УДК 519.85

ДЕКОМПОЗИЦИЯ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

ГРЕБЕННИК И.В.

Рассматривается задача оптимизации на множестве булевых переменных в евклидовом пространстве. Исследуется выпуклая оболочка множества допустимых решений, проводится его декомпозиция, в основе которой лежит понятие смежности. Строится семейство параллельных гиперплоскостей, содержащих подмножества множества допустимых решений задачи оптимизации. На этих подмножествах формулируются экстремальные свойства функций цели.

Рассмотрим задачу дискретной оптимизации следующего вида:

$$\overline{\varphi}(x) \to \min , \tag{1}$$

$$x \in B_k \subset R^k;\ B_k = \{x | x_i \in \{0,1\}, i \in J_k, J_k = \{1,2,\ldots,k\}.$$

Отметим, что множество B_k , его свойства и некоторые задачи оптимизации на множестве B_k исследованы в [1,2].

Осуществим выпуклое (сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$) дифференцируемое продолжение φ функции $\overline{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X \supset Q_2^k = conv\ B_k,$ которое может быть получено, например, способом, описанным в [2]. Учтем, что точки множества B_k и только они удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le 1, \quad i \in J_k, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - \frac{1}{2})^2 = \frac{k}{4} \end{cases}.$$

Тогда задаче (1) можно поставить в соответствие эквивалентную задачу оптимизации:

$$\overline{\varphi}(x) \to \min ,\quad x \in R^k, \|x - c\|^2 = \frac{k}{4}, 0 \le x_i \le 1, i \in J_k,$$

$$c = (\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}) \in R^k . \tag{2}$$

Для разработки подходов к решению задач (1), (2) исследуем некоторые их свойства.

Пусть $x^0 = (x_1^0,\ \ x_2^0,\ldots,\ \ x_k^0) \in B_{k,}$ а $x^1, x^2, \ldots x^k \in B_k$ являются вершинами многогранника Q_2^k, смежными с x^0.

Многогранник Q_2^k - выпуклая оболочка множества B_k - представляет собой куб в R^k , описываемый системой неравенств [3]:

$$0 \le x_i \le 1, i \in J_k . \tag{3}$$

Справедлива теорема — критерий вершины многогранника Q_2^k .

Теорема 1. *Вершинами многогранника Q_2^k являются точки $x = (x_1, x_2, \ldots x_k)$, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in J_k$, и только они.*

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим описание многогранника Q_2^k в следующем виде [4]. Пусть

$$x = x_0 + a_a \cdot t^a \tag{4}$$

— векторное уравнение, в котором $a_a \cdot t^a$ задает линейную комбинацию единичных базисных векторов $e_1, e_2, \ldots e_k$ пространства R^k с числовыми параметрами t , $t^2, \ldots t^k$. Если в векторном уравнении (4) придавать всем параметрам t^a только значения $0 \le t^a \le 1$, а $x_0 \in R^k$ задать в виде $x_0 = (0,0,\ldots,0)$, то получим k - параллелепипед с вершинами

$$x_0,\ x_0 + e_1,\ x_0 + e_1 + e_2,\ \ldots, x_0 + e_1 + \ldots + e_k .$$

Иначе говоря, получим многогранник Q_2^k , описываемый системой (3). Как следует из [4], придавая всем числовым параметрам t^a только значения 0 или 1, получим вершины (0-грани) параллелепипеда Q_2^k. Поскольку $x_0 = (0,0,\ldots,0)$, а координаты базисных векторов $e_i^j \in \{0,1\}$ и $t^a \in \{0,1\}$, то координаты любой вершины x , полученной таким образом, также примут значения из множества $\{0,1\}$.

Достаточность. Пусть $x \in R^k$, $x_i \in \{0,1\}$, $i \in J_k$. Такая точка x удовлетворяет уравнению (4), в котором $x_0 = (0,0,\ldots,0)$, а параметры t^i задаются следующим образом: $t^i = 1$, если $x_i = 1$, и $t^i = 0$, если $x_i = 0$. Но тогда x представляет собой вершину параллелепипеда Q_2^k , что и требовалось доказать.

Следствие 1. Вершины x^1 и x^2 многогранника Q_2^k являются смежными тогда и только тогда, когда они различаются между собой значениями только одной координаты.

Доказательство. *Достаточность.* Рассмотрим уравнение (4). Как следует из [4], ребро (1-грань) параллелепипеда получают, придавая одному из параметров t^i все значения $0 \le t^i \le 1$ и фиксируя значения остальных параметров t^j $(j \ne i)$ как $t^j = 1$ или $t^j = 0$. Выберем произвольную вершину x^1 многогранника Q_2^k . Она удовлетворяет уравнению (4) при фиксированном наборе значений параметров $t^1, t^2, \ldots t^k$. Зададим произвольно $i \in J_k$ и, оставив неизменными все значения параметров t^j, $j \ne i$, будем изменять t^i . При этом, если $t^i = 0$, изменим его значение от 0 до 1; если $t^i = 1$, то изменим его от 1 до 0. В результате этого изменения согласно теореме 1 будет получена новая вершина

x^2. По построению x^2 отличается от x^1 значением только одной координаты x_i. С другой стороны, x^1 и x^2 лежат на концах одного ребра параллелепипеда. Следовательно, x^1 и x^2 - смежные вершины.

