

УДК 53.082.9



Ю.С. Курский

Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
пр. Науки, 14, 61166 Харьков, Украина, yuri.kurskiy@nure.ua

МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ФУНКЦИЕЙ САМООРГАНИЗАЦИИ

К важнейшим научным задачам относятся задачи исследований и измерений в эволюционирующих нелинейных динамических системах с функцией самоорганизации. В работе представлена модель измерения для таких систем. В рамках модели проводятся измерения динамических переменных системы в равновесном и возбужденном состояниях. Результатом измерения являются интервалы значений динамических переменных, фрактальная размерность, энтропия Шеннона и время предсказания динамики. Для оценки эволюционных процессов в модель введены энтропийные и временные шкалы. В качестве количественной оценки состояния системы используется время её возврата в состояние равновесия после прекращения внешнего нормированного воздействия. Предложен энтропийный метод оценки нормированного внешнего воздействия.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА; МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ; ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ; ЭНТРОПИЯ ШЕННОНА

Ю.С. Курский. Модель вимірювання для системи з функцією самоорганізації. До найважливіших наукових завдань відносяться завдання досліджень та вимірювань у нелінійних динамічних системах із функціями еволюції та самоорганізації. У роботі представлена модель вимірювання для таких систем. В рамках моделі виконуються вимірювання динамічних змінних системи у рівноважному та збудженому станах. Результатом вимірювання є інтервали значень динамічних змінних, фрактальна розмірність, ентропія Шеннона і час передбачення динаміки. Для оцінки еволюційних процесів в модель введені ентропійна та часова шкали. В якості кількісної оцінки стану системи використовується час її повернення до стану рівноваги після припинення зовнішнього нормованого впливу. Запропоновано ентропійний метод оцінки нормованого зовнішнього впливу.

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІЧНА СИСТЕМА; МОДЕЛЬ ВИМІРЮВАННЯ; ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ; ЕНТРОПІЯ ШЕННОНА

Yu.S. Kurskiy. Measurement model for system with selforganization function. The tasks of research and measurement of evolving nonlinear dynamical systems with a self-organization function is one of the most important scientific tasks. The paper presents a measurement model for such systems. The measurement model includes the measurements of dynamic variables of the system in the equilibrium and excited states. The results of the measurement are: the intervals of the dynamic variables values, the fractal dimension, the Shannon entropy and the dynamics prediction time. For assess of the evolutionary processes the model has the entropy and time scales. As a quantitative assessment of the system state the model offers the time of return to the equilibrium state after the normalized external influence. An entropy method for estimating normalized external influence is proposed too.

NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM, MEASUREMENT MODEL, FRACTAL DIMENSION, SHANNON ENTROPY

Введение

К важнейшим научным задачам относятся задачи теоретического и практического обеспечения исследований, управления и прогнозирования динамики сложных физических, биологических и нелинейных динамических систем (НДС) иного происхождения. Примерами НДС являются: лазеры, солитоны, оптические системы конфиденциальной связи, климат, океан, геосфера, биопопуляции и живые организмы.

Несмотря на различную природу происхождения НДС демонстрируют общность свойств, таких как:

- нелинейность динамики и интервальность значения динамических переменных (ДП) — величин, характеризующих состояние НДС;
- сильная зависимость ДП от начальных условий и внешних воздействий;
- диссипативность;
- возможность хаотичной динамики;

– функция самоорганизации.

Общность свойств НДС позволила сформировать единые позиции к их исследованиям, которые отображены в таких междисциплинарных теориях как теория открытых систем, теория динамического хаоса, синергетика и ряде других [1].

Успешная реализация задач исследования, прогнозирования и управления НДС зависит от корректности измерений ДП. Несмотря на достигнутый прогресс в исследовании и описании НДС вопрос измерений и анализа их результатов долгое время оставался не проработанным. Данное обстоятельство позволяет считать создание методов, методик и моделей измерения в НДС важной теоретико-прикладной задачей, важной для развития теории исследования НДС.

