона распределения оценки постоянной времени, полученной методом моментов, соответствует нормальному закону только для СИТ, моделируемых звеном первого порядка.

4. Оценки постоянных времени, полученные методом моментов, обладают коэффициентом корреляции –1 и формой законов распределения, имеющих одинаковый эксцесс и асимметрию разных знаков.

5. При малых значениях неопределенности параметров модельного уравнения можно пользоваться общим подходом к оценке стандартной неопределенности ДХ [8]. При этом следует разработать критерий “малости” неопределенности ДХ.

Список литературы: **1.** Грановский В.А. Динамические измерения: основы метрологического обеспечения. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 224 с. **2.** Захаров И.П., Штефан Н.В. Идентификация динамических характеристик апериодических измерительных преобразователей методом моментов //Радиотехника, 1997. Вып. 104. С. 47-55. **3.** Захаров И.П., Сергиенко М.П. Исследование погрешностей идентификации переходных характеристик апериодических измерительных преобразователей методом Прони //Радиоэлектроника и информатика. 2004. №1. С. 44-47. **4.** Захаров И.П. Сергиенко М.П. Определение параметров передаточных функций линейных систем //Системы обработки информации. 2004. №. 12. с. 73-78. **5.** Захаров И.П. Сергиенко М.П. Основні задачи метрологічної ідентифікації динамічних характеристик засобів вимірювальної техніки //Стандартизація, сертифікація, якість. 2005. №. 3. с. 33-37. **6.** Захаров И.П., Штефан Н.В. Алгоритмы достоверного и эффективного оценивания неопределенности по типу А//Измерительная техника, 2005, №5, с. 9-15. **7.** Захаров И.П., Сергиенко М.П. Исследование характеристик случайной погрешности определения постоянных времени апериодических измерительных преобразователей // Радиотехника. 2004. Вып. 139. С. 125-129. **8.** Захаров И.П. Неопределенность измерения: Общие подходы к составлению бюджета неопределенности // Український метрологічний журнал. 2004. №2. С. 10-15.

Поступила в редколлегию 20.05.05