Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Математичне моделювання процесів перемішування, викликаних рухомими вихорами
(тема)

Виконав:
студент _2_ курсу, групи _ПМм-20-1
Шабратко Є.Ю.
(прізвище, ініціали)
Спеціальність
113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)
Керівник ____проф. Сидоров М.В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ _____ ____Тевяшев А.Д._____
(підпис) (прізвище, ініціали)

2021 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра _прикладної математики
Рівень вищої освіти _другий (магістерський)
Спеціальність _113 Прикладна математика
(код і повна назва)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _Прикладна математика
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____
(підпис)
"____" _____ 2021 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові _Шабратко Єлизаветі Юріївні
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи _Математичне моделювання процесів перемішування, викликаних рухомими вихорами

затверджена наказом по університету від 05 листопада 2021 р. № 1641 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2021 р.

3. Вихідні дані до роботи _математична модель руху в'язкої рідини

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
1. Аналіз предметної області
2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання
3. Програмна реалізація
4. Результати обчислювального експерименту
5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	8 – 14 листопада 2021 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	15 – 21 листопада 2021 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	22 – 28 листопада 2021 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	29 листопада – 5 грудня 2021 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	6 – 9 грудня 2021 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 грудня 2021 р.	виконано

Дата видачі завдання _8_ листопада 2021 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Сидоров М.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 61 с., 15 рис., 1 дод., 40 джерел.

МЕТОД ГАЛЬОРКІНА, МЕТОД R-ФУНКЦІЙ, ПРОЦЕС ПЕРЕМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ, РІВНЯННЯ НАВ'Є-СТОКСА, РУХОМИЙ ВИХОР, ТРАЄКТОРІЯ РУХУ ЛАГРАНЖЕВОЇ ЧАСТИНКИ, ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ.

Об'єкт дослідження – процеси перемішування у в'язкій рідині.

Мета роботи – застосування методу R-функцій та методу Гальоркіна для розв'язання задачі математичного моделювання процесу перемішування в'язкої рідини у напівкрузі рухомими вихорами.

Методи дослідження – метод Гальоркіна, метод R-функцій, метод фазової площини.

У кваліфікаційній роботі було розглянуто математичні моделі течії в'язкої рідини у напівкрузі. Течію викликано системою рухомих вихорів. На першому етапі задачі перемішування було визначено функції течії. До розв'язання задачі було застосовано метод R-функцій та метод Гальоркіна для нестаціонарних задач. На другому етапі був змодельований процес перемішування. За допомогою методу фазової площини проаналізовано ефективність перемішування.

Алгоритм розв'язання задачі було реалізовано за допомогою системи комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1. Обчислювальний експеримент проводився для різної кількісті вихорів та різних режимів обертання. За траєкторіями руху частинок проведено аналіз ефективності перемішування.

ABSTRACT

Introductory note: 61 pages, 15 figures, 1 appendix, 40 sources.

GALERKIN METHOD, *R*-FUNCTIONS METHOD, PROCESS OF MIXING A VISCOUS LIQUID, NAVIER-STOKES EQUATIONS, MOOVING WHIRL-POOL, TRAJECTORY OF MOTION OF A LAGRANGE PARTICLE, STREAM FUNC-TION.

Object of research – process of mixing a viscous liquid.

Purpose of work – use of the R-function method and Galerkin method to solve the problem of mathematical modeling of the process of mixing a viscous fluid in a semicircle by moving vortices.

Methods of research – Galerkin method, R-functions method and phase plane method.

In the qualification work were considered mathematical models of viscous fluid flow in a semicircle. The current is caused by a system of moving vortices. At the first stage of the mixing problem, were determined the flow functions. The R-functions method and the Galerkin method for non-stationary problems were used to solve the problem. In the second stage, was simulated the mixing process .The mixing efficiency was analyzed using the phase plane method.

The algorithm for solving the problem was implemented using the computer algebra system Mathematica 11.1. The computational experiment was performed for different numbers of vortices and different modes of rotation. The analysis of mixing efficiency was carried out according to the trajectories of particle motion.

ЗМІСТ

С.

Вступ 7

1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження 9

1.1 Математичні моделі в’язких течій 9

1.2 Методи чисельного аналізу течій в’язкої рідини 20

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі 26

1.4 Постановка задач дослідження 30

2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання 31

2.1 Структурний метод (метод R-функцій) в обчислювальній гідродинаміці 31

2.2 Методи дослідження поведінки динамічних систем на фазовій площині 40

2.3 Застосування структурного метода (метода R-функцій) при дослідженні процесів перемішування в’язкої рідини, викликаних рухомими вихорами 43

3 Програмна реалізація 47

3.1 Система комп’ютерної алгебри Mathematica 11.1 47

3.2 Алгоритм розв’язання задачі перемішування в’язкої рідини, викликаного рухомими вихорами 48

3.3 Опис програми 50

4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз 51

Висновки 55

Перелік джерел посилання 56

Додаток А Лістінг програми 60

ВСТУП

Актуальність теми. Задача моделювання течій в'язкої рідини виникає при дослідженні явищ в атмосфері, гідросфері, гідродинаміці, теплоенергетиці, біомедицині. Таким чином, дослідження руху в'язкої рідини має місце у прикладних задачах, зокрема, в задачах перемішування.

Проблема перемішування в'язкої рідини тісно пов'язана з сучасними концепціями хаотичної та регулярної динаміки. Ця проблема розглядалася у роботах [13, 33], де було доведено, що ламінарні течії за деяких умов можуть приводити до інтенсивного перемішування. Ці режими викликали великий інтерес з теоретичної та експериментальної точок зору.

Течія в'язкої рідини у більшості випадків описується за допомогою рівнянь Нав'є-Стокса [1, 2]. Особливістю цих рівнянь є нелінійність та наявність малого параметра при старшій похідній (величина обернена до числа Рейнольдса). Це призводить до того, що не завжди можна знайти розв'язок системи Нав'є-Стокса аналітично.

З розвитком обчислювальної техніки все частіше використовують математичне моделювання. Зазвичай для дослідження течії в'язкої рідини застосовують чисельні методи: скінченних різниць та скінченних елементів. Перевагою цих методів є те, що вони прості в реалізації, проте мають недолік – не універсальність відносно геометрії області, у якій розглядається задача. Сенс цих методів у тому, щоб описати складну область простіше складеними областями, наприклад, відрізками прямих. Більшість методів, які застосовуються при моделюванні задач перемішування, не можна застосувати для «непримітивних» областей. Тому виникає необхідність у використанні методу R-функцій. Цей метод був розроблений акад. НАН України В.Л. Рвачовим. Він допомагає точно врахувати геометрію області й аналітичну інформацію, що входить в постановку задачі моделювання фізико-математичного поля. В роботах [13, 15] було розглянуто задачу перемішування для кругової та квадратної області. Проте запропонований апарат у цих роботах не буде працювати у більш складних обла-

стях. Тому розробка нових методів чисельного аналізу задачі перемішування за допомогою методу R-функцій є актуальною, а отже, тема кваліфікаційної роботи також актуальна.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є застосування методу R-функцій та методу Гальоркіна для розв'язання задачі математичного моделювання процесу перемішування в'язкої рідини у напівкрузі рухомими вихорами

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі перемішування в'язкої рідини;

– ознайомитися з теоретичним відомостями методів R-функцій та Гальоркіна стосовно задач, пов'язаних з моделюванням течій в'язкої рідини;

– застосувати методи R-функцій та Гальоркіна до розв'язання задачі моделювання перемішування в'язкої рідини у напівкруговій області;

– розробити алгоритм розв'язання поставленої задачі;

– реалізувати розроблений алгоритм за допомогою математичного пакету Wolfram Mathematica 11;

– провести обчислювальний експеримент для тестової задачі;

– проаналізувати результати та знайти ефективний спосіб перемішування.

Об'єктом дослідження є процеси перемішування у в'язкій рідині.

Предметом дослідження є математична модель процесу перемішування в'язкої рідини.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються структурний метод (метод R-функцій) та метод Гальоркіна для нестаціонарних задач при розв'язанні першої частини задачі перемішування та методи нелінійної динаміки при розв'язанні другої частини цієї задачі.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на 25-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 20-22 квітня 2021 р.) [40].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Математичні моделі в’язких течій

Дослідження руху течій рідини є складовою частиною гідродинаміки. Математичний опис стану течій відбувається за допомогою функцій, які описують розподіл швидкості рідини та будь-яких її термодинамічних величин (тиск, щільність). Як відомо, усі ці величини визначаються через рівняння стану речовини. Тому для опису течій рідини достатньо задати п’ять величин: три компоненти вектора швидкості, тиск та щільність. Для того, щоб отримати рівняння, які описуватимуть рух в’язкої рідини, необхідно ввести додаткові члени в рівняння руху ідеальної рідини, а саме елементи в’язкості.

Нехай в’язка нестислива рідина рухається в області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ з межею $\partial\Omega$. Тоді в інерційній декартовій системі координат цей рух характеризуватиметься полем швидкостей $\mathbf{V} = (V_1,\ V_2,\ V_3)$ та тиском P, які є функціями точок області $\mathbf{X} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ та часу t і задовольняють системі рівнянь Нав’є-Стокса та рівнянню нерозривності [1, 2]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_1}{\partial x_3} = F_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu\Delta V_1,\\
&\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_2}{\partial x_3} = F_2 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu\Delta V_2,\\
&\frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_3}{\partial x_3} = F_3 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_3} + \nu\Delta V_3,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0. \tag{1.2}$$

Тут ρ – щільність рідини, $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ – кінематичний коефіцієнт в’язкості, μ –

динамічний коефіцієнт в'язкості, $\mathbf{F} = \left(F_1,\ F_2,\ F_3\right)$ – вектор щільності масових сил, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа.

За умов $\mu = \text{const}$ та $\nu = \text{const}$ система (1.1), (1.2) буде відповідати ізотермічному руху.

Введемо вектор швидкості рідини $\mathbf{V} = \vec{i}_1 V_1 + \vec{i}_2 V_2 + \vec{i}_3 V_3$. Тоді систему рівнянь (1.1), (1.2) можна подати у векторній формі:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(\mathbf{V},\ \nabla\right)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} + \mathbf{F}, \tag{1.3}$$

$$\text{div}\mathbf{V} = 0,\ x \in \Omega,\ t \in (0,\ T_0], \tag{1.4}$$

де $\nabla = \vec{i}_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$.

Щоб отримати розв'язки рівнянь руху (1.1) і рівняння нерозривності (1.2) необхідно додати до (1.3) та (1.4) крайові умови [1]. Вони залежить від того, який тип має поверхня рідини. Розглянемо декілька випадків.

Між поверхнею твердого тіла і в'язкою рідиною завжди існують сили молекулярного зчеплення, через які швидкість течії рідини біля стінок співпадає зі швидкістю та напрямком руху точок на самих стінках. Тому виникає необхідність в заданні умови прилипання. У випадку нерухомих стінок потрібно прирівняти нулю швидкість рідини біля нерухомої поверхні

$$\mathbf{V}\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

За умови рухомих стінок швидкості прирівнюються:

$$\mathbf{V}\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{V}_{\partial\Omega}.$$

Якщо рідина межує з порожнечею (тиск $P_0 = 0$) або з повітрям (тиск $P_0 = \text{const}$), то мають місце кінематичні та динамічні умови. У першому випадку – нормальна до вільної поверхні складова швидкості має співпадати зі швидкістю переміщення поверхні розриву. У другому випадку – вектор напруги для ділянок, дотичних до вільної поверхні, має бути направлений за нормаллю до цих ділянок і за величиною дорівнювати P_0 [2]. При частковій обмеженості області твердими поверхнями, окрім умов прилипання, потрібно задавати ще умови на вході та виході з каналу.

