

ISSN 0453-8048

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

імені В.Н. КАРАЗІНА

№ 646

РАДІОФІЗИКА ТА ЕЛЕКТРОНІКА

Випуск 2' 2004

Radiophysics and Electronics

ХАРКІВ
2004

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДВОЙНОЙ РАВНОПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

В.А. Дорошенко¹⁾, О.Г. Литвинова²⁾

¹⁾Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, пр.Ленина 14, 61166

²⁾Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина, Харьков, пл.Свободы,4, 61077

Поступила в редакцию 29 ноября 2004 г.

Рассмотрена задача дифракции плоской электромагнитной волны на трехмерной двойной равнопериодической конической решетке, состоящей из двух коаксиальных круговых конусов. Падающая волна, поле которой меняется по гармоническому закону, распространяется вдоль оси двойной конической решетки. Метод решения задачи основан на использовании интегрального преобразования Конторовича-Лебедева и метода полуобращения, вследствие чего исходная электродинамическая задача свелась к решению системы линейных алгебраических уравнений. В случае простой полупрозрачной конической решетки с внутренним сплошным коническим экраном получено аналитическое решение.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дифракция, трехмерная коническая решетка, интегральное преобразование, аналитическое решение.

При исследовании многих задач радиофизики, радиотехники, радиосвязи необходимо знать структуру электромагнитного поля в рассматриваемой части пространства. С такими задачами обычно сталкиваются, например, при разработке антенн и повышении их помехозащищенности, обеспечении электромагнитной совместимости радиотехнических систем, разработке различных линий передачи энергии [1,2]. Для анализа электромагнитного поля требуется рассмотреть соответствующую электродинамическую задачу, найти ее решение и на его основе провести исследования. Использование аналитических и численно-аналитических методов позволяет качественно изучить структуру поля и произвести численные расчеты электродинамических характеристик. В современных прикладных исследованиях аналитические решения часто привлекаются для проверки законов, следующих из определенного класса задач, так как объемные комплексные решения, основанные на использовании ЭВМ, трудно быстро проверить другими способами. С помощью аналитических и численно-аналитических методов удастся получить решение задачи для ряда предельных асимптотических случаев, например, высоких или низких частот, узких щелей или узких лент рассеивающей структуры. Предложенный и развитый в [3, 4] численно-аналитический метод был использован для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских периодических ленточных, незамкнутых цилиндрических и сферических структурах. Сочетание этого метода и интегрального преобразования Конторовича-Лебедева [5] позволило получить как аналитическое, так и численное решения трехмерной задачи рассеяния электромагнитных волн на одиночном полубесконечном тонком идеально проводящем конусе с периодическими продольными щелями [6-9], представляющего собой модель конической сверхширокополосной антенны и радиолокационного отражателя [10], которые используются в современных радиотехнических системах.

Целью данной работы является развитие метода, предложенного в [5] для исследования задачи дифракции плоской электромагнитной волны на трехмерной двойной равнопериодической тонкой идеально проводящей конической решетке, состоящей из двух коаксиальных конусов, получение аналитического решения и на его основе изучение спектра граничной электродинамической задачи, структуры поля и его поведения вблизи вершины.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

На двойную коническую решетку Σ , составленную из двух коаксиальных круговых тонких идеально проводящих полубесконечных конусов Σ_1 , Σ_2 ($\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$) с периодическими продольными щелями и общей вершиной, падает вдоль оси плоская электромагнитная волна, поле которой меняется во времени по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$ (Рис. 1). Поскольку конусы являются координатными поверхностями сферической системы координат r, θ, φ , введем ее с началом в вершине конусов Σ_j , $j = 1, 2$, которые определяются уравнениями $\theta = \gamma_j$. Число щелей каждого из конусов обозначим через N , а их угловую ширину через d_j . Период структуры $l = 2\pi/N$ и угловая