Системный подход к вопросу измерения в НДС впервые был предложен в рамках нелинейной теории измерений (НТИ) [2–9]. В НТИ была обоснована необходимость дополнения классической

теории измерения принципами и моделями, соответствующими процессам, протекающим в реальных НДС. Было предложено использовать топологические инструменты теории НДС для оценки результатов измерения величин со сложной динамикой [2]. НТИ содержит: принципы проведения измерений, физико-математические модели измерений и анализа их результатов (МИ); принципы оценки неопределённости измерения и представления результатов измерения [3, 4]. Подходы и модели НТИ предложено использовать для оценки характеристик электрических сетей [5], лазеров [6, 7], процесса лазерного охлаждения [8], измерения физического состояния человека [9].

Наиболее сложными для исследования являются эволюционирующие НДС с функцией самоорганизации. С течением времени, вследствие эволюции ДП, характеризующие возбуждённые и равновесные состояния, меняют свои значения. Меняется и время перехода системы из одного состояния в другое. В эволюционирующих системах время перехода между состояниями системы является маркером и численной мерой её эволюционных изменений, как со знаком плюс, так и минус.

Цель данной работы состоит в разработке модели измерения для систем с функцией самоорганизации на основе физико-математических положений теорий исследований и измерений в нелинейных динамических системах.

1. Постановка задачи

Рассмотрим открытую, диссипативную, эволюционирующую НДС с функцией самоорганизации. Её состояние характеризуются n -мерным вектором:

$$X[X_1(t), \dots, X_n(t)],$$

где $X_i(t)$ — i -я ДП; t — время.

Значения ДП связаны с начальными значениями $[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)]$ функцией эволюции F [10]:

$$F[X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)] \rightarrow [X_1(t), \dots, X_n(t)]. \quad (1)$$

С течением времени наблюдения значения ДП $X_i(t)$ меняются (1), но находится в интервале $X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$. Динамика ДП носит сложный, нелинейный характер. В ходе фазовых переходов ДП могут менять динамику с случайной на регулярную, хаотичную, и наоборот. У системы есть неустойчивые состояния равновесия, она обменивается энергией и информацией с окружающей средой. Система подвержена влиянию внешних факторов, вследствие которых значения ДП выйдут за рамки $X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$ и система переходит из устойчивого состояния в возбуждённое. После прекращения воздействия, благодаря функции самоорганизации, за некоторое время T , система возвращается в устойчивое состояние. Эволюция

возможных значений ДП $[X_i^{\min}, X_i^{\max}]$ и времени возврата T .

Измерение состояния НДС представляется как эксперимент, целью которого является: определение интервалов возможных значений ДП $X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$; классификация динамики процессов; определение времени T возвращения системы в устойчивое состояние после прекращения нормированного воздействия Q .

Для исследования и измерений ДП НДС в НТИ [3] используются топологические и информационные характеристики НДС: фрактальная размерность D [11], энтропия Шеннона H , время предсказуемости T_{pr} (временной горизонт прогноза) [12].

Фрактальная размерность — одна из топологических характеристик геометрических объектов, процессов или фазового портрета НДС. Согласно определению Б. Мандельброта фрактал представляет собой объект, фрактальная размерность D (или размерность Хаусдорфа-Безиковича) которого больше его топологической размерности [11]. При проведении физических исследований фрактальные признаки могут быть обнаружены в структуре сигналов и полей, поведении функций, характеризующих распределение физических величин во времени и пространстве. Из этого следует возможность поиска фрактальной размерности, как особенного признака процессов или изображений.

Фрактальная размерность D используется для анализа временных рядов результатов измерений ДП. Для определения D ряда $\{x_i\}$ (где x_i — i -е значение величины x , $i=1, \dots, n$) используется метод нормированного размаха, выведенный эмпирическим путем П. Хёрстом. Анализ ряда $\{x_i\}$ позволяет получить показатель Хёрста H , связанный с D :

$$D = 2 - H \quad (2)$$

Значения показателя Хёрста находятся в интервале $0 \leq H \leq 1$ и определяются через отношение:

$$R/\sigma = (n/2)^H,$$

где: R — размах между максимальным и минимальным значениями функции приращения $x(i, n)$, n — количество измерений (состояний ДП), величина σ — среднее квадратичное отклонение:

$$R = \max_{1 \leq i \leq n} x(i, n) - \min_{1 \leq i \leq n} x(i, n); \quad x(i, n) = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j),$$

где \bar{x}_j — среднее арифметическое значений $\{x_j\}$ [11].

