УДК 621.317.08:515.12:530.1

ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ХАУСДОРФОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю.П.Мачехин, *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, начальник лаборатории ННЦ "Институт метрологии", г. Харьков*

Обсуждаются основные принципы построения методов обработки результатов измерений в нелинейных динамических системах. Изучается вопрос описания результатов измерений в хаусдорфовом пространстве с использованием фрактальной размерности для их количественной оценки.

The main principles of construction of the methods of processing measurement results in non-linear dynamic systems are considered. The question of description of measurement results in hausdorff space using fractal dimensionality for their quantitative estimation is investigated.

Введение

Методы анализа и обработки результатов измерений, которые применяются на практике [1], разработаны для типовых условий проведения измерений. Основные из них заключаются в том, что, во-первых, измеряемая физическая величина должна характеризоваться единственным значением [2] и, во-вторых, характеристики наблюдаемого случайного разброса результатов измерений должны оцениваться методами математической статистики [3]. При этом предполагается, что разброс результатов измерений можно описать либо нормальным законом распределения, либо каким-нибудь другим распределением, "хвосты" которого спадают не хуже, чем у нормального [4].

В тех случаях, когда эти условия не выполняются, разрабатываются специальные методы, учитывающие физические особенности поведения измеряемой величины и использующие адекватный математический аппарат. Так, например, для анализа и обработки результатов измерений нестабильности частоты стандартов частоты был разработан, на основе теории стационарных приращений, метод дисперсии Аллана [5].

В работах [6, 7] обсуждалась задача оценки результатов измерений в нелинейных динамических системах. В настоящей статье развиваются основные принципы методов анализа и обработки результатов измерений параметров нелинейных динамических систем, находящихся в состоянии простого или странного аттрактора [8].

Практика теоретических исследований нелинейных динамических систем показала эффективность качественных методов, основанных на представлении и описании поведения динамических систем в фазовых пространствах [8]. С учетом этих качественных методов в настоящей работе предложено, для решения задач анализа результатов измерений в нелинейных динамических системах, применять количественные методы, основанные на свойствах множеств в топологических пространствах. В работах [9,10] была сформулирована система аксиом теории измерений, основанная на представлении результатов измерений в топологическом пространстве. Такое представление позволяет анализировать результаты измерений, основываясь на свойствах множеств в выбранном метрическом пространстве и топологических методах анализа свойств этих множеств. В [11] множества результатов измерений было предложено анализировать в хаусдорфовом топологическом пространстве. Было показано, что в этом случае можно использовать хаусдорфову размерность множества как параметр, позволяющий количественно оценивать исследуемое множество.

Свойства хаусдорфова пространства, обеспечивающие описание результатов измерений

Результаты многократных измерений параметров исследуемого объекта, полученные в одной и той же физической ситуации, можно представить в виде элементов x множества X, для которых $x \in X$.

Известно [12], что под топологическим пространством понимается пара $(X, \Im)$, где X – множество и $\Im$ – семейство подмножеств множества X. Множество X в этом случае называется пространством, его элементы – точками пространства, а семейство $\Im$ открытых подмножеств пространства X – топологией на X.

Из всех исследованных топологических пространств для задач анализа результатов измерений можно выделить T_2-пространство или хаусдорфово пространство. В соответствии с определением [12], пространство X является хаусдорфовым, если для каждой пары различных точек множества x_1, $x_2 \in X$ существуют открытые множества U_1, U_2 такие, что $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ [12]. Таким образом, по определению основным свойством хаусдорфова пространства является отделимость элементов этого множества друг от друга.

Множества результатов измерений можно представить в хаусдорфовом пространстве, исходя из следующих утверждений.

Результаты многократных измерений параметров одного и того же объекта представляют собой множество несовпадающих точек $x_i \in X$ $(i=1...n)$. Все результаты измерений, как элементы множества, отделены друг от друга непересекающимися окрестностями, поскольку одной из координат пространства является время. Это значит, что точки множества, представляющие результаты измерений x_i, окружены открытыми множествами $U \in B(x_i)$ и $V \in B(x_j)$ такими, что $U \cap V = \varnothing$ (если $i \neq j$). Это подтверждает существование отделимости у множества результатов измерений, а значит, доказывает, что множество результатов измерений можно рассматривать в хаусдорфовом пространстве [11].

