

Список литературы: 1. Красильников Н.Н. Теория передачи и восприятия изображений. М.: Радио и связь, 1986. 248 с. 2. Путятин Е.П., Аверин С.И. Обработка изображений в робототехнике. М.: Машиностроение, 1990. 320 с.

Поступила в редколлегию 09.10.98

Липанов Александр Витальевич, аспирант кафедры Применения ЭВМ. Научные интересы: исследование методов обработки изображений, разработка алгоритмов обнаружения объектов на изображениях, разработка систем наблюдения. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-19.

УДК 519.21/23

С.Н. ГЕРАСИН, Л.О. КИРИЧЕНКО, А.А. РОДЗИНСКИЙ

АНАЛИЗ ЭРГОДИЧЕСКОГО РЕЖИМА БЕСКОНЕЧНЫХ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ РЕДУКЦИИ

Исследование различных систем массового обслуживания, процессов рождения и гибели часто приводит к необходимости решать систему уравнений Колмогорова, при помощи которой описывается динамика указанных процессов и систем. Довольно часто эта система содержит бесконечное число уравнений и ее нельзя непосредственно решить даже на ЭВМ. Для того чтобы сделать вычислительный процесс конечным, обычно используют метод редукции, при котором исходная бесконечномерная система уравнений (а значит и соответствующий ей процесс) заменяется конечной. Отвечающий конечной системе процесс должен иметь ту же вероятностную природу, что и исходный. Предельные характеристики "усеченной" системы могут быть определены аналитически и, если число уравнений достаточно велико, должны быть близки к соответствующим характеристикам исходной системы. Доказательства сходимости вероятностей состояний "усеченных" или редуцированных систем к исходной системе можно найти в работах [1-3]. Мы же ограничимся иллюстрацией сходимости на примере конкретных систем уравнений и укажем характерные особенности таких типов сходимости.

Пусть неоднородный марковский процесс $\xi(t)$ с непрерывным временем и счетным фазовым пространством определяется прямой системой Колмогорова

$$\dot{P}(t) = P(t)A(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ – матрица интенсивностей или квазистохастическая,

$$P(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t)), \\ p_i(t) = P(\xi(t) = i)$$

– вектор вероятностей состояний. Систему (1) будем рассматривать как дифференциальное уравнение в банаховом пространстве последовательностей l_1^+ . Определим множество $S = \{p \in l_1^+ \mid \|p\| = 1\}$.

Определение 1. Процесс $\xi(t)$ сильно квазиэргодичен, если существует вектор-функция $q(t) \in S$ такая, что при любом $p(0) \in S$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t) - q(t)\| = 0.$$

Если при этом можно выбрать $q(t) = \text{const}$, то процесс $\xi(t)$ сильно эргодичен.

Из определения 1 ясно, что при сильной квазиэргодичности выбор функции $q(t)$ может быть осуществлен не единственным образом.

Определение 2. Процесс $\xi(t)$ нуль – эргодичен, если для любого $p(0) \in S$ $p_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и любом i .

Определение 3. Процесс $\xi(t)$ имеет предельное среднее $g(t)$, если при всех i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_n n p_n(t) - g(t) \right) = 0.$$

Понятно, что предельное среднее, также как и предельный режим $q(t)$, можно выбрать неоднозначно.

В данной работе мы рассмотрим следующие типы инфинитезимальной матрицы $A(t)$:

1. $A(t) = A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots}$ – постоянная матрица, причем все элементы ограничены в совокупности.
2. Последовательность $\{a_{ii}\}$ расходится к бесконечности.
3. Диагональные элементы $a_{ii}(t) < \infty$ для $t \geq 0$.
4. Существуют такие строки, что $\lim_{t \rightarrow \infty} a_{ii}(t) = \infty$.