Фрактальная размерность (2) и фрактальная шкала с ключевыми значениями $D=1$, $D=1.5$, $D=2$, используются для классификации процессов:

- при $D=1$ процесс — строго детерминированный;
- при $D=2$ разброс значений очень велик, что не позволяет использовать методы обработки ре-

- при $D=1,5$ процесс является случайным;
 - при $1 < D < 1,5$ процесс персистентный;
 - при $1,5 < D < 2$ процесс — антиперсистентный.
- В этих случаях процесс немарковский, хаотичный, для обработки результатов измерения должен быть применен специальный математический аппарат [3].

Ранее, в работах [3] и [5] фрактальный анализ был успешно использован для анализа динамики частоты излучения лазера и напряжения электрической сети соответственно.

Энтропия Шеннона H — ключевое понятие теории информации. Для ДП X_i с плотностью распределения вероятности $p(X_i)$ определяется как:

$$H_i = -p(X_i) \ln p(X_i). \quad (3)$$

Энтропия Шеннона используется в информационной теории измерения для оценки разброса результатов измерения. Если ряд значений X_i ограничен, то энтропия максимальна для равномерного закона распределения:

$$(H \rightarrow \ln(X_i^{\max} - X_i^{\min}))$$

$$\text{при } p(X_i) \rightarrow 1/(X_i^{\max} - X_i^{\min})$$

и минимальна при нормальном законе распределения, при отсутствии неопределённости состояний:

$$p(X_i) \rightarrow 1 \quad H \rightarrow 0.$$

Энтропия Шеннона характеризует и степень упорядоченности динамики НДС. Энтропия хаотичной и случайной динамики выше энтропии детерминированной динамики. Изменение её значения свидетельствует об изменении динамики или интервала значений ДП. Энтропия может быть применена для оценки отклонения системы от состояния равновесия.

В работе [3] автором было получено выражение связи энтропии Шеннона (3) и фрактальной размерности (2) временного ряда результатов измерений $\{x_i\}$ в виде:

$$H = \ln[2kR(n/2)^{D-2}].$$

где k — энтропийный коэффициент.

Согласно этому выражению энтропия Шеннона результатов измерения ДП НДС зависит от функции распределения, значения размаха Хёрста, количества измерений ДП и фрактальной размерности временного ряда:

$$H = H(k, R, n, D).$$

В значение энтропии вносят вклад качество измерительного эксперимента и разнообразие значений ДП НДС. При этом, вклад свойств НДС является определяющим. Согласно полученному выражению энтропия принимает максимальное значение в случае нормального распределения результатов измерения, при этом $k = 2,06$; энтропия принимает минимальное значение в случае

арксинусоидального распределения, при этом $k = 1,11$.

На значение энтропии влияет число состояний ДП НДС n . Чем большее количество состояний может принимать ДП НДС, тем выше значение энтропии. Если все состояния ДП равновероятны, то энтропия монотонно растёт с увеличением числа n .

Связь фрактальной размерности D со значением энтропии Шеннона выглядит следующим образом: энтропия максимальна для случая $D=2$, при этом ДП НДС ведёт себя регулярным образом, но разброс измеряемых значений очень велик; энтропия минимальна для случая $D=1$, при этом поведение ДП НДС строго детерминированное и может быть описано уравнением.

Таким образом, разнообразие состояний ДП НДС является основным фактором влияния на значение энтропии.