Необходимость. Пусть x^1 и x^2 - смежные вершины параллелепипеда Q_2^k. Значит, они лежат на концах одного ребра Q_2^k. Каждое ребро Q_2^k получается при фиксированном наборе параметров $t^1, t^2, \dots t^k$ путем изменения одного из них от 0 до 1. Отсюда следует, что x^1 и x^2 отличаются значениями только одной координаты.

Следствие 2. Каждая вершина $x \in Q_2^k$ имеет k смежных с ней вершин.

Построим гиперплоскость в R^k, проходящую через точки $x^1, \dots, x^k$ и отделяющую x^0 от точек множества B_k. Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Уравнение гиперплоскости a, проходящей через вершины многогранника Q_2^k, смежные с вершиной $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) \in B_k$, имеет следующий вид:*

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k + d_k = 0, \qquad (5)$$

где
$$c_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i^0 = 1, \\ -1, & \text{если } x_i^0 = 0, \end{cases} \quad i \in J_k, \qquad (6)$$

d_k получается с помощью подстановки в (5) произвольной вершины Q_2^k, смежной с x^0.

Доказательство проведем по индукции. Проверим истинность утверждения для случая $k = 2$. При этом вершинами Q_2^k будут точки (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Принимая за x^0 каждую из этих точек поочередно, убеждаемся, что уравнение гиперплоскости, проходящей через смежные вершины многогранника, удовлетворяет утверждению теоремы. Например, при $x^0 = (0,0)$ смежными вершинами будут $x^1 = (1,0)$, $x^2 = (0,1)$. Уравнение плоскости в R^2, проходящей через них, будет $-x_1 - x_2 + 1 = 0$.

Пусть теперь утверждение теоремы истинно при $k = n$. Покажем его справедливость для $k = n+1$. Пусть $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0\right)$, а смежные вершины x^i принадлежат множеству X и имеют вид:

$$x^1 = (\bar{x}_1^0,\ x_2^0, \dots,\ x_n^0),$$
$$x^2 = (x_1^0,\ \bar{x}_2^0, \dots,\ x_n^0),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x^n = (x_1^0,\ x_2^0, \dots,\ \bar{x}_n^0).$$

Здесь с помощью верхней черты обозначено

$$\bar{t} = \begin{cases} 1, & \text{если } t = 0, \\ 0, & \text{если } t = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим точку $y^0 \in B_{n+1}$ с координатами $y^0 = (x_1^0,\ x_2^0, \dots,\ x_n^0, y_{n+1}^0)$. При этом возможны два случая. В первом $y_{n+1}^0 = 0$, во втором — $y_{n+1}^0 = 1$. Вершины Q_2^{n+1}, смежные с y^0, принадлежат множеству Y и имеют вид:

$$y^1 = (\bar{x}_1^0,\ x_2^0, \dots,\ x_n^0, y_{n+1}^0).,$$
$$y^2 = (x_1^0,\ \bar{x}_2^0, \dots,\ x_n^0, y_{n+1}^0).,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^n = (x_1^0,\ x_2^0, \dots,\ \bar{x}_n^0, y_{n+1}^0).,$$
$$y^{n+1} = (x_1^0,\ x_2^0, \dots,\ x_n^0, \bar{y}_{n+1}^0).$$

Покажем, что точки множества Y удовлетворяют уравнению гиперплоскости a вида

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{n+1} y_{n+1} + d_{n+1} = 0,$$

где коэффициенты $c_1, \dots c_n$ совпадают с коэффициентами в (5):

$$c_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } y_{n+1}^0 = 1, \\ -1, & \text{если } y_{n+1}^0 = 0. \end{cases}$$

Для этого покажем вначале, что

$$c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + \dots + c_n x_n^0 + d_n \equiv 1, \qquad (7)$$

где c_i удовлетворяют (6).

Действительно, x^0 отличается от любой смежной вершины x^l значением только одной координаты x_l. Поскольку точка x^l лежит в плоскости α, то $c_1 x_1^l + c_2 x_2^l + \dots + c_n x_n^l + d_n = 0$. Если в векторе x^l координата $x_l = 0$, то $x_l^0 = 1$. По построению плоскости α в этом случае $c_l = 1$. Значит сумма (7) отличается от суммы (6) только слагаемым $c_l x_l$: в выражении (6) $c_l x_l = 0$, а в (7) $c_l x_l^0 = 1$. Если же в векторе x^l координата $x_l = 1$, то $x_l^0 = 0$. Но тогда $c_l = -1$, $c_l x_l = -1$, а $c_l x_l^0 = 0$. А так как суммы (6) и (7) различаются в одном слагаемом $c_l x_l$, а $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d_n = 0$, то $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^0 + d_n = 1$. В силу того, что точка x^0 и смежная с ней вершина x^l выбраны произвольным образом, тождество (7) доказано.