Усеченная матрица $A^{(n)}$ редуцированной системы всегда будет строиться по следующей схеме: отбрасываемые элементы каждой строки суммируются к наибольшему положительному элементу этой же строки. Таким образом, матрица $A^{(n)}$ по-прежнему остается квазистохастической, т.е. $\sum_j a_{ij}^{(n)} = 0$.

В случае расходимости ряда из положительных элементов редукция осуществляется с учетом коррекции диагонального элемента так, чтобы сумма в соответствующей строке по-прежнему равнялась нулю. Для процессов рождения и гибели с постоянными коэффициентами получены оценки скорости сходимости усеченной системы к бесконечной. При этом скорость сходимости является геометрической [4]. Более сильные оценки найдены для неоднородного сильно квазиэргодического процесса [5]. И в этом случае скорость сходимости также является геометрической. Следовательно, стабилизация решений может наблюдаться визуально на графике даже при небольших значениях t .

При построении матрицы использовались сходящиеся ряды вида $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$, где $1 < p < 2$. Для случая $n=5$ и $p = \{1,866, 1,905, 1,274, 1,453, 1,748\}$ матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1,791 & 1,313 & 0,274 & 0,128 & 0,075 \\ 1,282 & -1,744 & 0,267 & 0,123 & 0,071 \\ 3,409 & 0,413 & -4,24 & 0,246 & 0,171 \\ 2,115 & 0,365 & 0,202 & -2,817 & 0,133 \\ 1,432 & 0,297 & 0,146 & 0,088 & -1,965 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 представлены решения $p_1(t)$ уравнения Колмогорова для соответствующих инфинитезимальных матриц $A^{(n)}$ ($n=5, 10, 15$). Начальные распределения задавались вида $(1, 0, 0, \dots)$. Легко заметить, что решения стремятся к предельному (для $n=\infty$) значению 1-й компоненты собственного вектора инфинитезимальной матрицы, который показан пунктирной линией.

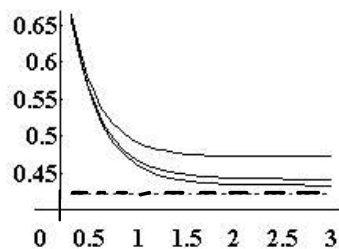


Рис.1

Аналогичная картина наблюдается и в том случае, когда одна из строк матрицы представляет собой расходящийся ряд. Например, для $n=5$ последняя строка матрицы имеет вид $(1, 1, 1, 1, -5)$. На рис. 2 представлены решения уравнения Колмогорова для инфинитезимальных матриц размерностью $n=\{5, 15\}$ с расходящимся рядом (сплошной линией) и соответствующие решения для сходящихся рядов (пунктиром).

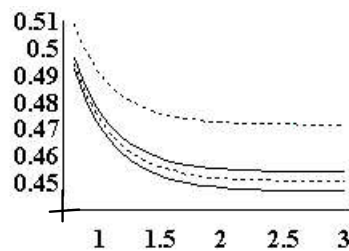


Рис. 2.

n	P1 сх.	P1 расх.
5	0,471608	0,472563
10	0,448391	0,452449
15	0,441258	0,446921
20	0,436602	0,443301
25	0,432906	0,439821
30	0,429618	0,436376
35	0,427278	0,434072
40	0,424726	0,430964
45	0,422531	0,428262
50	0,420564	0,42579
55	0,419752	0,425631
60	0,418429	0,424094

В таблице приведены значения 1-й компоненты собственного вектора инфинитезимальной матрицы соответствующей размерности, указанной в первом столбце, для матриц со всеми сходящимися рядами (2-й столбец) и матриц с расходящимся рядом (3-й столбец). В последней строке представлены предельные значения этих последовательностей, найденные с помощью алгоритма Винна.