Временя предсказуемости T_{for} — отрезок времени, на котором возможно корректное прогнозирование динамики НДС, определяется как:

$$T_{for}(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda_{\max}} \log \frac{1}{\epsilon}, \quad (4)$$

где λ_{\max} — максимальный показатель Ляпунова; ϵ — расстояние между близкими траекториями фазового портрета НДС (рис. 1).

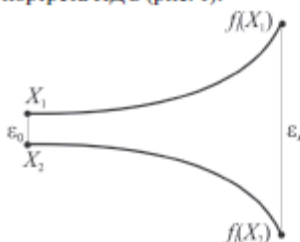


Рис. 1. Геометрия разбегания близких траекторий:
 ϵ_0, ϵ_i — расстояния между точками X_1, X_2 близких траекторий в моменты времени t_0 и t_i соответственно;
 $f(X_1), f(X_2)$ — отображения точек X_1, X_2 соответственно в момент времени t_i .

Показатели Ляпунова λ_i используют для исследования НДС в окрестности произвольной траектории. Если две близкие траектории $x_i(t)$ и $x_{i+1}(t)$ выбрать так что:

$$x_{i+1}(t) = x_i(t) + \xi(t), \text{ а } \xi(0) = \epsilon, \epsilon \rightarrow 0,$$

то функция вида:

$$\Xi[\xi(0)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{\xi(t)}{\xi(0)} \right] \quad (5)$$

принимает конечный ряд значений показателей Ляпунова $\{\lambda_i\}, i=1, 2, \dots, n$ [12].

В статье [9] авторы данной работы использовали интервалы значений ДП, фрактальную размерность (2) и энтропию Шеннона (3) при проведении

исследования человека, регулярно занимающегося физкультурой. В течение 21 недели с дискретностью $\Delta t=7$ дней выполнялись измерения параметров:

- нижняя часть бедра (X_1);
- верхняя часть бедра (X_2);
- бедра (X_3);
- нижняя часть живота (X_4);
- талия (X_5);
- верхняя часть живота (X_6);
- масса (X_7).

Были получены семь временных рядов результатов измерения, рассчитаны интервальные значения ДП, значения фрактальной размерности и энтропии Шеннона (таблица).

Таблица

Результаты измерения ДП, уровень доверия $\rho=0,95$

ДП	$[X_i^{\min}; X_i^{\max}]$	D	H
X_1	[0,430; 0,450] м	1,47	0,891
X_2	[0,615; 0,660] м	1,2	1,117
X_3	[1,010; 1,070] м	1,2	1,117
X_4	[0,840; 0,910] м	1,02	2,117
X_5	[0,735; 0,760] м	1,2	1,417
X_6	[0,755; 0,780] м	1,00	1.235
X_7	[67; 70] кг	1,1	0,712

Анализ результатов измерений позволяет утверждать, что все ДП демонстрировали практически детерминированную динамику, что характерно для НДС с функцией самоорганизации. Значения фрактальной размерности всех ДП находятся в интервале $1 < D < 1,5$. При этом для ДП $X_2 \dots X_7$ $D \rightarrow 1$, а для $D \rightarrow 1,5$. То есть, динамика X_1 близка к случайному процессу. Анализ значений энтропии Шеннона говорит о том, что наиболее вариabельными являются ДП X_4 ($H \approx 2$) и X_5 ($H \approx 1,4$), а наименее вариabельными ДП X_1 ($H \approx 0,9$) и X_7 ($H \approx 0,7$).

2. Модель измерения для системы с функцией самоорганизации

В рамках МИ измерение состояния НДС рассматривается как двухэтапный активный эксперимент. На первом этапе проводятся измерения ДП НДС в равновесном состоянии. На втором этапе система, под действием нормированного внешнего воздействия Q переходит в возбуждённое состояние, в котором также выполняются измерения значений ДП. После прекращения внешнего воздействия система за время T возвращается в равновесное состояние (рисунок). В случае нарушений в функционировании системы или эволюционных изменений, время возврата возрастает, или НДС вовсе не может вернуться в устойчивое состояние самостоятельно.