Рассмотрим теперь точку y^0. Подставляя вершины Q_2^{n+1}, смежные с ней, в уравнение плоскости α в пространстве R^{n+1}, получаем:

1) Для вершин $y^1, y^2, \dots, y^n$
$$(c_1 x_1^i + c_2 x_2^i + \dots + c_n x_n^i + d_n) - d_n + c_{n+1} y_{n+1}^0 + d_{n+1} =$$
$$= c_{n+1} y_{n+1}^0 + d_{n+1} - d_n.$$

В случае, если $y^0_{n+1}=1$, то по утверждению теоремы $c_{n+1}=1$.

Тогда для выполнения условия

$$c_{n+1}y^0_{n+1}+d_{n+1}-d_n=0$$

положим $d_{n+1}=d_n-1$.

Если $y^0_{n+1}=0$, то по построению $c_{n+1}=-1$. Тогда $d_{n+1}=d_n$.

2) Для вершины y^{n+1}

$$(c_1x^0_1+c_2x^0_2+...+c_nx^0_n+d_n)-d_n+c_{n+1}\bar{y}^0_{n+1}+d_{n+1}=$$
$$=1-d_n+d_{n+1}+c_{n+1}\bar{y}^0_{n+1}.$$

В случае $y^0_{n+1}=1$, учитывая, что $d_{n+1}=d_n-1$, имеем $1-d_n+d_{n+1}+c_{n+1}\bar{y}^0_{n+1}=1-d_n+d_n-1=0$, т.е. y^{n+1} удовлетворяет уравнению плоскости при $y^0_{n+1}=1$. Если же $y^0_{n+1}=0$, то так как $d_{n+1}=d_n$ и $c_{n+1}=-1$, имеем

$$1-d_n+d_{n+1}-c_{n+1}\bar{y}^0_{n+1}=$$
$$=1-d_n+d_n-1=0,$$

т.е. y^{n+1} удовлетворяет уравнению плоскости α и при $y^0_{n+1}=0$. Таким образом, уравнение плоскости α, проходящей через вершины Q_2^{n+1}, смежные с произвольной вершиной $y\in B_{n+1}$, имеет вид (5).

Теорема 2 доказана.

Определение. Две точки x^1 и $x^2\in B_k$ назовем n – смежными, если они различаются значениями точно n своих координат.

Из определения следует, что если точки x^1 и $x^2\in B_k$ являются n-смежными, то $\sum\limits_{i=1}^{k}\left|x^1_i-x^2_i\right|=n$. Кроме того, легко показать, что для точки $x^0\in B_k$ имеется ровно $\binom{k}{n}$ n-смежных вершин многогранника Q_2^k $(n\le k)$. Действительно, точек x^i, n-смежных с точкой x^0, можно найти ровно столько, сколько способов выбрать наборов по n из k. А таких способов всего $N=\binom{k}{n}=\frac{k!}{n!(k-n)!}$. Множество вершин многогранника Q_2^k, n – смежных с вершиной x^0, обозначим $X^{(n)}\left(x^0\right)$. Таких множеств $X^{(n)}\left(x^0\right)$, как следует из определения n-смежности, всего k.

Рассмотрим точку $x^0\in B_k$. Проведем гиперплоскости $\alpha^{(i)}$ через множества вершин многогранника Q_2^k, i – смежных с x^0, $i\in J_k$.

Теорема 3. *Уравнение гиперплоскости $\alpha^{(i)}$, проходящей через вершины многогранника Q_2^k, i-смежные с вершиной $x^0=(x^0_1,x^0_2,...,x^0_k)\in B_k$, имеет следующий вид:*

$$c_1x_1+c_2x_2+...+c_kx_k+d^i_k=0, \tag{8}$$

где c_i удовлетворяют условию (6), а $d^{(i)}_k=d^1_k+i-1$, d^1_k получается подстановкой в (8) произвольной вершины Q_2^k, 1-смежной с x^0.

Доказательство теоремы проведем по индукции. Справедливость утверждения для $i=1$ (т.е. случая 1-смежных вершин) следует из доказанной выше теоремы 1.

Покажем теперь, что из справедливости теоремы для $i=n<k$ следует ее справедливость для $i=n+1$. Пусть $x\in X^{(n)}(x^0)$ – множество вершин Q_2^k, n-смежных с x^0, $X^{(n)}=\left\{x^1,x^2,...,x^N\right\}$, $N=\begin{pmatrix}k\\n\end{pmatrix}$.