Узагальнюючи все, можна записати крайову умови наступним чином:

$$\mathbf{V}\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}(\mathbf{X},\ t)\ \ \forall t \in (0,\ T_0]\,. \tag{1.5}$$

У початковий момент часу поле швидкостей має вигляд:

$$\mathbf{V}\big|_{t=0} = \mathbf{V}_0(\mathbf{X})\ \ \forall \mathbf{X} \in \bar{\Omega}\,. \tag{1.6}$$

Рівняння (1.3) – (1.6) можна застосовувати для однозв’язних та багатозв’язних областей.

Розглянемо спосіб моделювання течій в’язкої рідини, якщо в ній наявні процеси теплопровідності та дифузії. У цьому випадку використовується система рівнянь у наближенні Бусинеска-Обербека [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V},\ \nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V} - \beta\mathbf{g}T\,, \tag{1.7}$$

$$\text{div}\mathbf{V} = 0\,, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V},\ \nabla T) = \chi\Delta T \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega\,,\ t \in (0,\ T_0]\,, \tag{1.9}$$

де $\mathbf{V}$ – вектор швидкості;

P і T – відхилення тиску та температури від їх статичних значень;

ρ – щільність рідини;

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості;

χ – коефіцієнт температуропровідності;

g – прискорення вільного падіння;

β – коефіцієнт теплової зміни щільності.

Дана система рівнянь для конвекції та теплообміну виводиться за допомогою загальних рівнянь Нав'є-Стокса для рідини, що стискається та щільність якої не залежить від тиску, але може залежати від температури. Коефіцієнти в'язкості та теплопровідності є сталими.

Розв'язок системи (1.7) – (1.9) залежить від крайові умов. Для швидкості ця система доповнюється умовами (1.5), (1.6).

Розглянемо типи крайових умов для температури:

1) температура $T\big|_{\partial\Omega}$ на межі області $\partial\Omega$ може задаватися в явному вигляді як функція простору та часу (умова першого роду або умова Діріхле):

$$T\big|_{\partial\Omega} = f_1(\mathbf{X},\ t); \tag{1.10}$$

2) тепловий потік на межі області $\partial\Omega$ (умова другого роду або умова Неймана):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = f_2(\mathbf{X},\ t), \tag{1.11}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності рідини;

3) теплообмін, заданий за законом Ньютона з температурою T_c на межі області $\partial\Omega$ (умова третього роду):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = \alpha (T - T_c)\big|_{\partial\Omega} + f_3(\mathbf{X},\ t), \tag{1.12}$$

де α – коефіцієнт теплопровідності;

4) якщо на межі $\partial\Omega$ відсутні сторонні стоки або джерела тепла:

$$T^{(1)}\big|_{\partial\Omega} = T^{(2)}\big|_{\partial\Omega},\ \lambda^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = \lambda^{(2)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega}, \tag{1.13}$$

де один з індексів відповідає рідині, а інший – середовищу, біля якого протікає рідина.

Часто виникає необхідність зводити рівняння Нав'є-Стокса до криволінійних координат. Зв'язок між декартовими та циліндричними координатами вводиться наступним чином

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi, \\ x_2 = r\sin\varphi, \\ x_3 = z, \end{cases}$$

$$r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\ .$$

Тоді система рівнянь для в'язкої рідини у циліндричній системі координат матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\cdot\nabla V_r - \frac{V_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\right), \\ \mathbf{V}\cdot\nabla V_\varphi + \frac{V_r V_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2}\right), \\ \mathbf{V}\cdot\nabla V_z &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\Delta V_z, \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(V_\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(V_z)=0. \qquad (1.15)$$

Для сферичних координат їх співвідношення з декартовими координатами вводиться за допомогою формул

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \\ x_3 = r\cos\theta, \end{cases}$$

$$r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Тоді рівняння руху рідини

$$\mathbf{V}\cdot\nabla V_r - \frac{1}{r}(V_\theta^2 + V_\varphi^2) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} +$$

$$+\nu\left(\Delta V_r - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(V_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2}V_r - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right),$$

$$\mathbf{V}\cdot\nabla V_\theta + \frac{1}{r}(V_r V_\theta - ctg\,\theta V_\varphi^2) = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial\theta} +$$

$$+\nu\left(\Delta V_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - \frac{V_\theta}{r^2\sin\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right), \qquad (1.16)$$

$$\mathbf{V}\cdot\nabla V_\varphi + \frac{1}{r}(V_r V_\varphi + ctg\,\theta V_\varphi V_\theta) = -\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi} +$$

$$+\nu\left(\Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(V_\varphi) = 0. \qquad (1.17)$$

Можна ввести функцію течії ψ замість компонент швидкостей рідини, якщо задача має властивість симетрії та може бути зведена до двовимірної.

Розглянемо основні типи течій, які можна описати за допомогою функції ψ.

Перший клас течій – плоскі (або плоскопаралельні). У прямокутній системі координат рівняння нерозривності (1.15) матиме вигляд $\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}=0$, а функція течії $\psi(x_1, x_2)$ вводиться за допомогою співвідношень

$$V_1=\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\ V_2=-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \tag{1.18}$$

У циліндричній системі координат (1.15) прийме вигляд $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}=0$ та функція течії $\psi(r, \varphi)$ вводиться за допомогою співвідношень

$$V_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\ V_\varphi=-\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{1.19}$$

Другий клас – вісесиметричні течії в циліндричній системі координат. Рівняння нерозривності (1.15) прийме вигляд $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=0$, а функція течії $\psi(r, \varphi)$ вводиться за допомогою співвідношень

$$V_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x_3},\ V_\varphi=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{1.20}$$

Третій клас – вісесиметричні течії в сферичній системі координат. Рівняння нерозривності (1.15) прийме вигляд $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta)=0$, а функція течії $\psi(r, \theta)$ вводиться за допомогою співвідношень

$$V_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ V_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \qquad (1.21)$$

Розглянемо крайові умови для функції течії.

Відомо, що значення функції течії не змінюється, тобто $\psi = \text{const}$, на непроникній ділянці межі $\partial\Omega$. Якщо вся межа $\partial\Omega$ непроникна, то $\psi\big|_{\partial\Omega} = 0$. Якщо на межі $\partial\Omega_1$ $(\partial\Omega_1 \subseteq \partial\Omega)$ є ділянки, через які рідина витікає з області, то ці зміни функції течії можна визначити за допомогою наступної рівності

$$\psi(P) = \psi(A) + \int_0^{s(P)} \mathbf{V}^0(P') \cdot \mathbf{n}(P') ds(P'),$$

де $\mathbf{V}^0(P')$ – задана швидкість течії, $P \in \partial\Omega_1$;

$\psi(A)$ – значення функції течії у точці $A \in \partial\Omega_1$, від якої рахують довжину $s(P')$ дуги до точки $P' \in \partial\Omega_1$ з одиничним вектором $\mathbf{n}(P')$ зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$.

Якщо на межі $\partial\Omega_2$ $(\partial\Omega_2 \subseteq \partial\Omega)$, яка є твердою стінкою, відбувається прилипання частинок рідини і в точках $P \in \partial\Omega_2$ вектор швидкості $\mathbf{V}(P)$ рідини дорівняю заданому вектору $\mathbf{V}_0(P)$ швидкості стінки, то має місце наступна рівність:

$$\frac{\partial\psi(P)}{\partial\mathbf{n}(P)} = \mathbf{V}_0(P)\tau(P) = V_{0\tau}(P),\ P \in \partial\Omega_2,$$

де $\tau(P)$ – одиничний вектор у напрямку дотичної до контуру в точці $P \in \partial\Omega_2$, повернутий відносно одиничного вектору $\mathbf{n}(P)$ зовнішньої нормалі $\partial\Omega$ проти годинникової стрілки.

Якщо стінка нерухома, то $V_{0\tau}(P) = 0$.

Оскільки рівняння (1.1) є нелінійними, то отримати точні розв'язки іноді буває складно. У зв'язку з цим виникає необхідність використовувати наближені методи. Сенс цих методів у тому, що повністю або частково відкидаються деякі компоненти в рівняннях та крайових умовах. Існує великий клас задач, з яких можна отримати лінійну задачу, нехтуючи нелінійними членами.

Основним підходом до аналізу та спрощення рівнянь Нав'є-Стокса (1.1) є модифікація нелінійних інерційних членів $(\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V}$. Якщо повністю знехтувати цими компонентами, то ми отримаємо рівняння повзучої течії (або рівняння Стокса):

$$\nu\Delta\mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\nabla P, \qquad (1.22)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Рівняння Стокса (1.22) є лінійними, тому вони простіше нелінійних рівнянь Нав'є-Стокса. Ці рівняння можуть застосовуватися, коли інерційні члени достатньо малі у порівнянні з в'язкими у кожній точці рідини. Відношення інерційних сил до в'язких можна описати безрозмірним параметром

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu},$$

де L – характерний лінійний розмір;

V – характерна швидкість.

Це число називають числом Рейнольдса. Для нього характерна властивість: чим менше це число, тим кращий наближений розв'язок рівнянь Нав'є-Стокса.

Часто виникає необхідність використовувати рівняння Нав'є-Стокса у криволінійних координатах [1, 2].

Розглянемо рух нестискаючої рідини у полі сили тяжіння $\mathbf{F} = g\mathbf{f}$. Припустимо, що для цієї задачі можна визначити величини: довжину L, швидкість U,

час N. Нехай

$$\mathbf{X} = L\mathbf{x},\ \mathbf{V} = U\mathbf{v},\ P = \rho U^2 p,\ t = Nt'.$$

Величини $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, p, t' – безрозмірні. Тоді система Нав'є-Стокса та рівняння нерозривності (1.4) у безрозмірних змінних матимуть вигляд [1]:

$$\frac{1}{\mathrm{St}}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{\mathrm{Fr}}\mathbf{f}, \tag{1.23}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1.24}$$

де $\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}$, $\mathrm{Fr} = \frac{U^2}{gL}$, $\mathrm{St} = \frac{NU}{L}$ – числа Рейнольдса, Фруда та Струхаля відповідно.

Розглянемо два потоки в геометрично подібних областях Ω_1, Ω_2 з характерними розмірами L_1, L_2 та характерними швидкостями U_1, U_2. Для цієї задачі безрозмірна форма рівнянь (1.23), (1.24) співпадає за виключенням, що у першому випадку безрозмірними параметрами будуть Re_1, Fr_1, а в другому випадку – Re_2, Fr_2. Якщо значення параметрів співпадають, тобто

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2,\ \mathrm{Fr}_1 = \mathrm{Fr}_2, \tag{1.25}$$

то безрозмірні розв'язки відповідних рівнянь для цих двох випадків при однакових початкових та крайових умов також співпадають.