ширина – величины двугранных углов, образованных плоскостями, которые проведены через ось конусов и ребра соседних конических лент. Среда, в которую помещена коническая решетка, является однородной и изотропной с диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями. Электромагнитное

поле $\vec{E}, \vec{H}$ в пространстве с двойной конической решеткой Σ удовлетворяет уравнениям Максвелла, граничному условию обращения тангенциальной составляющей электрического поля на конических лентах конусов, условию излучения и условию ограниченности энергии. Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение [11]. Представим

искомое поле $\vec{E}, \vec{H}$ в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1, \quad (1)$$

$$\text{где } \vec{E}_0 = (E_{0x}, 0, 0), \quad \vec{H}_0 = (0, H_{0y}, 0)$$

поле плоской волны,

$$E_{0x} = e^{ikz}, H_{0y} = \frac{1}{w} e^{ikz}, \quad (2)$$

$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ - волновое число, w - волновое

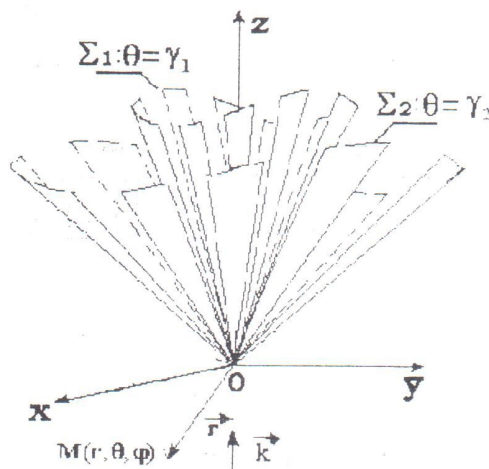


Рис. 1. Геометрия структуры

сопротивление среды, поле $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ обусловлено присутствием конической решетки. Для удобства решения граничной электродинамической задачи используем электрический $v^{(1)}(r, \theta, \varphi)$ и магнитный $v^{(2)}(r, \theta, \varphi)$ потенциалы Дебая, через которые составляющие электромагнитного поля (1) выражаются по следующим формулам [12]

$$\begin{aligned} E_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (rv^{(1)}), & H_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (rv^{(2)}), \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rv^{(1)}) + \frac{ikw}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} v^{(2)}, & H_\theta &= -\frac{ik}{w \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} v^{(1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rv^{(2)}), \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rv^{(1)}) - ikw \frac{\partial}{\partial \theta} v^{(2)}, & H_\varphi &= \frac{ik}{w} \frac{\partial}{\partial \theta} v^{(1)} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rv^{(2)}). \end{aligned} \quad (3)$$

Неизвестные потенциалы $v^{(\chi)}$, $\chi = 1, 2$, удовлетворяют:

- 1) однородному уравнению Гельмгольца
 $(\Delta + k^2)v^{(\chi)} = 0$ всюду вне конической структуры Σ ;

- 2) краевому условию на лентах конусов:

$$\frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}} v^{(\chi)} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (4)$$

где $\vec{n}$ - вектор внешней нормали к конической поверхности;

- 3) условию излучения;
- 4) условию конечности энергии.

Таким образом, задача дифракции плоской электромагнитной волны на двойной конической решетке эквивалентна решению первой ($\chi = 1$) и второй ($\chi = 2$) краевым задачам математической физики для уравнения Гельмгольца с конической геометрией. В соответствии со структурой электромагнитного поля (1) запишем потенциалы $v^{(\chi)}$ в виде

$$v^{(\chi)} = v_0^{(\chi)} + v_1^{(\chi)},$$

где потенциалы $v_1^{(\chi)}$ соответствуют полю $\vec{E}_1, \vec{H}_1$, а потенциалы $v_0^{(\chi)}$ полю плоской волны $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ (2), при чем для последних имеет место известное представление [13]:

$$v_0^{(1)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \theta) d\tau + i \cos \varphi \tau g \frac{\theta \sin kr}{2 k^2 r}, \quad (5)$$

$$v_0^{(2)} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \theta) d\tau + i \sin \varphi \tau g \frac{\theta \sin kr}{2 k^2 r}, \quad (6)$$

где $H_{i\tau}^{(1)}(kr)$ - функция Ханкеля первого рода, $P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta)$ - присоединенная функция Лежандра первого рода.

