*Материалы XVII Международного молодежного форума «**Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке**»*
(Харьков, ХНУРЭ, 22 – 24 апреля 2013). – Т. 7.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

Васильева Ю.В.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина,14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: Vs_julie@mail.ru

In this work the Dirichlet problem for an elliptical equation with exponential nonlinearity is considered. The delivered boundary value problem is a mathematical model of the task about thermal inflaming. The solution of a nonlinear boundary value problem is consolidated to the solution of sequence of the linear boundary value problems. On each step of iterative process for obtaining the numerical decision methods of R-functions and Ritz are used.

Рассмотрим задачу о тепловом самовоспламенении химически активной смеси газов в сосуде. Пусть некоторый сосуд произвольной формы заполнен такой смесью. В ходе реакции, идущей в сосуде, происходит уничтожение некоторых компонент смеси и вследствие этого происходит тепловыделение.

В предположении, что выгорание горючей компоненты незначительно, от системы уравнений теплопроводности и диффузии можно перейти к нелинейному уравнению относительно безразмерной температуры u вида

$$\Delta u = f(u). \qquad (1)$$

Уравнение (1) рассматривается в области горения Ω, функция $f(u)$ отвечает за интенсивность тепловыделения. В [1] функцию $f(u)$ предлагается взять в виде $f(u)=e^u$. Предположим также, что известно

$$u\big|_{\partial\Omega} = u_0. \qquad (2)$$

Возьмем $u_0 = 0$ и в задаче (1), (2) с $f(u)=e^u$ перейдем к новой неизвестной функции $v=-u$. Тогда получим следующую задачу

$$-\Delta v = e^{-v} \text{ в } \Omega, \qquad (3)$$

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (4)$$

Задача (3), (4) является задачей Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения. Для ее решения предлагается использовать следующий итерационный процесс последовательных приближений по нелинейности. Пусть нулевое приближение $v^{(0)}$ задано (например, можно взять $v^{(0)} \equiv 0$). Если k-е приближение найдено, то новое $(k+1)$-е приближение предлагается искать как решение линейной задачи

$$-\Delta v^{(k+1)} = e^{-v^{(k)}} \text{ в } \Omega, \qquad (5)$$

$$v^{(k+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (6)$$

Оператор краевой задачи (5), (6) является положительно определенным, поэтому для решения задачи (4), (5) на каждом шаге итерационного процесса воспользуемся методом R-функций [2] и энергетическим методом (методом Ритца) [3].

Согласно энергетическому методу $v^{(k+1)}$ является точкой минимум в энергетическом пространстве $H_{-\Delta}$ функционала энергии:

$$v^{(k+1)} = \inf_{v \in H_{-\Delta}} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2ve^{-v^{(k)}} \right] dxdy. \quad (7)$$

Согласно методу Ритца приближенное решение задачи (7) ищем в виде

$$u^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k+1)} \varphi_i ,$$

где $\{\varphi_i\}$ – координатная последовательность, т.е. последовательность функций, удовлетворяющая условиям:

1) $\forall i \quad \varphi_i \in H_{-\Delta}$; 2) $\forall n \quad \varphi_1, ..., \varphi_n$ линейно независимы;

3) система $\{\varphi_i\}$ полна в $H_{-\Delta}$.

Координатную последовательность согласно методу R-функций возьмем в виде $\varphi_i = \omega\tau_i$, где $\{\tau_i\}$ – любая полная в пространстве $L_2(\Omega)$ система функций (степенные или тригонометрические полиномы, сплайны и т.д.), а функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям:

1) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;

2) $\omega(x, y) > 0$ в Ω;

3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$, т.е. $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение $\partial\Omega$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Числа $c_i^{(k+1)}$, $i = 1, ..., n$, находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(k+1)} [\varphi_i, \varphi_j]_{-\Delta} = (e^{-v^{(k)}}, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \; j = 1, ..., n,$$

где

$$[\varphi_i, \varphi_j]_{-\Delta} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} \right) dxdy, \; (e^{-v^{(k)}}, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} e^{-v^{(k)}} \varphi_j dxdy.$$

1. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – М.: Интеллект, 2008. – 408 с.

2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.