Рівняння (1.10) – (1.12) у безрозмірному вигляді будуть такі:

$$\frac{1}{\mathrm{St}}\frac{\partial v}{\partial t'} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{\mathrm{Fr}}\mathbf{f}, \tag{1.26}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1.27}$$

$$\frac{1}{\mathrm{St}}\frac{\partial T'}{\partial t'} + (\mathbf{v}, \nabla T') = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\Delta T', \tag{1.28}$$

де $\mathrm{Re} = \dfrac{UL}{\nu}$ – число Рейнольдса;

$\mathrm{St} = \dfrac{NU}{L}$ – число Струхаля;

$\mathrm{Fr} = \dfrac{U^2}{gL\rho\Delta T}$ – число Фруда;

$\mathrm{Pe} = \dfrac{UL}{X}$ – число Пекле;

ΔT – масштаб перепаду температур.

Нехай поверхня Ω – циліндрична та її прямолінійні утворюючі паралельні осі Ox_3. Розв'язок задачі (1.3) – (1.6) не залежатиме від x_3, якщо припустити, що всі задані функції в крайових умовах не залежать від координати x_3. У цьому випадку крайові задачі для рівнянь Нав'є-Стокса називаються плоскими задачами.

Припустимо, що Ω – плоска обмежена область. З рівняння нерозривності

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

випливає, що компоненти швидкості v_x, v_y можуть мати вигляд:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{1.29}$$

де $\psi(x, y)$ – функція течії. У цьому випадку рівняння нерозривності виконується автоматично. Вектор

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = (0,\ 0,\ -\Delta\psi),$$

тобто містить тільки одну ненульову координату, її позначають $\zeta = -\Delta\psi$ та називають завихореністю. Аналогічно

$$\mathrm{rot}\mathbf{f} = \left(0,\ 0,\ -\frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial x}\right).$$

Рівняння (1.7) у цьому випадку матиме вигляд ($\mathrm{St} = 1,\ \mathrm{Fr} = 1$) [1]

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta^2\psi + \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}. \qquad (1.30)$$

Систему Нав'є-Стокса у наближені Бусинеска, яка описує плоску стаціонарну вільну конвекцію та використовує функцію течії, задану співвідношенням (1.29), можна записати у вигляді [1]

$$\Delta^2\psi = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta\psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \mathrm{Gr}\frac{\partial T}{\partial x} + \mathrm{Re}\left(\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}\right), \qquad (1.31)$$

$$\Delta T = \mathrm{Pe}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \mathrm{Pe}G(x,\ y), \qquad (1.32)$$

де $G(x,\ y)$ – об'ємна щільність теплових джерел.

1.2 Методи чисельного аналізу течій в'язкої рідини

При дослідженні течій в'язкої рідини виникають задачі, які можуть бути розв'язані теоретичним шляхом або експериментально. Проте все частіше при

дослідженні таких задач гідродинаміки використовують математичне моделювання та обчислювальний експеримент, який базується на чисельних методах. Ці методи допомагають розв'язати багато типів задач з прийнятною точністю. Приклади розв'язання задач гідродинаміки за допомогою чисельних методів розглядаються в [3, 4].

Найчастіше, при дослідженні задач, пов'язаних з рухом рідини, використовують метод скінченних різниць (або метод сіток) та метод скінченних елементів. Їм присвячені роботи [3, 4]. Метод скінченних різниць відноситься до групи наближених методів розв'язання диференціальних рівнянь та широко використовується через свою простоту підходу до дискретизації. Основна ідея його полягає у заміні вихідної задачі її дискретним аналогом (різницевою схемою), а потім застосуванню алгоритмів для розв'язання цієї дискретної задачі. Метод скінченних елементів базується на виборі базисних функцій. Його ідея у розбитті складної області, де відшукується розв'язок диференціального рівняння, на скінченну кількість простих областей. Обидва методи прості в реалізації, проте не універсальні.

Окрім цих методів також використовують методи гідродинамічних потенціалів [5], методи асимптотичних розкладів [6], метод решітчастих рівнянь Больцмана [7] та багато інших.

Задачі, пов'язані з розрахунком течії нестисливої в'язкої рідини, мають місце в таких сферах, як біомедицина, теплоенергетика, гідроаеродинаміка та багато інших. Роботи, які присвячені цій темі, можна розділити на дві категорії: розгляд існування та єдиності задач і чисельне дослідження задач. До перших відносяться роботи В.А. Солоникова [8], Р. Темама [9], О.О. Ладиженської [10].

Доведено [10], що стаціонарні початково-крайові задачі мають принаймні один розв'язок за будь-яких чисел Рейнольдса, якщо для усіх ізольованих ділянок межі $\partial\Omega_i$ області Ω, яка заповнена рідиною, виконується умова:

$$\int\limits_{\partial\Omega_i} \mathbf{a}\mathbf{n} ds = 0 .$$

Що стосується нестаціонарних задач, доведено [10], що вони мають розв'язок «у цілому», якщо всі дані задачі залежать від різних декартових координат.

Оскільки рівняння Нав'є-Стокса – це система нелінійних рівнянь, то виникає проблема в побудові точних розв'язків. Загалом точні розв'язки можна отримати для простих областей шляхом підбору спеціальної системи координат. Проте у більшості випадків задачу для рівнянь Нав'є-Стокса розв'язують чисельно.

Розглянемо плоску стаціонарну задачу. Для її розв'язання застосовують два способи. Перший базується на розв'язанні системи Нав'є-Стокса в природніх змінних «швидкість-тиск». У цьому випадку система матиме вигляд (масові сили відсутні)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \tag{1.33}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{1.35}$$

Недоліком цієї системи є те, що у ній відсутні умови на межі для тиску, а тому при побудові чисельного методу виникає необхідність перевірки умови нерозривності (1.35) на кожному кроці.

Другий спосіб базується на розв'язанні рівнянь для функції течії. Система у змінних «функція течії-завихореність» має вигляд

$$\nu \Delta \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{1.36}$$

$$-\Delta \psi = \zeta. \tag{1.37}$$

Еквівалентом системи (1.36), (1.37) буде рівняння для функції течії

$$\nu\Delta^2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} = 0 \text{ в } \Omega. \tag{1.38}$$

Це рівняння є квазілінійним рівнянням четвертого порядку. Знаходження його розв'язку – складна задача. Аналіз (1.38) у двовимірній теорії океанічних течій представлений в [11]. У цій роботі наведені умови для існування та єдинності розв'язку рівняння. Аналіз розв'язку (1.38) в околі кутової точки межі представлений у [12].

Розглянемо плоску стаціонарну течію, яка описується системою рівнянь (1.33) – (1.35). Член $(\mathbf{v}, \Delta)\mathbf{v}$ в (1.33), (1.34) має порядок $\frac{U^2}{L}$, де U – характерна швидкість, L – характерний розмір. При $\nu\Delta\mathbf{v} \approx \frac{\nu U^2}{L}$ відношення першої величини до другої буде числом Рейнольдса. Рівняння Нав'є-Стокса спрощується для руху з малим числом Рейнольдса [1]. При $\mathrm{Re} \ll 1$ членом $(\mathbf{v}, \Delta)\mathbf{v}$ можна знехтувати. Тоді ми отримаємо лінеаризовану систему Нав'є-Стокса – систему Стокса.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\Delta v_x, \ \frac{\partial p}{\partial y} = \nu\Delta v_y, \tag{1.39}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \tag{1.40}$$

Якщо ввести функцію течії за допомогою співвідношень

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \ v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1.41}$$

то з (1.39), (1.40) отримаємо для ψ бігармонічне рівняння

$$\Delta^2\psi = 0\,. \qquad (1.42)$$

Перемішування в'язких рідин є фундаментальною науковою проблемою. Відомо [13], що ламінарні течії можуть інтенсивно перемішуватись за деяких умов. Задача процесу перемішування складається з двох етапів. На першому етапі визначається поле швидкостей течії рідини. Потім досліджуються траєкторії руху окремих частино та обирається найефективніший режим перемішування. Моделюванням цього процесу займалися А.В. Артюх, В.В. Мелешко, Т.А. Дунаєва та інші [13 – 15]. У цих роботах описано процес перемішування в'язкої рідини в таких областях, як круг, напівкруг та круговий сектор.

У роботі [16] розв'язок рівняння (1.42) знаходиться у вигляді ряду Фур'є за частинними розв'язками. Звідси випливає те, що рівняння задовольняється точно та виконання граничних умов веде до нескінченної системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів. Таким чином, знаходиться розв'язок першої частини задачі перемішування. Друга частина пов'язана з інтегруванням рівнянь руху частинок рідини та описом процесу перемішування. Такі задачі досліджуються в Інституті гідромеханіки НАН України та описані у роботі [17].

Наближенні методи розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса, з обчислювальної точки зору, можна поділити на два класи: наближено аналітичні та скінчено-різницеві. Наближено аналітичні методи застосовані до течії в'язкої рідини наведено в роботі [18]. Приклади застосування скінчено-різницевих методів наведено в роботі [19].

У роботі [19] було реалізовано два підходи чисельного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса. Один з підходив базується на методі скінченних різниць на структурних сітках для течії в'язкої рідини. Другий підхід застосовує метод скінченних елементів на неструктурованих адаптивних сітках для течії в'язких газів.

Розв'язання задач пов'язаних з рухом рідини в областях з криволінійною

межею за допомогою скінчено-різницевих методів допомагає точно врахувати геометрію області. Побудова криволінійної сітки та її конформне відображення на прямокутну область представлено у роботі [20]. Якщо у криволінійній області Ω будувати прямокутну сітку, то отримана область $\Omega_h \subset \Omega$, при чому $\partial\Omega_h \not\subset \partial\Omega$, тому граничні умови потрібно враховувати наближено.

Метод фіктивних областей – це один з сітчастих методів, який використовується у складних областях. У цьому методі спочатку вихідна крайова задача, яка задана в складній області Ω, замінюється на задачу в більш простій області Ω_0. Потім вводиться параметр ε, який вказує на величину розриву коефіцієнтів диференціального оператора нової задачі на межі вихідної області Ω та фіктивної $\Omega_1 = \Omega_0 \setminus \Omega$. Нова задача повинна мати збіжність наближеного розв'язку до точного при $\varepsilon \to 0$. Недолік цього методу у складності побудови різницевих схем та розв'язків систем рівнянь. У роботі [21] уперше було застосовано метод фіктивних областей до рівнянь Нав'є-Стокса. Цей метод також використовується для розв'язування стаціонарних задач в'язкої рідини у роботах [22, 23]. У [22] наведено комбінацію методу з процесом послідовних наближень та були отримані результати для різних областей. Також у цих роботах розглянуто питання збіжності розв'язків з точними. У [23] наведено застосування методу до системи рівнянь вільної конвекції у наближенні Бусинеска.

Основний недолік цих методів полягає у заміні складних областей на більш прості. Натомість метод R-функцій цього недоліку позбутий. Цей метод був розроблений академіком НАН України В. Л. Рвачевим. За допомогою засобів теорії R-функцій можна побудувати структури розв'язків, які будуть точно враховувати геометрію заданої області та врахувати граничні умови задачі.