Пусть для всех $x\in X^{(n)}$ справедливо соотношение

$$c_1x_1+c_2x_2+...+c_kx_k+d^n_k=0, \tag{9}$$

где c_i, $i\in I_k$ и d^n_k удовлетворяют условиям теоремы 3. Рассмотрим множество $X^{(n+1)}\left(x^0\right)=\left\{x^1,x^2,...,x^M\right\}$, $M=\binom{k}{n+1}$, содержащее вершины Q_2^k, $(n+1)$-смежные с x^0. По определению n-смежности для всякой точки $x^i\in X^{(n)}(x^0)$ существует точка $x^j\in X^{(n+1)}(x^0)$, которая отличается от x^0 значениями тех же координат, что и x^i, а, кроме того, еще одной координаты x_t. Поскольку для $x^i\in X^{(n)}(x^0)$ справедливо соотношение (9), то

$$c_1x^i_1+c_2x^i_2+...+c_tx^i_t+...+c_kx^i_k+d^n_k=0.$$

Но $x^j\in X^{(n+1)}\left(x^0\right)$ отличается от x^0 значениями тех же координат, что и $x^i\in X^{(n)}$, за исключением x_t. Тогда $c_1x^j_1+c_2x^j_2+...+c_tx^j_t+...+c_kx^j_k+d^n_k=$

$$=\sum_{l=1}^{k}c_lx^i_l+d^n_k+c_tx^j_t-c_tx^i_t=c_t(x^j_t-x^i_t).$$

В случае, если $x^0_t=1$, а значит и $x^i_t=1$, так как по значению t-й координаты x^i и x^0 совпадают, то $c_t=1$ и $x^j_t=0$. Если же $x^0_t=x^i_t=0$, то $c_t=-1$ и $x^j_t=1$. Тогда $c_t(x^j_t-x^i_t)=-1$. Следовательно,

$$\sum_{l=1}^{k}c_lx^j_l+d^n_k=-1,$$

$$\sum_{l=1}^{k}c_lx^j_l+d^n_k+1=\sum_{l=1}^{k}c_lx^j_l+d^{n+1}_k=0.$$

А это значит, что точка $x^j\in X^{(n+1)}(x^0)\in B_k$ лежит на плоскости $\alpha^{(n+1)}$, описываемой уравнением $\sum\limits_{l=1}^{k}c_lx_l+d^{n+1}_k=0$. В силу произвольности выбора $x^j\in X^{(n+1)}(x^0)$ утверждение теоремы 3 доказано.

Рассмотрим теперь некоторые экстремальные соотношения для функций, заданных на множестве вершин Q_2^k, n-смежных с вершиной x^0:

$$X^{(n)}(x^0) = B_k \cap \alpha^{(i)} .$$

Рассмотрим класс функций вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i . \qquad (10)$$

Определим минимум функции $f(x)$ на множестве $X^{(n)}(x^0)$. Введем обозначения: $I = \{i_1, i_2, ..., i_p\} \subset I_k$ - множество индексов таких, что $x_{i_s}^0 = 0$ и $c_{i_s} < 0$, а также таких, что $x_{iS}^0 = 1$ и $c_{iS} \geq 0, s \in J_p$. $J = \{j_1, j_2, ..., j_q\} \subset J_k$ — множество индексов таких, что $x_{jS}^0 = 0$ и $c_{jS} \geq 0$, и таких, что $x_{jS}^0 = 1$ и $c_{jS} < 0, s \in J_q$. Пусть, кроме того, множества I и J таковы, что

$$\left|c_{i_1}\right| \leq \left|c_{i_2}\right| \leq ... \leq \left|c_{iP}\right|, \quad \left|c_{j_1}\right| \geq \left|c_{j2}\right| \geq ... \geq \left|c_{j_q}\right| .$$

Очевидно, $I \cup J = J_k, I \cap J = \varnothing, p + q = k$.

Лемма 1. Минимум функции $f(x)$ вида (6) на множестве $X^{(n)}(x^0)$ достигается в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) \subset X^{(n)}(x^0)$, такой что

$$x_{ml}^* = \begin{cases} x_{ml}^0, l = 1,2,...,k-n; \\ 1 - x_{ml}^0, l = k-n+1,...,k; \end{cases} \quad l \in J_k,$$

а последовательность $\{m_1, m_2, ..., m_k\}$ определяется как

$$m_l = \begin{cases} j_l, \ l = 1,2,...,q; \\ i_{l-q}, \ l = q+1,...,k; . \end{cases}$$

Доказательство проведем по индукции. Покажем вначале справедливость утверждения для множества $X^{(t)}(x^0)$ при $i = 1$. Рассмотрим точку $x^* \in X^{(l)}(x^0)$, такую что

$$x_{m_L}^* = \begin{cases} x_{m_L}^0, \ l = 1,2,...,k-1; \\ 1 - x_{m_L}^0, \ l = k. \end{cases}$$

Пусть $y \in X^{(l)}(x^0)$, $y \neq x^*$, $y_l = x_i^0$, $i \in J_k$, $i \neq i_1$, $y_{i_1} = 1 - x_{i_1}$, $i_1 \neq m_k$. Покажем, что минимум функции $f(x)$ вида (10) достигается в точке x^*. Рассмотрим разность

$$f(x^*) - f(y) = c_{m_k}(x_{m_k}^* - y_{m_k}) + c_{i_1}(x_{i_1}^* - y_{i_1}) . \ (11)$$

Пусть $I \neq \varnothing$. Тогда $m_k \in I$ и имеет место

$$x_{m_k}^* = 1, c_{m_k} < 0, \ \ y_{m_k} = 1 - x_{m_k}^* = 0,$$

или $x_{m_k}^* = 0, c_{m_k} \geq 0, y_{m_k} = 1 - x_{m_k}^* = 1$.