Для решения краевых задач с конической геометрией эффективным средством является интегральное преобразование Конторовича-Лебедева [14]

$$G(\tau) = \int_0^{+\infty} g(r) e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} dr, \quad (7)$$

$$g(r) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} G(\tau) \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} d\tau. \quad (8)$$

Принимая во внимание представление для $v_0^{(\chi)}$ (5), (6), потенциалы $v_1^{(\chi)}$ ищем с помощью интегрального преобразования (7), (8) в виде:

$$v_1^{(\chi)} = v_{1, \partial \hat{\alpha} \hat{n} \hat{\omega}}^{(\chi)} + v_{1, \hat{n} \hat{\omega}}^{(\chi)},$$

$$v_{1, \partial \hat{\alpha} \hat{n} \hat{\omega}}^{(\chi)} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tau \theta \pi \tau e^{-\frac{\pi \tau}{2}} \hat{v}_{1, \partial \hat{\alpha} \hat{n} \hat{\omega}}^{(\chi)} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} d\tau,$$

$$\hat{v}_{1, \partial \hat{\alpha} \hat{n} \hat{\omega}}^{(\chi)} = \sum_{m=-1;1} b_{m\tau}^{(\chi)} \hat{U}_{m\tau}^{(\chi)},$$

$$\hat{U}_{m\tau}^{(\chi)} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\alpha}_{mn}^{(\chi)}(\tau) P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & 0 < \theta < \gamma_1, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\hat{\beta}_{mn}^{(\chi)}(\tau) P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \theta) + \hat{\xi}_{mn}^{(\chi)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \theta)] e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_1 < \theta < \gamma_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\eta}_{mn}^{(\chi)}(\tau) P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos \theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_2 < \theta < \pi \end{cases}$$

$$v_{1, \hat{n} \hat{\omega}}^{(\chi)} = \frac{\sin kr}{k^2 r} \sum_{m=-1;1} \hat{b}_m^{(\chi)} \hat{U}_m^{(\chi)},$$

$$\hat{U}_m^{(\chi)} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{mn}^{(\chi)} P_0^{-|m+nN|}(\cos \theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & 0 < \theta < \gamma_1, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\beta_{mn}^{(\chi)} P_0^{-|m+nN|}(\cos \theta) + \xi_{mn}^{(\chi)} P_0^{-|m+nN|}(\cos \theta)] e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_1 < \theta < \gamma_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_{mn}^{(\chi)} P_0^{-|m+nN|}(-\cos \theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_2 < \theta < \pi \end{cases}$$

$$\alpha_{mn}^{(\chi)} = \lim_{i\tau \rightarrow 1/2} \hat{\alpha}_{mn}^{(\chi)}(\tau), \beta_{mn}^{(\chi)} = \lim_{i\tau \rightarrow 1/2} \hat{\beta}_{mn}^{(\chi)}(\tau), \xi_{mn}^{(\chi)} = \lim_{i\tau \rightarrow 1/2} \hat{\xi}_{mn}^{(\chi)}(\tau), \eta_{mn}^{(\chi)} = \lim_{i\tau \rightarrow 1/2} \hat{\eta}_{mn}^{(\chi)}(\tau).$$

Использование краевого условия на лентах конуса (4) и условия непрерывности поля в щелях приводит к следующей связанной системе функциональных уравнений относительно коэффициентов