Дослідження течії рідини за допомогою методу R-функцій має велику популярність у сфері гідродинаміки. У роботі Колосовой С.В. було розглянуто течію ідеальної рідини в каналах [24]. Суворова І.Г. досліджувала течію в'язкої рідини у [25]. У [25] запропоновано для розв'язку рівняння (1.42) використовувати ітераційний процес

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\Delta\psi_{n+1}-\left\{\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi_{n+1}}{\partial x}+\frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi_n}{\partial x}-\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi_{n+1}}{\partial y}-\frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi_n}{\partial y}\right\}-$$

$$-\frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x}-\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi_{n+1}}{\partial x}+\frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial y}+\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi_{n+1}}{\partial y}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\Delta\psi_0+\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x}-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial y}-\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi_n}{\partial x}+\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi_n}{\partial y},$$

де ψ_0 – продовження граничних умов всередину області.

Дослідженням течій в'язкої рідини за допомогою методу R-функцій займалися А.В. Артюх (нестаціонарні плоскопаралельні течії), С.М. Ламтюгова (задачі обтікання тіл в'язкою рідиною), М.В. Сидоров (стаціонарні плоскопаралельні течії) [26 – 28].

Течію в'язкої рідини в областях з гвинтовою симетрією досліджував К.В. Максименко-Шейко в роботі [29].

1.3 Формальна та змістовна постановка задачі

Багато практичних задач, які пов'язанні з гідродинамікою, не можна розв'язати аналітично. Тому вивчаючи різні процеси у геофізиці, біології, теплоенергетиці, біомедицині тощо дослідження різноманітних класів течій відбувається за допомогою методу математичного моделювання. Майже завжди при моделюванні течії використовується фізична модель нестаціонарної в'язкої рідини [30]. Чисельне моделювання часто використовується для дослідження течій. Його сенс полягає у тому, що спочатку створюється математична модель руху системи, яка вивчається, а потім відбувається дослідження її за допомогою чисельних методів. Чисельна модель містить у собі математичну постановку задачі, розробку та реалізацію чисельних алгоритмів та їх тестування на ефективність.

Нехай в'язка рідина заповнює плоску область Ω, ρ – густина рідини, ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості, а течія відбувається за рахунок дії масових

сил, які визначаються вектором $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$. Рідину можна розглядати як в'язке нестисливе ньютонівське середовище, а тому процес течії можна змоделювати за допомогою системи рівнянь Нав'є-Стокса [31, 32]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{1.45}$$

де $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ – вектор швидкості рідини,

p – тиск.

Якщо течія повзуча, то у рівняннях Нав'є-Стокса [30] (1.43), (1.44) можна знехтувати нелінійними доданками і замість системи (1.43) – (1.45) описувати течію наближенням Стокса [13]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \tag{1.46}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \tag{1.47}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{1.48}$$

Від системи (1.46) – (1.48) за допомогою введення функції течії ψ співвідношеннями [33]:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{1.49}$$

можна перейти до одного рівняння

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi + F \,, \tag{1.50}$$

де $F = \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y}$.

Рівняння (1.50) треба доповнити крайовими та початковою умовою. Якщо межа області Ω не має точок розриву і рух розпочинається зі стану спокою, то крайові та початкова умови матимуть вигляд:

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0 \,,\ \left.\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0 \,,$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0 \,,$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Розв’язання задачі перемішування складається з двох етапів:

– визначення поля швидкостей потоку рідини;

– дослідження траєкторії руху окремих частинок рідини.

На першому етапі знаходиться розв’язок задачі для функції течії і відновлюється за формулами (1.50) поле швидкості. На другому етапі моделюється процес перемішування та аналізується його ефективність за допомогою методів нелінійної динаміки.

Нехай рідина заповнює напівкругову область Ω радіуса R. Рух рідини в області Ω відбувається за допомогою двох рухомих вихорів. Траєкторії руху вихорів описуються параметрично у вигляді:

$$(x_1(t),\ y_1(t)) = (x_1 + r \cdot \cos(-t + \pi),\ \ y_1 + r \cdot \sin(-t + \pi)) \,,$$

$$(x_2(t),\ y_2(t)) = \left(x_2 + r \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{2} \right),\ \ y_2 + r \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Тут (x_1, y_1) та (x_2, y_2) – точки розташування першого та другого вихорів відповідно, t – час, r – радіус обертання. Значення $\Gamma_1(t)$ та $\Gamma_2(t)$ відповідають інтенсивності вихорів. При $\Gamma_i(t) > 0$ потік закручується за годинниковою стрілкою, а при $\Gamma_i(t) < 0$ – проти годинникової стрілки.

Тоді для знаходження функції $\psi(x, y, t)$ необхідно розв'язати початково-крайову задачу:

$$-\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi = F(x, y, t) \text{ в } \Omega,\ t > 0, \tag{1.51}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ t > 0, \tag{1.52}$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0,\ x \in \Omega, \tag{1.53}$$

де ν – кінематична в'язкість;

$\Delta^2 = \dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бігармонічний оператор;

$F(x, y, t) = \Gamma_1(t)\delta(x - x_1(t), y - y_1(t)) + \Gamma_2(t)\delta(x - x_2(t), y - y_2(t))$;

$\delta(x, y)$ – двовимірна дельта-функція Дірака.

Після знаходження розв'язку задачі (1.51) – (1.53) необхідно розв'язати рівняння руху лагранжевої частинки

$$\dot{x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y, t),$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y, t),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$y(t_0) = y_0.$$

Далі необхідно будувати та проаналізувати траєкторії руху.

1.4 Постановка задач дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є застосування методу *R*-функцій до розв’язання задачі математичного моделювання процесу перемішування двома рухомими вихорами в’язкої рідини у напівкрузі. Щоб це зробити необхідно:

– провести аналіз предметної області, розглянути основні моделі гідродинаміки та методи їх чисельного аналізу;

– ознайомитися із методами отримання наближеного розв’язку задач математичної фізики (зокрема, методом *R*-функцій та методом Гальоркіна для нестаціонарних задач);

– розробити чисельний алгоритм розв’язання задачі математичного моделювання процесу перемішування двома рухомими вихорами в’язкої рідини у напівкрузі;

– виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму в пакеті Mathematica 11.1;

– провести обчислювальний експеримент для тестової задачі;

– проаналізувати отримані результати.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Структурний метод (метод *R*-функцій) в обчислювальній гідродинаміці

Основна задача прикладної математики полягає у розробці ефективних методів дослідження фізико-математичних полів різної природи та їх розрахунку.

Класична постановка задачі розрахунку таких полів співпадає з крайовою задачею для системи рівнянь з частинними похідними. Ця задача зводиться до знаходження в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розв'язку рівняння

$$Au = f\,, \tag{2.1}$$

де A – оператор, діючий із функціонального простору $X(\Omega)$ у простір $Y(\Omega)$ з крайовими умовами:

$$L_i u = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i,\ i = 1, ..., m\,, \tag{2.2}$$

де $\partial\Omega_1, ..., \partial\Omega_m$ – покриття межі $\partial\Omega$. При цьому ділянки $\partial\Omega_i$ не обов'язково мають бути різними, а можуть співпадати з $\partial\Omega$.

Розв'язуючи фізико-математичні задачі з відомими крайовими умовами виникає проблема, яка пов'язана з тим, що у постановці задачі присутні аналітичні та геометричні типи інформації. Аналітичні компоненти – це функції та оператори, геометричні – область Ω та її межа $\partial\Omega$. Виникає потреба у зведені геометричних компонент до аналітичного виду. У вирішенні цього питання можна застосувати метод *R*-функцій. Він був запропонований академіком НАН України В.Л. Рвачовим та є методом розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних. Рвачов В.Л. запропонував одночасно розглядати функції

дискретного та неперервного аналізу. У результаті він помітив серед функцій неперервних аргументів функції (*R*-функції), які за своїми властивостями схожі з функціями алгебри логіки. Таким чином, кожній *R*-функції ставиться у відповідність булева функція. Це дозволило використовувати методи алгебри логіки у класичному неперервному аналізі для описання складних геометричних об'єктів.

Метод *R*-функції пропонує побудувати структуру розв'язку крайової задачі математичної фізики, тобто жмуток функцій, який задовольнятиме усім крайовим умовам задачі, а отже, точно враховувати геометрію області.

Застосування методу *R*-функцій до задачі чисельного аналізу фізико-механічних полів містить наступні етапи:

– побудова функції, яка точно описує геометрію розрахункової області;

– довизначення операторів та функцій, які задані лише на межі області, у внутрішніх точках;

– побудова загальної структури розв'язку;

– побудова наближеного розв'язку (апроксимація невизначеної компоненти структури).

Розглянемо загальні положення теорії метода *R*-функцій [10].

Означення. *R*-функцією, що відповідає розбиттю числової осі на проміжки $(-\infty,\ 0)$ та $[0,\ +\infty)$, називається така функція, знак якої цілком визначається знаками її аргументів.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається *R*-функцією, якщо існує така булева функція F, що $S[z(x, y)] = F[S(x),\ S(y)]$, де двозначний предикат $S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ В цьому випадку булеву функцію F називають супровідною. Кожній *R*-функції відповідає тільки одна супровідна булева функція.

Найбільш уживаною системою *R*-функцій є система $\mathcal{R}_0$:

$$\overline{x} \equiv -x,$$

$$x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Нехай в $\mathbb{R}^2$ заданий геометричний об'єкт Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Обернена задача аналітичної геометрії полягає у тому, що треба побудувати функцію $\omega(x, y)$, яка є додатною всередині Ω, від'ємною поза межами Ω і дорівнює нулю на $\partial\Omega$. Тоді рівняння $\omega(x, y) = 0$ у неявній формі визначатиме геометричне місце точок, яке відповідає межі $\partial\Omega$ області Ω.

Нехай область Ω можна побудувати використовуючи більш прості області $\Omega_1 = \{\omega_1(x, y) \geq 0\}$, …, $\Omega_m = \{\omega_m(x, y) \geq 0\}$, де $\omega_i(x, y)$ – елементарні функції, $i = 1, 2, ..., m$, за допомогою теоретико-множинних операцій об'єднання $\cup$, перетину $\cap$ та доповнення $\neg$. Тоді області Ω можна подати у вигляді:

$$\Omega = F(\Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots,\ \Omega_m)\,.$$

Перехід від предикатної форми задання області до звичайної, яка прийнята в аналітичній геометрії, відбувається за допомогою формальної заміни Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, ..., m$, а символів $\{\cap, \cup, \neg\}$ – на символи R-операцій $\{\wedge_0, \vee_0, -\}$ відповідно. У результаті отримаємо функцію $\omega(x, y)$. Ця функція додатна усередині області, дорівнює нулю на межі $\partial\Omega$ та від'ємна поза межею $\partial\Omega$.