Подставляя эти значения в первое слагаемое, получаем $c_{m_k}(x_{m_k}^* - y_{m_k}) = -\left|c_{m_k}\right| < 0$.

Отметим, что по построению множества I и последовательности $\{m_1, m_2, ..., m_k\}$: $\left|c_{m_k}\right| = \max_{i \in I} |c_i|$.

Рассматривая второе слагаемое правой части (11), имеем 2 случая:

1) $i_1 \in I$. Это значит, что

$$x_{i_1}^* = 0, c_{i_1} < 0, y_{i_1} = 1 - x_{i_1}^* = 1,$$

или $x_{i_1}^* = 1, c_{i_1} \geq 0, y_{i_1} = 1 - x_{i_1}^* = 0$.

Тогда $c_{i_1}(x_{i_1}^* - y_{i_1}) = \left|c_{i_1}\right|$.

2) $i_1 \in J$. В этом случае $x_{i_1}^* = 1, c_{i_1} < 0, y_{i_1} = 1 - x_{i_1}^* = 0$, или $x_{i_1}^* = 0, c_{i_1} \geq 0, y_{i_1} = 1 - x_{i_1}^* = 1$,

$$c_{i_1}(x_i^* - y_{i_1} = -\left|c_{i_1}\right| .$$

В обоих случаях $f(x^*) - f(y) \leq 0$.

Пусть теперь $I = \varnothing$. Тогда $m_k \in J, i_1 \in J$,

$$x_{m_k}^* = 1, c_{m_k} \geq 0, y_{m_k} = 0,$$

или $x_{m_k}^* = 0, c_{m_k} < 0, y_{m_k} = 1$.

Первое слагаемое правой части (11) равно

$$c_{m_k}(x_{m_k}^* - y_{m_k}) = \left|c_{m_k}\right| .$$

В этом случае по построению множества J и последовательности $\{m_1, m_2, ..., m_k\}$:

$$\left|c_{m_k}\right| = \min_{i \in J} |c_i| .$$

Так как $i \in J$, то $x_{i_1}^* = 0, c_{i_1} \geq 0, y_{i_1} = 1$, или $x_{i_1}^* = 1, c_{i_1} < 0, y_{i_1} = 0$.

Второе слагаемое правой части (7) при этом равно $c_{i_1}(x_{i_1}^* - y_{i_1}) = -\left|c_{i_1}\right|$.

Тогда $f(x^*) - f(y) = \left|c_{m_k}\right| - \left|c_{i_1}\right| \leq 0$.

Приведенные рассуждения доказывают лемму 2 для случая *i=1.*

Покажем теперь, что из истинности утверждения для $i = n < k$ следует его справедливость для $i = n + 1$.

Пусть минимум функции *f(x)* вида (10) на множестве $X^{(n)}(x^0)$ достигается в точке x^*, такой что

$$x_{ml}^* = \begin{cases} x_{ml}^0, \ l = 1,2,...,k-n, \\ 1 - x_{ml}^0, \ l = k-n+1,...,k, \end{cases}$$

$$m_l = \begin{cases} j_l, \ l = 1,2,...,q, \\ i_{l-q}, \ l = q+1,...,k. \end{cases}$$

Так как функция $f(x)$ вида (10) является сепарабельной, то поиск ее минимума на множестве $X^{(n)}(x^0)$ заключается в выборе n коэффициентов c_i и изменении значений соответствующих n координат точки x^0 таким образом, чтобы $f(x)$

достигла минимума. По сравнению с поиском минимума $f(x)$ на множестве $X^{(n)}(x^0)$ поиск ее минимума на множестве $X^{(n+1)}(x^0)$ предполагает выбор еще одного коэффициента c_i и изменение значения соответствующей координаты точки x^0. Так как по предположению n координат точки x^0 уже изменены, необходимо выбрать и изменить $n+1$ координату. Для этого рассмотрим множества $\bar{I}$ и $\bar{J}$, которые определим следующим образом: $\bar{I} \subset I$ – множество индексов из I, соответствующие значения координат которых не изменены при изменении n значений координат точки x^0. $\bar{J} \subset J$ – аналогичное подмножество индексов из J. Тогда соответствующие соотношения для коэффициентов c_i имеют вид:

$$\left|c_{i_1}\right| \le \left|c_{i_2}\right| \le \ldots \le \left|c_{i_{\bar{p}}}\right|, \quad \bar{p} = card\ \bar{I} = \left\{i_1, \ldots, i_{\bar{p}}\right\},$$

$$\left|c_{j_1}\right| \ge \left|c_{j_2}\right| \ge \ldots \ge \left|c_{j_{\bar{q}}}\right|, \quad \bar{q} = card\ \bar{J} = \left\{j_1, \ldots, j_{\bar{q}}\right\}.$$

Далее задача становится аналогичной рассмотренной в первой части леммы 1. Необходимо выбрать один коэффициент c_i и изменить значение соответствующей координаты.