Хаусдорфово множество имеет две принципиальные особенности, которые можно использовать при анализе результатов измерений. К этим особенностям относятся:

метрика хаусдорфова пространства [13] отлична от евклидовой метрики;

размерность хаусдорфова пространства может быть дробной и не совпадать с топологической размерностью [14].

Если метрика евклидового пространства X [12] позволяет ввести для последовательности точек $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ предел $x \in X$, который определяется по мере $d(x_n, x)$, сходящейся к нулю, то есть

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n; x) = 0,$$

то из этого следует, что в метрическом пространстве можно использовать преобразование $T: X \to X$, которое называется сжимающим отображением, если существует такое число s, $0<s<1$, что

$$d(T(x), T(y)) \leq s d(x, y).$$

Основные результаты теории сжимающих отображений в метрических пространствах связаны с неподвижными точками таких отображений [13]. То есть для отображения T точка x называется неподвижной, если выполняется условие

$T(x)=x.$

Аналогичным образом метрика хаусдорфова пространства [13] позволяет ввести понятие предела последовательности множеств. Так, если E_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ – последовательность компактных множеств, вложенных друг в друга:

$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots,$

а E представляет пересечение множеств E_n:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n,$$

то последовательность множеств E_n сходится к E в хаусдорфовой метрике:

$$\lim_{n\to\infty} E_n = E.$$

При этом метрика Хаусдорфа $H(E_n, E)$ между двумя множествами удовлетворяет предельному переходу:

$$\lim_{n\to\infty} H(E_n, E) = 0.$$

Свойство метрики пространства, а именно свойство сходимости, играет важную роль при анализе множества результатов измерений. Применительно к хаусдорфовым множествам результатов измерений свойство сходимости означает, что итогом преобразования (сжатия) множества результатов измерений является предельное множество, которое описывает множество возможных действительных значений измеряемой величины.

Это значит, что применительно к задаче анализа результатов измерений свойство хаусдорфова исходного множества результатов измерений позволяет построить предельное множество с диаметром δE за счет использования сжимающего преобразования T. У этого сжимающего преобразования существует неподвижная точка E, которая удовлетворяет уравнению $T(E)=E$.

Существование неподвижной точки у сжимающего преобразования множества результатов измерений обусловлено не особенностями используемого математического преобразования, а существованием у измеряемой величины действительного значения.

Обратим внимание, что все используемые статистические методы преобразования множеств результатов измерений выполняются с целью определения предельного множества, которое характеризует возможные действительные значения измеряемой величины. Так, основываясь на том, что статистические характеристики результатов измерений z полностью описываются функцией плотности вероятностей $p(z)$, можно осуществить усреднение или сжатие измерительной информации в соответствии с выбранным интегральным преобразованием:

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz p(z) z.$$

Таким же образом определяются диаметры жеств, включающих в себя с установленной ве постью возможные значения измеряемой вели а именно, дисперсия как диаметр этого множ вычисляется тоже путем сжатия исходного м ства по другому закону:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (z - \langle z \rangle)^2 p(z) dz.$$

Следовательно, используемые методы о среднего значения, дисперсии среднего знач а также дисперсии результатов наблюдений ставляют собой определение размера одноме множеств, вложенных друг в друга, элементы рых максимально приближаются к действител значению. То есть предельное множество, оп ляемое на основе вероятностных оценок, пре ляет собой наиболее вероятное множество з ний измеряемой величины. Именно это знач которое удовлетворяет условию неподвижно ки преобразования, и рассматривается как д вительное (или действительные) значение ряемой величины.

Так, если воздействовать на $\langle z \rangle$ выбра преобразованием, будет получена та же сам личина, то есть

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle z \rangle p(z) dz.$$

Вторая особенность хаусдорфова множ заключается в том, что множество может име целую (фрактальную) размерность [14]. Сл отметить, что, несмотря на то что само понятие тала еще до конца не установлено, в литер используются, как минимум, три определени

по определению Мандельброта [15], фрак это структура, состоящая из частей, которые ком-то смысле подобны целому;

фракталом называется множество, размер Хаусдорфа-Безиковича которого строго боль топологической размерности;

объединение непересекающихся множест лученных масштабированием оригинала (и ного множества), представляет собой фрактал

В работе используется понятие фракта множества, размерность Хаусдорфа-Безик (фрактальная размерность хаусдорфова мно ва) которого строго больше его топологическо мерности. Численное значение размерности в себе информацию о характере случайных вар значений элементов множества, поэтому ра ность исходного множества результатов изме можно использовать для построения предел множества. Следуя известным результатам а за фрактальных структур, которые могут быт детерминированными, так и случайными, в те приведен только общий алгоритм опреде фрактальной размерности множества, незав от природы рассматриваемого фрактала.