Означення. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається нормалізованим на межі $\partial\Omega$, якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє умовам

$$\omega\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ \left.\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = -1\,,$$

де $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Наприклад, нормалізованим рівнянням кола радіуса R з центром у точці (x_0, y_0) є рівняння

$$\frac{1}{2R}(R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) = 0,$$

а нормалізоване рівняння прямої, яка проходить через точку (x_0, y_0) з кутовим коефіцієнтом k, буде мати вигляд

$$\frac{y - y_0 - k(x - x_0)}{\sqrt{1 + k^2}} = 0.$$

Розглянемо напівкругову область Ω, яка обмежена лініями $x = 0$ та $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. За допомогою областей $\Omega_1 = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$ – верхня півплощина та $\Omega_2 = \left\{(x, y) \middle| \frac{1}{2r}(r^2 - x^2 - y^2) \geq 0\right\}$ – круг радіуса r з центром у початку координат можна подати замкнену область $\mathrm{cl}\,\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$ у вигляді

$$\mathrm{cl}\,\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Тоді розглядаючи Ω_1 и Ω_2 як двозначні предикати, можна записати предикатне рівняння області $\mathrm{cl}\,\Omega$

$$\mathrm{cl}\,\Omega \equiv \Omega_1 \wedge \Omega_2 = 1.$$

Після заміни Ω_1 і Ω_2 на ліві частини нерівностей, що їх визначають, а кон'юнкцію $\wedge$ – на $\mathcal{R}_0$-кон'юнкцію $\wedge_0$, отримуємо функцію

$$\omega(x,y) = x \wedge_0 \frac{1}{2r}(r^2 - x^2 - y^2) \equiv$$

$$\equiv x + \frac{1}{2r}(r^2 - x^2 - y^2) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{4r^2}(r^2 - x^2 - y^2)^2}\,. \qquad (2.3)$$

Функція (2.3) матиме властивості

$$\omega(x,y) = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ \omega(x,y) > 0 \text{ у } \Omega,\ \omega(x,y) < 0 \text{ зовні } \mathrm{cl}\Omega,\ \left.\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = -1,$$

де $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Як було зазначено вище, одним з етапів застосування методу *R*-функцій в задачах чисельного аналізу фізико-механічних полів є продовження крайових умов всередину області. Для того, щоб це реалізувати необхідно виконати наступне [34].

Нехай $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$ області Ω. Тоді оператор D_1, який діє за правилом

$$D_1 u \equiv (\nabla\omega, \nabla u) = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y},$$

в регулярних точках $\partial\Omega$ задовольняє рівність

$$-D_1 u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}},$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Означення. Загальною структурою розв’язку крайової задачі називається вираз $u = B(\Phi,\ \omega,\ \{\omega_i\}_{i=1}^m,\ \{\varphi_j\}_{j=1}^m)$, який при довільному виборі компонент вектору Φ точно задовольняє усі крайові умови задачі. Тут B – оператор, що за-

лежить від геометрії області Ω і ділянок $\partial\Omega_i$ її межі, а також операторів крайових умов, але не залежний від вигляду оператора A і функції f.

Означення. Загальна структура, яка враховує усі крайові умови (2.2), називається повною структурою на множині $\mathfrak{M}$, якщо існує елемент $\Phi^* \in \mathfrak{M}$, що вираз $u^* = B(\Phi^*, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_j\}_{j=1}^m)$ визначає точний розв'язок крайової задачі (2.1), (2.2).

Відомо [34 – 37], що крайові умови (1.52) задовольняє жмуток функцій

$$\psi = \omega^2 \Phi, \tag{2.4}$$

де $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння $\partial\Omega$;

Φ – невизначена компонента.

У методі *R*-функцій зведення нестаціонарної нескінченновимірної задачі до скінченновимірної за допомогою проекційного методу досягається шляхом подання невизначеної компоненти Φ структури розв'язку у вигляді суми

$$\Phi(x, y, t) \approx \Phi_n(x, y, t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\tau_k(x, y), \tag{2.5}$$

де $\tau_k(x, y)$ – відомі елементи повної функціональної послідовності;

$c_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$, – невідомі функції часу.

Невідомі функції $c_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$, потрібно обрати так, щоб вони найкраще задовольняли рівнянню крайової задачі.

Невизначені функції, які входять до структурних формул, обираються так, щоб найкращим чином задовольнити основному диференціальному рівнянню задачі. Оскільки структура розв'язку повна, то такий вибір можна зробити, при цьому ступінь наближення визначається тією процедурою, яка обрана для знаходження $c_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Підставивши (2.5) у структуру розв'язку $u = B(\Phi)$, отримаємо формулу вигляду

$$u \approx u_n = B(x, y, c_1, c_2, ..., c_n). \tag{2.6}$$

Рівняння (2.6) повністю та точно задовольняє крайовим умовам задачі, у якій невідомі тільки функції $c_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$. Для лінійних однорідних крайових умов це призводить до формули

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k ,$$

де $\{\varphi_k\}$ – відома функціональна послідовність, яка визначається оператором структури B.

Одним з методів знаходження функцій $c_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$, є метод Гальоркіна для нестаціонарних задач [35].

Розглянемо задачу Коші для нестаціонарного операторного рівняння:

$$\frac{d}{dt} Au + Cu = f(t), \tag{2.7}$$

тобто задачу інтегрування рівняння (2.6) при початковій умові:

$$u\big|_{t=0} = \varphi. \tag{2.8}$$

Нехай A, C – оператори, які діють у деякому сепарабельному гільбертовому просторі H; $f(t)$ – задана, а $u = u(t)$ – шукана функція зі значеннями у просторі H; окрім цього, $\varphi \in H$. Оператори A і C – додатно визначені та не залежать від часу t. Їх області визначення D_A та D_C перетинаються по деякій

множині D, яка усюди щільна в даному гільбертовому просторі H та у кожному з енергетичних просторів H_A і H_C. Тоді простори H_A і H_C перетинаються по деякій множині $D_0 \supset D$, яка щільна у кожному з них.

Множина D_0 стане гільбертовим простором, якщо у цій множині ввести скалярний добуток:

$$[u,v]_0 = (Au,v) + (Cu,v) = [u,v]_A + [u,v]_C . \qquad (2.9)$$

Новий гільбертовий простір позначимо через H_0. Норму в H_0 позначатимемо як $\|u\|_0^2 = \|u\|_A^2 + \|u\|_C^2$.

Якщо простір H_0 виявиться неповним, то доповнимо його у звичний спосіб. Вважатимемо, що $\varphi \in H_0$.

Метод Гальоркіна має наступний зміст. Візьмемо координатну систему $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$, яка має властивості:

а) $\varphi_k \in H_0$, $k = 1, 2, ..., n$;

б) при будь-якому n елементи $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ лінійно не залежні;

в) система повна в H_0 (а значить, і в H_A та H_C).

Наближений розв'язок задачі (2.7), (2.8) шукатимемо у вигляді:

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}(t)\varphi_k . \qquad (2.10)$$

Коефіцієнти $c_k^{(n)}(t)$ визначаються із системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dc_k^{(n)}(t)}{dt}[\varphi_k, \varphi_j]_A + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}(t)[\varphi_k, \varphi_j]_C = (f, \varphi_j), \ j = 1, 2, ..., n, \qquad (2.11)$$

при початкових умовах

$$c_k^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = \alpha_k^{(n)}. \qquad (2.12)$$

Приведемо задачу (2.11), (2.12) до матричного вигляду. Введемо наступні позначення для матриць:

$$\mathbf{R}_{A_n} = \left\| [\varphi_k, \varphi_j]_A \right\|_{n\times n},\ \mathbf{R}_{C_n} = \left\| [\varphi_k, \varphi_j]_C \right\|_{n\times n}$$

і для векторів

$$\mathbf{c}^{(n)}(t) = (c_1^{(n)}(t), c_2^{(n)}(t), ..., c_3^{(n)}(t))^T,$$

$$\mathbf{f}^{(n)}(t) = ((f(t), \varphi_1), (f(t), \varphi_2), ..., (f(t), \varphi_n))^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_n^{(n)})^T.$$

Тоді задача (2.11), (2.12) запишеться у вигляді

$$\mathbf{R}_{A_n}\dot{\mathbf{c}}^{(n)}(t) + \mathbf{R}_{C_n}\mathbf{c}^{(n)}(t) = \mathbf{f}^{(n)}(t),$$

$$\mathbf{c}^{(n)}(0) = \boldsymbol{\alpha}^{(n)}.$$

Вибір сталих $\alpha_k^{(n)}$ у значній мірі довільний [35] та повинен задовольнати умові:

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k \right\|_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

У [35] рекомендується $\alpha_k^{(n)}$ обирати наступним чином. Позначимо через

$\varphi^{(n)}$ проекцію елемента φ у просторі H_0 на підпростір, який натягнуто на елементи $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$. Тоді коефіцієнти $\alpha_k^{(n)}$, $k = 1, 2, ..., n$, визначаються з умови:

$$\left\| \varphi - \varphi^{(n)} \right\|_0^2 = \left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k \right\|_0^2 = \min .$$

При цьому для визначення $\alpha_k^{(n)}$ приходимо до системи:

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi_k, \varphi_j]_0 \alpha_k^{(n)} = [\varphi, \varphi_j]_0 , \ j = 1, 2, ..., n . \qquad (2.13)$$

Питання збіжності методу Гальоркіна для нестаціонарних задач розглянуто у [35].

2.2 Методи дослідження поведінки динамічних систем на фазовій площині

Моделюючи течії в'язкої рідини з'являється потреба у дослідженні траєкторії руху окремої частинки. Використовуючи підхід Лагранжа, рівняння руху можна описати за допомогою системи:

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, t) , \ \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t) , \qquad (2.14)$$

де $\psi(x, y, t)$ – функція течії.

Рівняння (2.14) мають структуру Гальмітона: ψ – гальмітоніан, x та y – канонічні змінні.

Розв’язку рівняння руху (2.14) як функції від часу відповідають гладкі криві у фазовій площині. Вони називаються фазовими траєкторіями (іноді лініями рівня), а рух удовж траєкторій – фазовим потоком. Якщо множину розв’язків відобразити на одній фазовій площині, то ми побачимо загальну картину поводження системи – фазовий портрет [38].

Якщо течії нестаціонарні, то спостерігається хаотична поведінка. Для того, щоб дослідити траєкторії окремих частинок рідини, необхідно їх виділити, але зі збереженням поля швидкостей. Щоб це зробити, під час фізичного експерименту додають краплину тієї ж рідини, але пофарбовану в інший колір. Рух можна описати за допомогою розв’язку задачі Коші:

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, t), \quad \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t),$$

$$x(t_0) = x_0, \; y(t_0) = y_0.$$

Початкові умови обираються дуже ретельно, оскільки необхідно отримати уявлення про всю течію, а не про рух окремих частинок. Розв’язати задачу Коші для усіх точок області є неможливим. Для вирішення проблеми дослідження руху усіх точок області можна використати теорію періодичних точок.

Означення. Точка p називається періодичною, якщо матеріальна частинка, яка у момент часу $t = 0$ знаходиться в точці p, а в момент $t = T$ повернеться до свого вихідного положення, тобто:

$$F(p) = p,$$

де F – відображення області течії на себе, яке відповідає руху рідини за повний період.

Означення. Точка p називається періодичною порядку n, якщо

$F^n(p) = p$ і у той же час для будь-яких m таких, що $1 \le m \le n$, справедливо $F^m(p) \ne p$.

Нерухомі точки можна розглядати як «організуючі центри» динаміки системи у фазовому просторі. Визначивши ці точки та дослідивши характер стійкості, можна побудувати глобальну картину поводження системи.