Приводя рассуждения, сходные с приведенными в первой части леммы 1, получаем, что необходимо изменить значение координаты с индексом $i_{\bar{p}}$ в случае, если $\bar{I} \ne \varnothing$, и координаты с индексом $i_{\bar{q}}$, если $\bar{I} = \varnothing$. Но из этого следует, что минимум функции $f(x)$ вида (10) на множестве $X^{(n+1)}(x^0)$ достигается в точке x^* с координатами:

$$x^*_{m_l} = \begin{cases} x^0_{m_l}, & l = 1,2,\ldots,k-n-1, \\ 1 - x^0_{m_l}, & l = k-n,\ldots,k, \end{cases}$$

где последовательность $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ такова, что

$$m_l = \begin{cases} j_l, & l = 1,2,\ldots,q, \\ i_{l-q}, & l = q+1,\ldots,k. \end{cases}$$

Проведенные рассуждения доказывают лемму.

Замечание 1. Рассматривая задачу отыскания максимума $f(x)$ вида (10) на множестве $X^{(n)}(x^0)$, аналогичным образом можно доказать следующее утверждение.

Максимум функции $f(x)$ вида (10) на множестве достигается в точке $x^* = \left(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_k\right) \in X^{(n)}(x^0)$, такой что

$$x_{S_l} = \begin{cases} x^0_{S_l}, & l = 1,2,\ldots,k-n; \\ 1 - x^0_{S_l}, & l = k-n+1,\ldots,k; \end{cases}$$

а последовательность $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ определяется как

$$S_l = \begin{cases} i_l, & l = 1,2,\ldots,p; \\ j_{l-p}, & l = p+1,\ldots,k; \end{cases}$$

$$p = card\ I, \quad q = card\ J, \quad p + q = k.$$

Рассмотрим теперь функцию вида

$$g(x) = \left\|x - c\right\|^2, \tag{12}$$

где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in R^k$, $x \in R^k$.

Определим минимум функции $g(x)$ вида (12) на множестве $X^{(n)}(x^0)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Минимум функции $g(x)$ вида (12) на множестве $X^{(n)}(x^0)$ достигается в точке

$$x^* = \left(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_k\right) \in X^{(n)}(x^0),$$

такой что $x^*_{S_l} = \begin{cases} x^0_{S_l}, & l = 1,2,\ldots,k-n; \\ 1 - x^0_{S_l}, & l = p+1,\ldots,k; \end{cases}$

а последовательность $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ определяется как

$$S_l = \begin{cases} i_l, & l = 1,2,\ldots,p; \\ j_{l-p}, & l = p+1,\ldots,k;. \end{cases}$$

Доказательство:

$$\left\|x - c\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i x_i.$$

Так как для всех $x \in B_k$ $x_i^2 = x_i$, имеем

$$\min_{x \in X^{(n)}(x^0)} \left\|x - c\right\|^2 =$$

$$= \min_{x \in X^{(n)}(x^0)} \left\{\sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{i=1}^{k} (c_i - \frac{1}{2}) x_i\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i^2 + 2 \min_{x \in X^{(n)}(x^0)} \left\{-\sum_{i=1}^{k} (c_i - \frac{1}{2}) x_i\right\}.$$

Очевидно,

$$\arg \min_{x \in X^{(n)}(x^0)} \left\{-\sum_{i=1}^{k} (c_i - \frac{1}{2}) x_i\right\} =$$

$$= \arg \max_{x \in X^{(n)}(x^0)} \sum_{i=1}^{k} (c_i - \frac{1}{2}) x_i.$$

В соответствии с леммой 1 и замечанием к ней указанные экстремумы достигаются в точке $x^* \in X^{(n)}(x^0)$, такой что

$$x^*_{S_l} = \begin{cases} x^0_{S_l}, & l = 1,2,\ldots,k-n; \\ 1 - x^0_{S_l}, & l = p+1,\ldots,k; \end{cases}$$

а последовательность $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ имеет вид:

$$S_l = \begin{cases} i_l, & l = 1,2,\ldots,p; \\ j_{l-p}, & l = p+1,\ldots,k;. \end{cases}$$

Опираясь на доказанные леммы 1 и 2, исследуем некоторые экстремальные свойства функции $\overline{\varphi}(x)$, $\varphi(x)$ на множествах $X^{(n)}(x^0)$, B_k.