Особенности фрактального представления результатов измерений

Самый общий подход к вычислению размерности любого фрактального множества заключается в вычислении меры этого множества [13]. Для определения меры величины множества обычно используется метод покрытия пробной функцией (фигурой) исследуемого множества [17]. Если используется пробная функция в виде

$$h(\delta)=\gamma(d)\delta^{d}$$

(здесь δ – характерный размер покрытия, то есть длина стороны квадрата, диаметр круга и т.д.; d – значение размерности меры, в общем случае может быть нецелым числом; $\gamma(d)$ – константа, которая зависит от формы пробной функции и не влияет на оценку меры множества), то покрытие множества этой функцией позволяет определить точную нижнюю грань:

$$M_{d,\delta}=\inf\sum_{i=1}^{N}h_i(\delta),$$

где N – количество пробных функций, необходимых для покрытия множества.

Хаусдорф показал, что вычисление меры $M_{d,\delta}$ множества зависит от значения d, называемого размерностью хаусдорфова множества, то есть $M_{d,\delta}$ будет иметь конечное значение, отличное от 0 и ∞, если $d=D$ хаусдорфовой (фрактальной) размерности. Таким образом, мера множества равна

$$M_{D,\delta}=\gamma(D)\,N(\delta)\,\delta^{D}.$$

При $M_{D,\delta}/\gamma(D)=a$ размерность D определится из уравнения

$$D=-\frac{\log N(\delta)}{\log\delta}+\frac{\log a}{\log\delta}.$$

При $\delta\to+0$ $\log\delta\to-\infty$

$$D=-\frac{\log N(\delta)}{\log\delta}.$$

Таким образом, размерность D определяется по углу наклона графика $\log N(\delta)$ от $\log\delta$.

Фрактальное представление множества измерений обладает рядом преимуществ перед вероятностными методами, для которых в каждом конкретном случае требуется доказывать применимость выбранных законов распределения:

во-первых, фрактальное представление множества и расчет фрактальной размерности не связаны с вероятностными характеристиками случайного разброса результатов измерений и, следовательно, применимы в любых измерительных схемах и для любых объектов измерений;

во-вторых, применение фрактальной размерности возможно как в случае динамического хаоса, так и для случайных процессов, что позволяет с единых позиций проводить анализ результатов измерений в любых как линейных, так и нелинейных динамических системах;

в-третьих, любое значение фрактальной размерности множества результатов измерений позволяет осуществить сжатие измерительной информации, чтобы получить достоверную оценку действительного значения измеряемой величины.

Фактически при решении задачи анализа множества результатов измерений на основе их фрактальных свойств, так же как и в случае использования вероятностных характеристик, осуществляется сжимающее преобразование множества результатов измерений.

Для реализации сжимающего преобразования результатов измерений и вычисления предельного множества на основе фрактальной размерности необходимо сформулировать и описать количественные характеристики этой величины.

В общем случае фрактальная размерность D множества результатов измерений может иметь значения в интервале $1\leq D\leq 2$. Если D равно целому числу, то фрактальная размерность совпадает с топологической размерностью, а соответствующее исследуемое множество представляет собой гладкие кривые ($D=1$) или гладкие поверхности ($D=2$). Для случайных марковских процессов с независимыми приращениями, к которым относятся гауссовские винеровские процессы, фрактальная размерность реализации этих процессов равна $D=1{,}5$.

Если D принимает дробное значение, не совпадающее с 1,5, то исследуемый процесс не является марковским, а значит, обладает памятью (при анализе нестабильности частоты стабилизированных по частоте лазеров было получено, что $D<1{,}5$, то есть процесс стабилизации частоты у лазеров обладает памятью). Для задач анализа результатов измерений важными являются следующие особенности. При $D\to 1$ случайные изменения имеют относительно малую шумовую составляющую по сравнению с медленными изменениями измеряемой величины. При $D\to 2$ наоборот – случайный (шумовой) разброс результатов измерений соизмерим с величиной медленных изменений.

Таким образом, исходя из оценки величины размерности в разных ситуациях, можно смоделировать сжимающее преобразование.