Розглянемо класифікацію нерухомих точок. Існує два типи: еліптичні та гіперболічні. У випадку еліптичних точок («центр») частинки рідини рухаються по замкнутих траєкторіях (рис. 2.1). У випадку гіперболічних точок стійкості (сідлові точки) спостерігаються хаотичні рухи (хаотична адвекція), що гарантує ефективне перемішування (рис. 2.2).

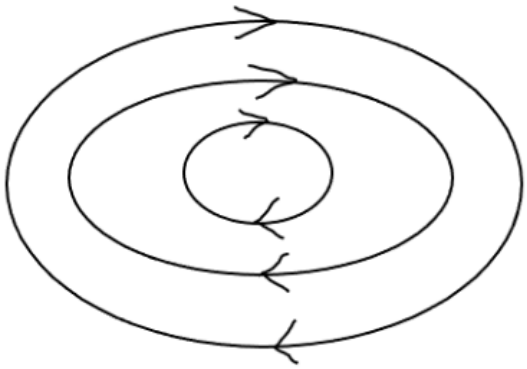


Рисунок 2.1 – Еліптична точка

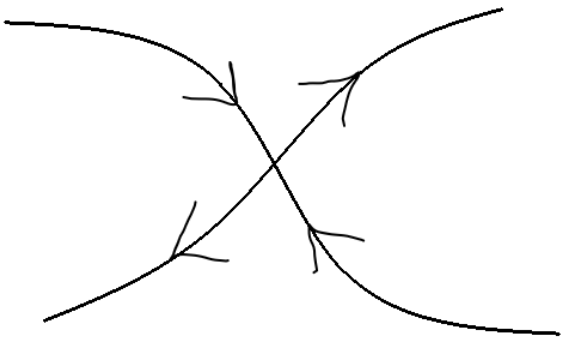


Рисунок 2.2 – Гіперболічна точка

Для знаходження періодичних точок використовують метод, який заснований на симетрії поля швидкостей відносно прямої, яка паралельна осі Ox [39]. Згідно з цим методом двовимірна задача пошуку періодичних точок зводиться до одновимірної наступним чином. Періодичні точки будуть знаходитись на осі симетрії або попарно на протилежних сторонах. Нехай точка з початковими координатами (x_1, y_1) у момент часу $t = \frac{T}{4}$, де T – період, знаходиться на вісі симетрії. Якщо в момент $t = \frac{3T}{4}$ ця точка опиниться на вісі симетрії, то у момент $t = T$ вона повернеться у свої вихідне положення (x_1, y_1), а отже, (x_1, y_1) – точка першого порядку.

Якщо відомі розташування та характер періодичних точок, то можна отримати траєкторії руху рідини. Хаотична поведінка полягає у тому, що точки які були близькі одна з одною, з часом почнуть віддалятись одна від одної. У таких областях спостерігається ефективне перемішування рідини.

При дослідженні поведінки динамічних нелінійних систем на фазовій площині виникає потреба в наочному зображені руху. З вирішенням цієї проблеми пов’язаний метод нелінійної динаміки, який називається метод перетину площини, який був розвинений Пуанкаре. Він зручний для консервативних гальмітонових систем, які виникають при моделюванні течій в’язкої рідини.

2.3 Застосування структурного метода (метода *R*-функцій) при дослідженні процесів перемішування в’язкої рідини, викликаних рухомими вихорами

Для розв’язання задачі перемішування, яку визвано системою двох точкових вихорів, скористаємося наступним планом:

а) задаємо геометричний параметр системи r, який є радіусом області, течія у якій досліджується;

б) задаємо точки розташування вихорів (x_i, y_i), $i = 1,..., N$, та рівняння, які описують рух вихорів:

$$(x_1(t),\ y_1(t)) = (x_1 + r \cdot \cos(-t + \pi),\ \ y_1 + r \cdot \sin(-t + \pi)),$$

$$(x_2(t),\ y_2(t)) = \left(x_2 + r \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{2} \right),\ \ y_2 + r \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right);$$

в) задаємо інтенсивності вихорів $\Gamma_i(t)$, $i = 1,..., N$;

г) описуємо геометрію області за допомогою методу *R*-функцій, тобто будуємо функцію

$$\omega(x, y) = x + \frac{1}{2r}(r^2 - x^2 - y^2) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{4r^2}(r^2 - x^2 - y^2)^2}\ ; \qquad (2.15)$$

д) розв'язуємо першу частину задачі перемішування, яка полягає у визначені поля швидкостей течії рідини;

е) розв'язуємо другу частину задачі перемішування, тобто досліджуємо траєкторії руху окремих частинок рідини.

Для розв'язання першої частини задачі спочатку формалізуємо задачу та поставимо їй у відповідність початково-крайову задачу для функції течії, яка має вигляд (1.51) – (1.53). Згідно з методом *R*-функцій функцію течії можна подати у вигляді:

$$\psi(x, y, t) = \omega^2(x, y)\Phi(x, y, t) = \omega^2\Phi\ ,$$

де Φ – невизначена компонента,

Функція $\omega(x, y)$ визначається формулою (2.14) та має такі властивості:

а) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;

б) $\omega(x, y) > 0$ у Ω;

в) $\omega(x,y)<0$ зовні $\mathrm{cl}\Omega$;

г) $\left.\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=-1.$

Для апроксимації невизначеної компоненти Φ скористаємося методом Гальоркіна для нестаціонарних задач. Тоді Φ можна подати у вигляді:

$$\Phi(x,y,t)\approx\Phi_n(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\tau_k(x,y),$$

де $c_k(t)$ – невідомі функції;

$\{\tau_k\}$ – будь-яка повна у просторі $L_2(\Omega)$ система функцій.

Тоді наближений розв'язок задачі (1.51) – (1.53) шукатимемо у вигляді:

$$\psi_n(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\varphi_k(x,y), \tag{2.16}$$

де $\varphi_k=\omega^2\tau_k$, $k=1,...,n$.

Скориставшись методом Гальоркіна можна отримати невідомі функції $c_k(t)$, $k=1,...,n$. Для цього скористаємося умовою ортогональності відхилу, який отримується у результаті підстановки (2.16) у (1.51):

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{c}_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{-\Delta}+\nu\sum_{k=1}^{n}c_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{\Delta^2}=(F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)},\ j=1,2,...,n, \tag{2.17}$$

де

$$[\varphi_k,\varphi_j]_{-\Delta}=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$(F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i(t)\cdot\varphi_j(x_i(t),\ y_i(t)),$$

$$[\varphi_k,\varphi_j]_{\Delta^2} = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}\right)dxdy.$$

Для розв'язання другої частини перемішування рідини спочатку потрібно визначити траєкторії руху окремих частинок рідини. Це можна зробити за допомогою розв'язання задачі Коші:

$$\dot{x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,t),\ \dot{y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y,t),$$

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0.$$

Далі потрібно побудувати траєкторію руху частинок рідини, скориставшись методом фазової площини та проаналізувати фазові траєкторії.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп’ютерної алгебри Mathematica 11.1

У наш час для виконання чисельних розрахунків та математичного моделювання використовують математичні пакети. Вони містять у собі велику кількість інструментів для проведення розрахунків з достатньо гарною точністю. За допомогою пакетів реалізовується більшість чисельних методів, наприклад, для розв’язання диференціальних рівнянь математичної фізики, що є математичними моделями фізико-механічних полів різної природи.

З усіх математичних пакетів можна виділити декілька найпопулярніших: Mathematica, Mathcad, MatLAB, Maple.

Mathematica є розповсюдженим та багатофункціональним пакетом, який можна застосувати до широкого кола наукових задач, використовуючи аналітичні та чисельні розрахунки.

Здатність проводи аналітичні розрахунки є найбільшою перевагою цієї програми, яка автоматизує математичні розрахунки. Mathematica дає змогу перетворювати та спрощувати алгебраїчні вирази, диференціювати та обчислювати інтеграли, розв’язувати диференціальні рівняння та системи. Версія 11 містить у собі покращений механізм для розв’язання диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Якщо задачу не можна розв’язати аналітично, то можна скористатися одним з вбудованих ефективних алгоритмів Mathematica для чисельних розрахунків. У версії 11 реалізований адаптивний контроль точності, який заснований на виборі внутрішніх алгоритмів. Ці алгоритми дозволяють максимізувати точність.

Окрім цього Mathematica 11 дозволяє будувати 2D та 3D графіки. Також за допомогою вбудованих функцій можна відстежити етапи побудови графіку. У новій версії посилено основні функції візуалізації, що дозволяє полегшити перегляд та використання графіків. Тепер можна додавати відмітки до конкрет-

них точок або до повного набору даних. Об’ємні графіки можна повернути, збільшити та змінити положення.

Інтерфейс програми складається з ядра та блокноту. Ядро проводить виконання команд та проводить розрахунки. Блокнот є робочою областю для написання та відображення результатів виконання коду.

3.2 Алгоритм розв’язання задачі перемішування в’язкої рідини, викликаного рухомими вихорами

Нехай рідина заповнює нарпівкругову область Ω радіуса R. Рух рідини в області Ω відбувається за допомогою двох рухомих вихорів.

Щоб знайти ефективний спосіб перемішування виконаємо такі дії:

а) задаємо характеристики області: R – радіус напівкола;

б) задаємо характеристики вихорів: (x_1, y_1) та (x_2, y_2) – точки розташування центру вихорів, r – радіус оберту та інтенсивності $\Gamma_1(t)$ та $\Gamma_2(t)$, які залежать від часу t;

в) задаємо траєкторії руху вихорів за допомогою функцій:

$$(x_1(t),\ y_1(t)) = (x_1 + r\cdot\cos(-t+\pi),\ \ y_1 + r\cdot\sin(-t+\pi)),$$

$$(x_2(t),\ y_2(t)) = \left(x_2 + r\cdot\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right),\ \ y_2 + r\cdot\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right);$$

г) будуємо будь-яку систему функцій $\{\tau_k\}$, яка буде повною у просторі $L_2(\Omega)$;

д) описуємо геометрію області за допомогою методу R-функцій, тобто будуємо функцію

$$\omega(x,y) = x + \frac{1}{2r}(r^2 - x^2 - y^2) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{4r^2}(r^2 - x^2 - y^2)^2}\ ;$$

е) задаємо систему координатних функцій, яка визначається за допомогою співвідношення

$$\varphi_k(x,y) = \omega^2 \tau_k\ ;$$

є) отримуємо функції $c_k(t)$, $k = 1,..., n$, шляхом розв'язання системи методу Гальоркіна:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k(t)[\varphi_k, \varphi_j]_{-\Delta} + \nu \sum_{k=1}^{n} c_k(t)[\varphi_k, \varphi_j]_{\Delta^2} = (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)},\ j = 1,2,...,n\ ;$$

ж) будуємо функцію течії $\psi_n(x, y, t)$, використовуючи формулу:

$$\psi_n(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi_k(x,y)\ ;$$

з) розв'язуємо рівняння руху лагранжевої частинки

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, t)\ ,$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t)\ ,$$

$$x(t_0) = x_0\ ,\ y(t_0) = y_0\ ;$$

и) будуємо траєкторії руху.