Теорема 4. *Пусть функция $\overline{\varphi}(x)$ задана на множестве B_k, а $\varphi(x)$ — ее выпуклое дифференцируемое продолжение на выпуклое замкнутое множество $X \supset B_k$. Тогда $\forall x \in X$*

$$\min_{x \in X^{(n)}(x^0)} \overline{\varphi}(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{m_i}} x^*_{m_i},$$

где

$$x^*_{m_l} = \begin{cases} x^0_{m_l}, & l = 1,2,\ldots,k-n; \\ 1 - x^0_{m_l}, & l = k-n+1,\ldots,k; \end{cases} \tag{13}$$

последовательность $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ определяется как

$$m_l = \begin{cases} j_l, & l = 1,2,\ldots,q, \\ i_{l-q}, & l = q+1,\ldots,k. \end{cases} \tag{14}$$

$\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$ таковы, что $x^0_{js} = 0$ и $c_{js} \ge 0$; $x^0_{js} = 1$ и $c_{js} < 0$, $S \in J_q$; $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ таковы, что $x^0_{is} = 1$ и $c_{is} \ge 0$; $x^0_{is} = 0$ и $c_{js} < 0$, $S \in J_p$; а также

$$\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{i_1}}\right| \le \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{i_2}}\right| \le \ldots \le \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{i_p}}\right|, \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{j_1}}\right| \ge \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{j_2}}\right| \ge \ldots \ge \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{j_q}}\right|. \tag{16}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой, доказанной в [1] для произвольного дискретного множества $E \subset R^k$. В соответствии с ней для $\overline{\varphi}(x)$, заданной на $E \subset R^k$, и для $\varphi = conv\overline{\varphi}$ на выпуклом замкнутом множестве $X \supset E$, справедливо: $\forall x \in X$

$$\min_{y \in E} \overline{\varphi}(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} y_i.$$

Так как $X^{(n)}(x^0)$ — дискретное множество в R^k, $X^{(n)}(x^0) \subset B_k \subset X \subset R^k$, а X — выпуклое замкнутое множество, то

$$\min_{y \in X^{(n)}(x^0)} \overline{\varphi}(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \min_{y \in X^{(n)}(x^0)} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} y_i.$$

Определив минимум в правой части последнего соотношения в соответствии с леммой 1, приходим к справедливости утверждения теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть функция $\overline{\varphi}(x)$ задана на множестве B_k, а $\varphi(x)$ — ее выпуклое дифференцируемое продолжение на выпуклое замкнутое множество $X \supset B_k$. Для того чтобы точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in B_k$ была точкой минимума функции $\overline{\varphi}(x)$ на множестве $X^{(n)}(x^0)$, достаточно, чтобы*

$$\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{m_l}} x^*_{m_l} - (\nabla\varphi(x), x) = 0,$$

где x^* удовлетворяет (13), а последовательность $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ определяется с помощью соотношений (14) – (16).

Доказательство проведем на основании доказанной в [1] теоремы о том, что если $\overline{\varphi}$ определена на дискретном множестве $E \subset R^k$, а φ — ее выпуклое дифференцируемое продолжение на $X \supset E$, то для того, чтобы $x \in E$ была точкой минимума $\overline{\varphi}(x)$ на E, достаточно, чтобы

$$\min_{y \in E} \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} y_i - (\nabla\varphi(x), x) = 0.$$

Используя результат этой теоремы, а также лемму 1 о минимуме линейной функции на множестве $X^{(n)}(x^0)$, приходим к справедливости утверждения теоремы 5.

Пусть теперь $\varphi(x)$ — сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ продолжение функции $\overline{\varphi}: B_k \to R^1$ на выпуклое замкнутое множество $X \supset B_k$. Обозначим

$$y^* = \arg\min_{y \in X} \varphi(y). \tag{17}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $\varphi(x)$ — сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ продолжение функции $\overline{\varphi}: B_k \to R^1$ на выпуклое замкнутое множество $X \supset B_k$. Тогда*

$$\min_{x \in X^{(n)}(x^0)} \overline{\varphi}(y) \ge \varphi(y^*) + \rho\|x^* - y^*\|^2,$$

где y^* определяется соотношением (17), а x^* определяется как

$$x^*_{S_l} = \begin{cases} x^0_{S_l}, & l = 1,2,\ldots,k-n; \\ 1 - x^0_{S_l}, & l = k-n+1,\ldots,k; \end{cases} \tag{18}$$

последовательность $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ имеет вид

$$S_l = \begin{cases} i_l, & l = 1,2,\ldots,p; \\ j_{l-p}, & l = p+1,\ldots,k; \end{cases} \tag{19}$$

последовательности $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, $\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$ таковы, что

$$\left|y^*_{i_1}\right| \le \left|y^*_{i_2}\right| \le \ldots \le \left|y^*_{i_p}\right|,$$

$$\left|y^*_{j_1}\right| \ge \left|y^*_{j_1}\right| \ge \ldots \ge \left|y^*_{j_1}\right|,$$

а также $x^0_{js} = 0$ и $y^*_{js} \ge 0$; $x^0_{js} = 1$ и $y^*_{js} < 0$, $S = 1,2,\ldots,q$;

$x_{is}^0 = 1$ *и* $y^*_{is} \geq 0$; $x_{is}^0 = 0$ *и* $y^*_{is} < 0$, $S = 1,2,\dots, p$.