Для случая евклидовых линий, для которых $D=1$, преобразование T должно обращать линию в линию, что возможно при следующем виде преобразования:

$$T=a^{1-D}.$$

Это подтверждает положение, что все евклидовы одномерные множества с топологической размерностью равной единице всегда являются неподвижными точками преобразовании.

Если рассматривать множества с размерностью $D=2$, то есть евклидовы поверхности, то в этом случае преобразование поверхности имеет неподвижную точку в виде самой поверхности, следовательно, преобразование T должно иметь вид

$T=(D-1)^{(D-1)}$.

Отсюда следует, что преобразование должно быть связано со свойствами самого множества. Так, для евклидовых множеств с целыми размерностями коэффициент преобразования равен единице и исходное множество является предельным множеством или неподвижной точкой, а любое другое множество, имеющее значение фрактальной размерности в интервале от 1 до 2, будет иметь только сжимающее преобразование с коэффициентом, всегда меньшим единицы. Так, например, при $D=1{,}5$ $T=(0{,}5)^{0,5}$, что представляет величину, явно меньшую единицы и, следовательно, будет приводить множество к сжатию.

Заключение

Основываясь на общем подходе к представлению результатов измерений в виде множеств топологических пространств с различной метрикой, в настоящей работе было предложено использовать для этих целей хаусдорфово пространство, характеризуемое метрикой, отличной от евклидовой метрики.

При реализации такого подхода появляется возможность применить для анализа результатов измерений особенности хаусдорфовых множеств. Поэтому в работе обсуждались пути построения методов анализа результатов измерений на основе фрактальной (хаусдорфовой) размерности, которая может быть дробной и не совпадать с топологической размерностью.

С учетом фрактального представления множеств результатов измерений предложен подход к построению сжимающих отображений множеств результатов измерений, которые позволяют оценивать диаметр множеств возможных действительных значений измеряемой величины.

Перспективность такого подхода заключается в том, что, поскольку фрактальный анализ множеств позволяет с единых позиций изучать случайные процессы различной физической природы, с его помощью можно будет расширить область корректного анализа результатов измерений на сложные нелинейные динамические системы.

Список литературы

1. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. -Л.: Энергоатомиздат, 1991. -301 с.
2. Руководство по выражению неопределенности измерения /Пер. с англ.; Под науч. ред. В.А.Слаева. -С.-Пб.: НПО "ВНИИМ им. Д.И.Менделеева", 1999. -134 с.
3. Фрумкин В.Д., Рубичев Н.А. Теория вероятностей и статистика в метрологии и измерительной технике. -М.: Машиностроение, 1987. -168 с.
4. Проханов Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. -495 с.
5. Allan D.W. Statistics of atomic frequency standards //Proc. IEEE. -1966. -V. 54. -P. 221–230.
6. Мачехин Ю.П. Обоснования методов статистической обработки результатов измерений в нелинейных динамических системах. Часть 1 //Український метрологічний журнал. -2003. -Вып. 4. -С. 15–21.
7. Мачехин Ю.П. Обоснования методов статистической обработки результатов измерений в нелинейных динамических системах. Часть 2 //Там же. -2004. -№ 1. -С. 6–7.
8. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. -382 с.
9. Марченко Б.Г., Щербак Л.М. Сучасна концепція побудови теорії вимірювань //Доповіді Національної академії наук України. -1999. -№ 10. -С. 85–88.
10. Марченко Б.Г., Щербак Л.М. Основи теорії вимірювань //Електроенергетика: Праці Інституту електродинаміки НАНУ. -Київ, 1999. -С. 221–230.
11. Мачехин Ю.П. Теоретическое обоснование применения фрактального анализа для изучения временных рядов //Метрологія та вимірювальна техніка (Метрологія-99): Наук. праці II Міжнар. наук.-техн. конф. у 2-х томах. Т. 1. -Харків: ХДНДІМ, 1999. -С. 38–41.
12. Энгелькинг Р. Общая топология /Пер. с англ. -М.: Мир, 1986. -744 с.
13. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории /Пер. с англ. -М.: Постмаркер, 2000. -352 с.
14. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. -М.: ИЛ, 1948. -231 с.
15. Фракталы в физике /Под ред. Л.Пьетронеро, Э.Тозатти. -М.: Мир, 1988. -С. 9–21.
16. Edgar G.A. Measure, Topology and Fractal Geometry. -New York: Springer-Verlag, 1990. -430 p.
17. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности /Пер. с франц. -М.: Мир, 1991. -366 с.