Потім необхідно замінити початкові умови в пункті б) та повторити пункти в) – з).

Порівнявши та проаналізувавши траєкторії руху, обрати найефективніший спосіб перемішування.

3.3 Опис програми

Реалізація програми відбувалася за допомогою математичного пакету Mathematica 11.1, яка дозволяє створювати програми у формі електронних документів.

Програма складається з декількох блоків. Перший блок містить у собі введення геометричних та фізичних параметрів системи, яка розглядається. Тут ми описуємо характеристики самої області та розташованих у ній вихорів. У другому блоці будується система функцій $\{\tau_k\}$, яка є повною у просторі $L_2(\Omega)$.

У третьому блоці будується функція $\omega(x, y)$, яка визначається формулою (2.15). Ця функція описує геометрію області за допомогою методу *R*-функцій.

У четвертому блоці задається система координатних функцій, яка визначається за допомогою співвідношення $\varphi_k = \omega^2 \tau_k$.

У п’ятому блоці розв’язується система (2.17) диференціальних рівнянь методу Гальоркіна, у результаті чого отримуємо функції $c_k(t)$, $k = 1,..., n$.

У шостому блоці будується функція течії $\psi_n(x, y, t)$, використовуючи формулу (2.16).

У сьомому блоці будуються траєкторії руху, тобто моделюється процес перемішування рідини рухомими вихорами з заданими інтенсивностями та розташуванням.

Текст програми наведено у додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Обчислювальний експеримент було проведено для напівкругової області радіуса два. Розглядалися різні режими перемішування: з різною кількістю вихорів, зі сталими та змінними інтенсивностями обертання вихорів.

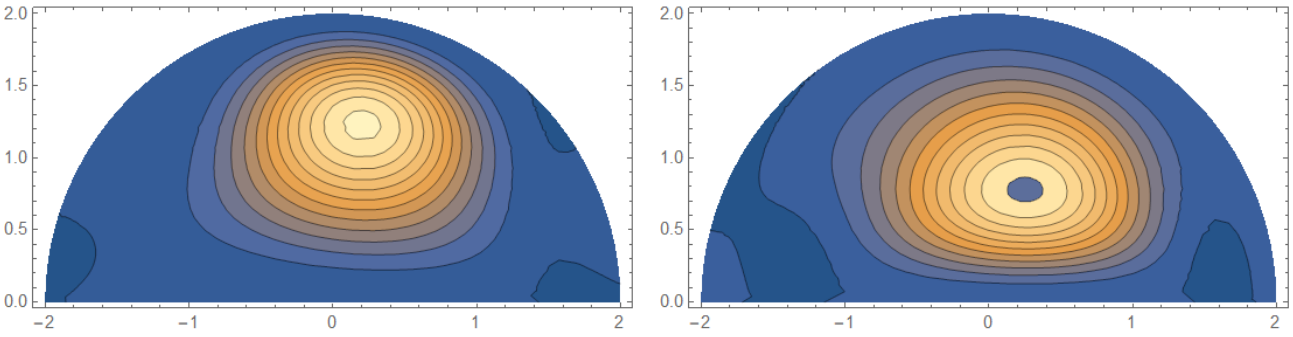
Нехай у напівкруговій області з радіусом $R = 2$ розташовано один вихор у точці з координатами $(0;1)$. Радіус обертання вихору $r = \frac{1}{2}$. Перший режим перемішування відбувається зі сталою інтенсивністю, що дорівнює 10. На рис. 4.1 зображено лінії рівня у момент часу $t = \frac{\pi}{3}$ при руху вихору проти годинникової стрілки (рис 4.1 а)) та за годинниковою стрілкою (рис 4.1 б)), а на рис 4.2 зображено траєкторії руху частинок для цих режимів перемішування.

На графіках можна побачити, що лінії рівня для цих режимів перемішування співпадають. Проте, якщо звернути увагу на траєкторії руху частинок, можна помітити, що режим обертання проти годинникової стрілки буде ефективнішим. На рис. 4.2 б) частинки рідини умовно поділилися на декілька груп та рухаються по замкнутих траєкторіях не виходячи за умовну межу, тому цей режим перемішування не буде ефективним. На рис 4.1 а) бачимо, що траєкторії частинок перетинаються одна с одною та частинки рухаються майже по всій області, тому цей режим можна вважати ефективним.

Розглянемо тепер рух частинок при змінній інтенсивності обертання вихору. Нехай вихор розташований у точці $(0;1)$ та обертається проти годинникової стрілки. Для першого режиму перемішування вихор має інтенсивність $\Gamma(t) = 10\sin t$, другий режим – $\Gamma(t) = 10\cos t$, де t – час. Траєкторії руху зображено на рис. 4.3. З графіків можна зробити висновок про те, що обидва режиму у порівнянні один з одним будуть ефективними.

Порівнюючи усі режими перемішування для одного вихору можна зробити висновок про те, що найефективнішим буде режим обертання вихору з пос-

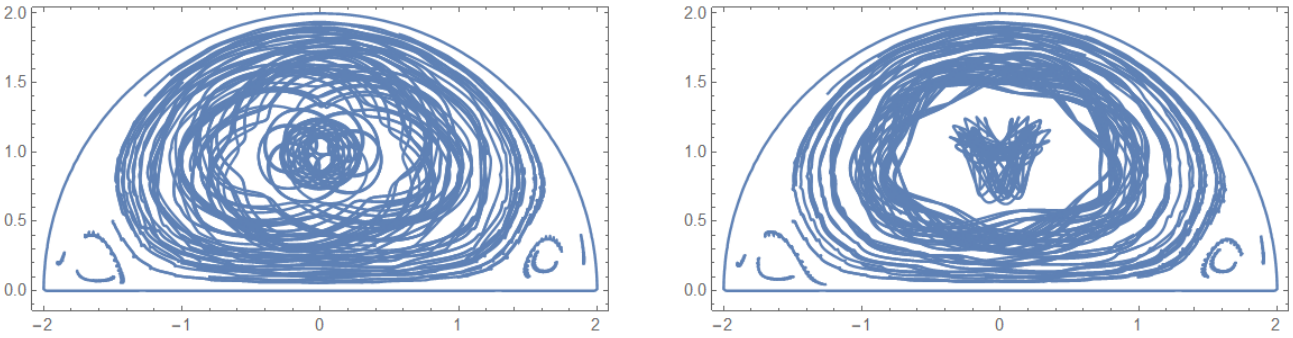
тійною інтенсивністю та проти годинникової стрілки.



а) б)

Рисунок 4.1 – Лінії рівня функції течії у момент часу $t = \frac{\pi}{3}$ при обертанні вихору:

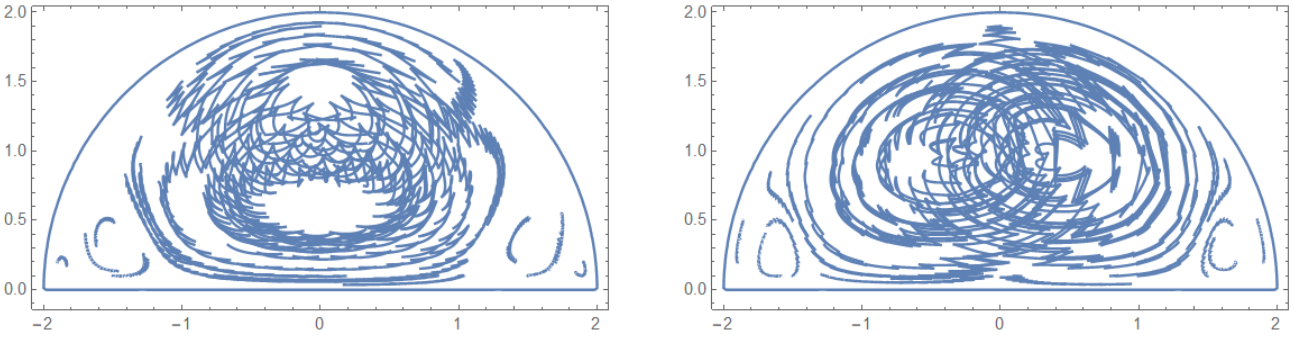
а) проти годинникової стрілки; б) за годинниковою стрілкою



а) б)

Рисунок 4.2 – Траєкторії руху частинок при обертанні вихору:

а) проти годинникової стрілки; б) за годинниковою стрілкою



а) б)

Рисунок 4.3 – Траєкторії руху частинок при змінній інтенсивності обертання:

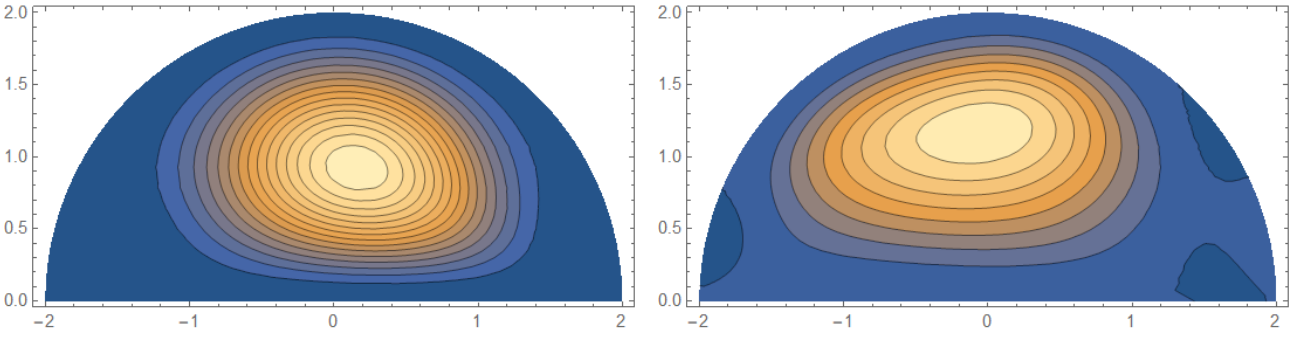
а) $\Gamma\ (t) = 10\sin t$; б) $\Gamma\ (t) = 10\cos t$

Нехай у напівкруговій області з радіусом $R = 2$ розташовано два вихори. Перший вихор розташований у точці з координатами $(-0,5;1)$ та обертається за годинниковою стрілкою, а другий має центр у точці з координатами $(0,5;1)$ та обертається проти годинникової стрілки. Радіус обертання вихорів $r = \frac{1}{2}$. Перший режим перемішування відбувається зі сталою інтенсивністю, що дорівнює 10 та 20. На рис. 4.4 зображено лінії рівня у момент часу $t = \pi$ (рис. 4.4 а)) та в момент $t = \frac{\pi}{6}$ (рис. 4.4 б)), а на рис 4.5 зображено траєкторії руху частинок для цих інтенсивностей.

З траєкторій руху ми бачимо, чим більше інтенсивність, тим краще та швидше перемішується рідина. Цей режим буде ефективним, оскільки траєкторії частинок рухаються по всій області та перетинаються одна з одною.

Другий режим перемішування відбувається при змінній інтенсивності вихорів. На рис. 4.6 а) зображено траєкторій руху для інтенсивності $\Gamma\ (t) = 10\sin t$, а на 4.6 б) для $\Gamma\ (t) = 10\cos t$.

