АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СВОЙСТВ КАСКАДНЫХ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Демерчян К.А.
Научный руководитель – к.т.н., доцент Кириченко Л.О.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. ПМ, тел. (057)702-14-36,
Email: awerus@rambler.ru

This paper shows a comparative analysis of the multifractal characteristics for models of deterministic and stochastic multiplicative cascades.

В настоящее время стало общепризнанным, что многие информационные, биологические, физические, технологические процессы обладают сложной фрактальной структурой. Фрактальный анализ используется для моделирования, анализа и контроля сложных систем в различных областях науки и техники. Процессы, обладающие фрактальными свойствами, можно разделить на две группы: самоподобные (монофрактальные) и мультифрактальные. Монофрактальные процессы являются однородными в том смысле, что их скейлинговые характеристики остаются неизменными на любом диапазоне масштабов и обладают одним показателем скейлинга. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными масштабными свойствами и характеризуются спектром скейлинговых показателей.

При определении характеристик мультифрактального множества рассматривается обобщенная статистическая сумма $Z(q,\varepsilon)$. Эта величина характеризуется показателем степени q, который может принимать любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$:

$$Z(q,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon),$$

где

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N},$$

$n_i(\varepsilon)$ - кол-во точек, попавшее в ячейку с номером i, $N(\varepsilon)$ - суммарное количество занятых ячеек, которое зависит от размера ячейки ε. Вероятности p_i характеризуют относительную заселенность ячеек.

В общем случае мультифрактальное множество характеризуется скейлинговой экспонентой $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $Z(q,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$: $Z(q,\varepsilon) \propto \varepsilon^{\tau(q)}$. Функция $\tau(q)$ показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек.

Для характеристики мультифрактального множества используется функция мультифрактального спектра (спектра сингулярностей) $f(\alpha)$. Зависимость вероятности от размера ячейки $p_i(\varepsilon)$ имеет степенной характер: $p_i(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\alpha_i}$, где α_i представляет собой некоторый показатель степени, вообще говоря разный, для разных ячеек (показатель сингулярности). Функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$ характеризует распределение вероятностей различных значений α_i.

Простейшая модель мультифрактального процесса с заданными свойствами может быть получена с помощью мультипликативной каскадной конструкции. При построении мультипликативного каскада используется бинарная древовидная структура. узлам которой приписаны веса в соответствии с некоторым заданным распределением вероятностей.

Различают детерминированные и стохастические каскады. При построении детерминированного каскада первоначальный единичный отрезок делится на два равных интервала, которым приписываются весовые коэффициенты p_1 и $p_2 = 1 - p_1$ соответственно. Затем с каждым из интервалов проделывается аналогичная процедура. В результате на втором шаге имеется 4 интервала с весовыми коэффициентами p_1^2, $p_1 p_2$, $p_2 p_1$ и p_2^2. При числе шагов $n \to \infty$ и $p_1 \neq p_2$ мы приходим к неоднородному фрактальному множеству.

При моделировании стохастических каскадов весовыми коэффициентами являются значения случайной величины W, имеющей математическое ожидание, равное 1, независимые на каждой итерации. В этом случае предельная мера получится случайной.

В работе было исследовано изменение мультифрактальных характеристик в зависимости от изменения параметров мультипликативных каскадов для детерминированных и стохастических случаев.

Список источников:

1. Божокин С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярпая и хаотическая динамика». – 2001. – 128 с.

2. Riedi R.H. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), Long Range Dependence: Theory and Applications, p. 625–715, Birkhuser. 2002.