По результатам измерения ДП в равновесном состоянии определяются: n временных рядов

результатов измерений значений ДП $\{X_i(t)\}$ (n — количество ДП) при этом $X_i(t) \in [X_i^{\text{stabmin}}; X_i^{\text{stabmax}}]$; фрактальная размерность D_i^{stab} (2); энтропия H_i^{stab} (3); время прогноза динамики ДП T_{fori}^{stab} (4).

По результатам измерения ДП в возбуждённом состоянии определяются:

- n временных рядов результатов измерений значений ДП $\{X_i(t)\}$ при этом $X_i(t) \in [X_i^{\min}; X_i^{\max}]$;
- фрактальная размерность D_i ;
- энтропия H_i ;
- время прогноза T_{fori} ;
- время T_i возврата значения ДП $X_i(t)$ из возбуждённого в равновесное состояние после прекращения нормированного воздействия Q (рис. 2).



Рис. 2. Схема НДС с функцией самоорганизации

В МИ предложена энтропийная шкала оценки степени хаотичности динамики с использованием нормированной энтропии:

$$\|H\| = \sum_{i=1}^n \frac{-p(X_i) \ln p(X_i)}{\ln[X_i^{\max} - X_i^{\min}]}. \quad (6)$$

Нормированная энтропия (6) принимает значения от 0 (регулярное протекание процессов) до 1 (максимальный хаос). Значения $\|H_{\text{stab}}\|=0$ и $\|H_{\text{stab}}\|=1$ являются граничными точками энтропийной шкалы. Значение энтропии (6) для равновесного состояния (норма энтропии) является третьей ключевой точкой шкалы, при этом $0 < \|H_{\text{stab}}\| < 1$.

В МИ норма энтропии H_{stab} определена исходя из критерия «S-теоремы» Ю. Климонтовича. Являясь характеристикой состояния НДС, энтропия эволюционирующих систем меняется с течением времени вследствие внешних воздействий и эволюции (2). Результат её измерения необходимо сравнить с H_{stab} :

$$\Delta H = H - H_{\text{stab}}. \quad (7)$$

Значение ΔH является показателем степени хаотичности.

На практике значение нормы энтропии H_{stab} определяется как усредненное значение результатов измерения энтропии ряда схожих НДС. Однако, такой подход противоречит задаче индивидуального подхода к диагностике состояния систем. Исходя из этого, в МИ сформулированы принципы и правила определения нормы энтропии эволюционирующих НДС с функцией самоорганизации:

1) норма энтропии H_{Stab} меняется при эволюционных изменениях НДС, поэтому её значение должно периодически определяться заново;

2) по экспериментальным данным определяется значение энтропии H (3);

3) по формуле (6) определяются нормированные значения H и H_{Stab} ;

4) из выражения (7) определяется показатель степени хаотичности ΔH .

5) в соответствии с энтропийной шкалой выполняется анализ смещения динамики в сторону хаотичности или регулярности.

Также в МИ предложена временная шкала оценки состояния НДС. Шкала ограничена минимальным значением $T_i = 0$, максимального значения не имеет. Контрольной точкой шкалы является $T_{Stab i}$ — время возврата в равновесное состояние «эталонной», идеально функционирующей системы.

В результате измерений, составляется цифровой портрет состояния НДС:

$$\left. \begin{aligned} & [X_{Stab i}^{\min}(t_0), X_{Stab i}^{\max}(t_0)], [H_{Stab i}, T_{for-Stab i}] \\ & [X_i^{\min}(t), X_i^{\max}(t)], [H_i, T_{for i}] \\ & T_i, i = 1 \dots n. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Оценка динамики состояния НДС (8) выполняется при помощи энтропийных и временных шкал:

$$\left. \begin{aligned} & 0 \dots [H_{Stab i} \dots 1]; \\ & 0 \dots T_{Stab i} \dots \infty. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В МИ предложен принцип определения нормированного воздействия Q (рисунок). Его значение должно быть таким, чтобы система, выйдя из устойчивого состояния, могла самостоятельно в него вернуться. То есть, значение Q не должно превышать некоего критического значения Q_{max} , $Q \leq Q_{max}$. Для определения Q_{max} величину внешнего воздействия Q следует связать с показателем степени хаотичности ΔH (7). Для этого введём значение энтропии H_{crit} , соответствующее возбуждённому состоянию, из которого система не может самостоятельно вернуться в равновесное состояние. Значение Q должно обеспечивать выполнение условия:

$$\Delta H < H_{crit} - H_{Stab}. \quad (10)$$

Таким образом, разработанная МИ (8)-(10) учитывает изменение ДП НДС во времени (эволюцию системы), является динамической моделью. Она может быть использована для исследования, измерения и управления эволюционирующими НДС с функцией самоорганизации физической, биологической и иной природы. МИ позволяет оценить эволюционные изменения. Выбор в качестве количественной оценки состояния НДС времени возврата системы в состояние равновесия позволит создать надлежащее метрологическое обеспечение подобных исследований и прослеживаемость результатов измерений, опираясь на эталон времени.

Выводы

В работе представлена модель измерения динамических переменных нелинейных динамических систем с функцией самоорганизации. Модель построена на физико-математических основах теорий открытых динамических систем, синергетики и теории измерений в нелинейных динамических системах.

В рамках модели измерения проводятся измерения динамических переменных системы в равновесном и возбуждённом состояниях.

Результатом измерения являются интервалы значений динамических переменных, фрактальная размерность, энтропия Шеннона и время предсказания динамики.

Для оценки эволюционных процессов в модель введены энтропийные и временные шкалы.

В качестве количественной оценки состояния системы в модели используется время её возврата в состояние равновесия после прекращения внешнего нормированного воздействия.

Предложен энтропийный метод оценки нормированного внешнего воздействия.

Список литературы:

- [1] Nicolis, G., Prigogine, I. (1979). *Self-organization in nonequilibrium systems from dissipative structures to order through fluctuations*. Moscow: Mir.
- [2] Machekhin, Yu., Kurskoy, Yu. (2014). Fractal-entropy analysis of measurement results in nonlinear dynamical systems. *Measuring technique*. 57(6), 609-704.
- [3] Machekhin, Yu., Kurskoy, Yu. (2014). *Fundamentals of nonlinear metrology*. LAP. (in Russian).
- [4] Machekhin, Yu., Kurskoy, Yu. (2015). Compilation of the Shannon entropy measurement equation for nonlinear dynamical systems using interval analysis methods. *Pribory i metody izmereniy*. 6(2), 257-263. (in Russian).
- [5] Kurskoy, Yu. (2014). Fractal analysis of electrical measurements. *Energetika, energosberezhenie i ergoaudit*. 119 (1), 52-57. (in Russian).
- [6] Gnatenko, A., Machekhin, Yu., Kurskoy, Yu., Obozna, V. (2018). Providing mode locking in fiber ring lasers. *J. Nano-Electron. Phys.* 10 (2), 2033-2041. (in Russian).
- [7] Machekhin, Yu., Kurskoy, Yu., Gnatenko, A., Tkachenko V. (2018). Nanolaser Superradiation In Information And Measuring Procedures. *Telecommunications and Radio Engineering*. 77 (13), 1179-1186.
- [8] Machekhin, Yu., Kurskoy, Yu. (2015). The evaluation of cooled particles parameters by instruments of nonlinear metrology. *Metrologiya ta priladi*. 56(6), 50-53.
- [9] Machekhin, Yu., Kurskoy, Yu., Prisich, E. (2017). A human as a research object for metrology of nonlinear dynamic systems. *Metrologiya ta priladi*. 63(1), 63-66. (in Russian).
- [10] Haken, H. (1984). *The science of structure: synergetics*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- [11] Schröder, M. (2001). *Fractals, chaos, power laws, Regular and chaotic dynamics*. Izhevsk. (in Russian).
- [12] Loskutov, V. (2007). Charm of Chaos. *UFN*, 177(6), 989-1014. (in Russian).

Поступила в редакцию 23.11.2018