Кроме инфинитезимальных матриц, заданных числовыми последовательностями, были исследо-

ваны матрицы, элементами которых являются функциональные ряды, представляющие собой разложения в ряд Тейлора гиперболических функций с аргументом вида $1/t$ в бесконечно удаленной точке. Например, для $n=5$ были выбраны следующие функции:

$$e^{x-1}, e^x \operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1.3}\right), e^x \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x-1.2}\right), e^{\frac{2.8}{x-1}}, \operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1.3}\right).$$

Матрица для $n=5$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{e^{x-1}} & \frac{1}{e^{x-1}} \frac{13-9x-6x^2}{6x^3} & \frac{1}{x} & \frac{3}{2x^2} & \frac{13}{6x^3} \\ \frac{1}{e^x \operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1.3}\right)} \frac{32-23x-x^2}{x^3} & -e^x \operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1.3}\right) & \frac{1}{x} & \frac{23}{x^2} & \frac{32}{x^3} \\ \frac{1}{e^x \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x-1.2}\right)} \frac{18-x-x^2}{x^3} & \frac{1}{x} & -e^x \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x-1.2}\right) & \frac{1}{x^2} & \frac{18}{x^3} \\ \frac{2.8}{e^{\frac{2.8}{x-1}}} \frac{36}{x^3} \frac{39}{x^2} \frac{2.8}{x} & \frac{2.8}{x} & \frac{39}{x^2} & -e^{\frac{2.8}{x-1}} \frac{2.8}{x^3} & \frac{36}{x^3} \\ \operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1.3}\right) \frac{13}{x^3} \frac{13}{x^2} \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \frac{13}{x^2} & \frac{13}{x^3} & -\operatorname{th}\left(\frac{1}{x-1.3}\right) \end{pmatrix}.$$

Сходимость компонент собственного вектора к предельному значению происходит довольно быстро. На рис. 3 показан график 1-й компоненты собственного вектора матрицы для $n=5$ и $n=15$. Как и в случае числовых последовательностей, если одна или несколько строк представляют собой расходящиеся ряды, сходимость сохраняется.

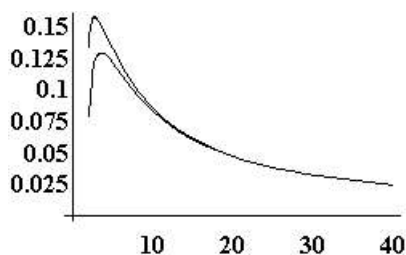


Рис. 3.

Все вычисления производились в среде многофункционального интегрированного пакета **Mathematica**, который был выбран потому, что позволяет проводить вычисления с очень высокой степенью точности, обладает необходимым набором средств матричной алгебры, большими возможностями для решения систем дифференциальных уравнений и работает с выражениями как в численном виде, так и в аналитической форме.

Список литературы: 1. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 512 с. 2. Герасин С.Н. Вычисление стационарных распределений марковских процессов со счетным числом состояний // Ученые записки ХГИ НУА. Т.1. 1995. С.317–322. 3. Bondarenko M., Chetverikov G., Gerasin S. The application reduction methods in multimeaning stochastic structures // Праці УНДІРТ. 1996. N 1(5). С. 24 – 27. 4. Зейфман А.И. Об эргодичности неоднородных процессов рождения и гибели // Проблемы устойчивости стохастических моделей: Тр. семинара ВНИИ сист. исслед. М., 1991. С. 63–70. 5. Zeifman A.I. Stability for continuous – time non-homogeneous Markov chains // Lecture Notes in Math. 1985. Vol. 1155. P. 401–414.

Поступила в редколлегию 12.10.98

Герасин Сергей Николаевич, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, стохастический анализ, теория процессов Маркова. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина 14, тел: (0572) 40-93-72, e-mail: hm@kture.ua.

Кириченко Людмила Олеговна, аспирант кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: хаотическая динамика и марковские процессы. Адрес: Украина, 310085, Харьков, ул. Астрономическая, 35-ж, кв. 120, тел. 44-68-07.

Родзинский Анатолий Анатольевич, аспирант кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: хаотическая динамика, теория процессов Маркова. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина 14, тел: (0572) 40-94-36.