Доказательство следует из доказанной в [1] теоремы о том, что если $\varphi(x)$ - сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ продолжение функции $\overline{\varphi}(x)$, заданной на дискретном множестве E , на выпуклое замкнутое множество $X \supset E$, то

$$\min_{x \in E} \varphi(y) \geq \varphi(y^*) + \rho \min_{x \in E} \|x - y^*\|^2 .$$

Определив с помощью леммы 2 минимум $\|x - y^*\|^2$, докажем справедливость теоремы 6.

Опираясь на утверждения о свойствах выпуклых и сильно выпуклых функций на дискретных множествах, доказанные в [1], а также на леммы 1 и 2, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 7. *Пусть $\varphi(x)$ - сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ дифференцируемое продолжение функции $\overline{\varphi} : B_k \to R^1$ на выпуклое замкнутое множество $X \supset B_k$. Тогда для любого $x \in X$*

$$\min_{y \in X^{(n)}(x^0)} \overline{\varphi}(y) \geq \varphi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\varphi(x)\|^2 \quad +$$

$$+ \rho \left\| y^* - x + \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) \right\|^2 ,$$

где

$$y_{S_l}^* = \begin{cases} x_{S_l}^0 , & l = 1,2,\dots,k-n; \\ 1 - x_{S_l}^0 , & l = k-n+1,\dots,k; \end{cases} \tag{20}$$

последовательность $\{S_1, S_2,\dots,S_k\}$ удовлетворяет (15), а $\{i_1, i_2,\dots,i_p\}$ и $\{j_1, j_2,\dots, j_q\}$ таковы, что

$$\begin{aligned} &\left| x_{i_1} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) \right| \leq \left| x_{i_2} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) \right| \leq \dots \\ &\leq \left| x_{i_p} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) \right| ; \\ &\left| x_{j_1} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) \right| \geq \left| x_{j_2} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) \right| \geq \dots \\ &\geq \left| x_{j_q} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) \right| , \end{aligned} \tag{21}$$

а также $x_{i_S}^0 = 1$ *и* $x_{i_S} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) \geq 0,\ \ x_{i_S}^0 = 0$ *и*

$$x_{i_S} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) < 0,\ \ S = 1,2,\dots, p \tag{22}$$

$$x_{j_S}^0 = 0 \ \ и \ \ x_{j_S} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) \geq 0,\ \ x_{j_S}^0 = 1 \ \ и$$

$$x_{j_S} - \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x) < 0,\ \ S = 1,2,\dots,q .$$

Теорема 8. *Пусть $\overline{\varphi} : B_k \to R^1$, а $\varphi(x)$ - ее сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ дифференцируемое продолжение на выпуклое замкнутое множество $X \supset B_k$. Для того чтобы*

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*,\dots, x_k^* \right) \in X^{(n)}(x^0)$$

была точкой минимума функции $\overline{\varphi}(x)$ на множестве $X^{(n)}(x^0)$, достаточно, чтобы

$$\|\nabla \varphi(x^*)\|^2 \geq 4\rho^2 \left\| y^* - x^* + \frac{1}{2\rho} \nabla \varphi(x^*) \right\|^2 ,$$

где y^* удовлетворяет (20), а последовательность $\{S_1, S_2,\dots,S_k\}$ из (20) – соотношениям (21) – (22) при $x = x^*$.

Отметим, что утверждения теорем о свойствах функций на множествах вершин многогранника Q_2^k , n -смежных с данной, могут быть использованы при реализации различных методов оптимизации. С их помощью можно получать оценки минимума функций на множествах $X^{(n)}$ при работе различных алгоритмов, использующих схемы ветвления.

Литература: *1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Гребенник И.В.* Экстремальные задачи на множестве размещений. Х., 1991. 37с. (Препринт АН УССР/Ин-т пробл. машиностроения; 347). 2. *Яковлев С.В., Гребенник И.В.* О некоторых классах задач оптимизации на множествах размещений и их свойствах//Изв. вузов. Математика. 1991. №11. С.74-86. 3. *Стоян Ю.Г., Гребенник И.В., Емец О.А.* Комбинаторные множества размещений и их свойства. Х., 1990. 38с. (Препринт АН УССР/Ин-т пробл. машиностроения; 342). 4. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648с.

Поступила в редколлегию 14.03.2001

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Новожилова М.В.

Гребенник Игорь Валериевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системотехники ХНУРЭ. Научные интересы: дискретная оптимизация, вычислительные методы. Увлечение: волейбол. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр.Ленина, 14, тел. 40-93-06.