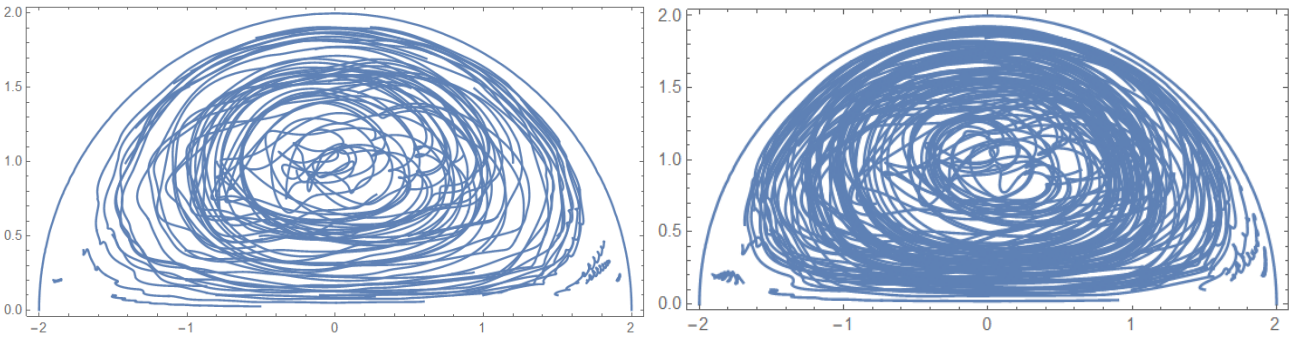
Обидва режими будуть ефективними, проте для другого режиму зі змінними інтенсивностями потрібно більше часу щоб перемішати рідину. Це пов’язано з тим, що вихорі при обертанні змінюють свої швидкісті.



а) б)

Рисунок 4.4 – Лінії рівня функції течії у момент часу:

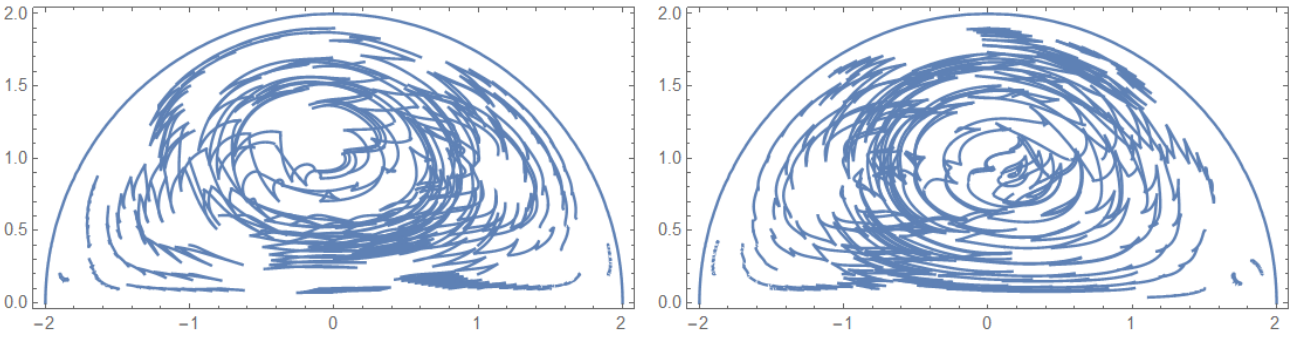
а) $t = \pi$; б) $t = \frac{\pi}{6}$



а) б)

Рисунок 4.5 – Траєкторії руху частинок при інтенсивності:

а) 10; б) 20



а) б)

Рисунок 4.6 – Траєкторії руху частинок при інтенсивностях:

а) $\Gamma\ (t) = 10\sin t$; б) $\Gamma\ (t) = 10\cos t$

На рис. 4.7 зображена траєкторія руху частинки, яка розпочинає рух у точці $(0,5;1)$. Рух викликаний двома вихорами зі сталими інтенсивностями.

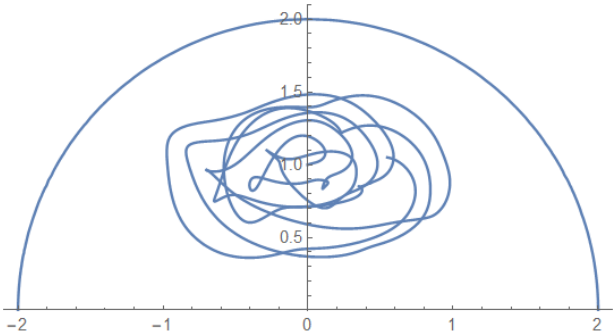


Рисунок 4.7 – Траєкторія руху окремої частинки

ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи було досліджено процес перемішування в’язкої рідини. Рух рідини було викликано рухомими вихорами. Процес перемішування розглядався у напівкруговій області для різних інтенсивностей та при різній кількості вихорів.

1. Було проведено аналіз математичних методів та методів чисельного аналізу, у ході якого було виділено метод R-функцій та метод Гальоркіна.

2. За допомогою обраних методів було отримано розв’язок початково-крайової задачі для функції течії у розглядуваній області. Метод R-функцій допоміг точно врахувати геометрію області. Розв’язок отримано у аналітичному вигляді, тому це спростило розв’язання задачі перемішування.

3. За допомогою методу фазової площини був змодельований та проілюстрований процес перемішування

4. Знаходження ефективного способу перемішування відбувалося шляхом побудови ліній рівня функції течії та траєкторій руху окремих частинок. Розроблений алгоритм було реалізовано за допомогою математичного пакету Mathematica 11.1.

5. Розроблений алгоритм у подальшому можна використовувати в наукових дослідженнях у фізиці, хімії, біології, медицині, косметології та також інженерній практиці гідродинаміки. Реалізовані у роботі методи можуть застосовуватися при аналізі процесів перемішування у більш геометрично складних областях та при різних режимах руху рідини.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Ландау Л. Ф., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Москва : Физматлит, 2003. 736 с.

2. Шкадов В. Я., Запрянов З. Д. Течения вязкой жидкости. Москва : Изд-во МГУ, 1984. 200 с.

3. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1986. 351 с.

4. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. Москва : Мир, 1991. 504 с.

5. Васильев М. М., Ефимкин К. Н., Иванова В. Н. О применении метода гидродинамических потенциалов к задаче обтекания тела вязкой жидкостью // Математическое моделирование. 1994. №10, Т.6. С .57–65.

6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. Москва : Мир, 1967. 311 с.

7. Perumal D. A., Kumar G. V. S., Dass A. K. Lattice Boltzmann simulation of flow over a circular cylinder at moderate Reynolds numbers // Thermal Science. 2012. P. 93–93.

8. Солонников В. А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса // Труды МИАН СССР. 1964. Т. 70. С. 213–317.

9. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. Москва : Мир, 1981. 408 с.

10. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Москва : Наука, 1970. 288 с.

11. Зарубин А. Г. Об уравнении пограничного слоя в двумерной теории океанических течений // Докл. АН СССР, сер. Математика. Физика. 1968. Т. 179, №4, 5, 6. С. 798–801.

12. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи математических наук,

1983. Т. 38, вып. 2 (230). С. 3–76.

13. Мелешко В. В., Краснопольская Т. С. Смешивание вязких жидкостей. // Нелинейная динамика. 2005. Т. 1, № 1. С. 69–109.

14. Артюх А. В., Гибкина Н. В.,Сидоров М. В. Об одном методе математического моделирования некоторых процессов перемешивания с помощью метода R-функций // АСУ и приборы автоматики. 2008. Вып. 143. С. 67–73.

15. Дунаева Т. А.,Гуржий А. А., Мелешко В. В. Перемешивание вязкой жидкости в полукруге при малых числах Рейнольдса // Прикладна гідромеханіка. 2001. Т. 3 (75), № 2. С. 15–24.

16. Гринченко В. Т., Исаева Т. Л., Мелешко В. В. Двумерное течение вязкой жидкости в прямоугольной плоскости при малом числе Рейнольдса // Доклады АН УССР. 1991. Т. 8. С. 69–75.

17. Ламтюгова С. М., Сидоров М. В. Застосування методу R-функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини // Матеріали XXII-ї відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАН України. Львів, 2011. С. 241–244.

18. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Москва : Мир, 1990. Т. 1. 384 с.

19. Алексюк А. И. Исследование отрывных обтеканий тел методом численного решения уравнений Навье-Стокса: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.05 "Механика жидкости, газа и плазмы" / Москва, 2013. 19 с.

20. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. Москва : Наука, 1973. 416 с.

21. Мызинкова Б. И., Тарунин Е. Л. Применение метода фиктивных областей для решения уравнений Навье-Стокса в переменных функциях тока и вихрь скорости // Исследование тепловой конвекции и теплопередачи. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 45–47.

22. Вабищевич П. Н. Численная реализация метода фиктивных областей для нестационарных областей Навье-Стокса // Численные методы механики

сплошной среды. 1985. Т. 16, № 6. С. 19–27.

23. Вабищевич П. Н., Вабищевич Т. Н. Об одном подходе к приближенному решению задач стационарной конвекции вязкой несжимаемой жидкости // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 7. С. 1131–1140.

24. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение метода *R*-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна математика і механіка. 2003. № 602, вып. 53. С. 61–67.

25. Рвачев В. Л., Суворова И. Г., Шейко Т. И. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R-функций в системе “Поле-3” // Математические методы и физико-механические поля, 1991. Вып. 33. С. 95–99.

26. Артюх А. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом *R*-функцій нестаціонарних течій в’язкої нестисливої рідини : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2015. 251 с.

27. Ламтюгова С. Н. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R-функцій задач обтікання тіл в’язкою нестисливою рідиною : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2016. 273 с.

28. Сидоров М. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз течій в’язкої рідини в однозв’язних і багатозв’язних областях методом R-функцій : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2008. 202 с.

29. Максименко-Шейко К. В. Математичне моделювання фізико-математичних полів з гвинтовим типом симетрії методом R-функцій. Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2003. 18 с.

30. Experimental Study of Lagrangian Turbulence in a Stokes Flow / J. Chaiken, R. Chevray, M. Tabor, Q. M. Tan // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1986. 408 (1834). P. 165–174.

31. Гущин В. А., Матюшин П. В. Математическое моделирование пространственных теченийнесжимаемой жидкости // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 5. С. 5–20.

32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Москва : Наука, 1986. 736 с.

33. Aref H. The Development of Chaotic Advection // Physics of Fluids. 2002. V. 14, № 4. P. 1315–1325.

34. Рвачев В. Л., Курпа Л. В. R-функции в задачах теории пластин. Киев : Наук. думка, 1987. 176 с.

35. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Москва : Наука, 1966. 432 с.

36. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.

37. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физики. Киев : Наукова думка, 1974. 260 с.

38. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Москва : Эдиториал УРСС, 2001. 320 с.

39. Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский и др. Москва-Ижевск : Ин-т комп. исслед., 2003. 704 с.

40. Шабратко Є. Ю. Дослідження процесів перемішування в’язких рідин методом *R*-функцій // 25-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелек-троніка та молодь у XXI столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 20-22 квітня 2021 р.). Т. 7/10. Харків : ХНУРЕ, 2021. С. 51–52.