$\hat{\alpha}_{mn}^{(\chi)}, \hat{\beta}_{mn}^{(\chi)}, \hat{\xi}_{mn}^{(\chi)}, \hat{\eta}_{mn}^{(\chi)}$, через которые выражаются неизвестные коэффициенты $\hat{\alpha}_{mn}^{(\chi)}, \hat{\beta}_{mn}^{(\chi)}, \hat{\xi}_{mn}^{(\chi)}, \hat{\eta}_{mn}^{(\chi)}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{z}_{m,n}^{(\chi),j} e^{i(n+v)N\varphi} = \tilde{g}_{ir}^{(\chi),m}(\gamma_j) e^{i(m_0+v)N\varphi}, \quad \text{ленты } \Sigma_j, \quad (9)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_{nj}^{(\chi)} \left\{ \hat{z}_{m,n}^{(\chi),1} \left[\hat{h}_{ir}^{(\chi),(n+v)N}(\pi - \gamma_2, \pi - \gamma_1) \right]^{j-1} - \hat{z}_{m,n}^{(\chi),2} \left[\hat{h}_{ir}^{(\chi),(n+v)N}(\pi - \gamma_1, \pi - \gamma_2) \right]^{2-j} \right\} e^{i(n+v)N\varphi} = 0, \\ \text{щели } \Sigma_j, \quad (10)$$

$$M_{nj}^{(\chi)} = [N(n+v)]^{\zeta(\chi)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{nj}^{(\chi)}), \quad \zeta(\chi) = (-1)^{\chi-1},$$

$$[N(n+v)]^{\zeta(\chi)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{nj}^{(\chi)}) = \frac{(-1)^{(n+v)N+\chi-1} ch\pi\tau}{\pi(\sin \gamma_j)^{1-\zeta(\chi)}} \frac{\Gamma(1/2+i\tau+(n+v)N)}{\Gamma(1/2+i\tau-(n+v)N)} \times$$

$$\frac{1}{d\gamma_j^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+v)N}(\cos \gamma_j) \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_j^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+v)N}(-\cos \gamma_j) \frac{1}{1 - \hat{C}_{ir}^{(\chi),(n+v)N}(\gamma_1 \gamma_2)},$$

$$\hat{C}_{ir}^{(\chi),(n+v)N}(x, y) = \frac{\frac{d^{\chi-1}}{dx^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+v)N}(\cos x) \frac{d^{\chi-1}}{dy^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+v)N}(-\cos y)}{\frac{d^{\chi-1}}{dx^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+v)N}(-\cos x) \frac{d^{\chi-1}}{dy^{\chi-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+v)N}(\cos y)},$$

$\hat{h}_{ir}^{(\chi),(n+v)N}(\gamma_1, \gamma_2)$ - известные коэффициенты, а $\tilde{g}_{ir}^{(\chi),m}$ определяются полем плоской волны,

$\frac{m}{n} = m_0 + v, \quad -\frac{1}{2} \leq v < \frac{1}{2}$ m_0 - ближайшее целое к $\frac{m}{n}$. В случае сплошного внутреннего конуса Σ_1

системы (9), (10) превращаются в одну систему функциональных уравнений, определенную на лентах и в щелях конуса Σ_2 .

КОНИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА С ВНУТРЕННИМ СПЛОШНЫМ КОНИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим задачу дифракции плоской электромагнитной волны (2) на конической решетке Σ_2 с внутренним сплошным коническим экраном Σ_1 . Система уравнений (9), (10) является системой линейных уравнений первого рода и из-за неустойчивости малоприспособна для реализации [15]. Однако вследствие ее регуляризации [15] в рассматриваемом случае приходим к системе линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского (СЛАУ-2) типа следующего вида

$$\hat{Z}_m^{(\chi)} = A_m^{(\chi)} \hat{Z}_m^{(\chi)} + \hat{B}_m^{(\chi)}, \quad (11)$$

где $\hat{Z}_m^{(\chi)} = \{\hat{z}_{mn}^{(\chi)}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ - столбец неизвестных коэффициентов, $A_m^{(\chi)}, \hat{B}_m^{(\chi)}$ - матрица системы и столбец свободных членов соответственно. Матричный оператор системы (11) является вполне непрерывным, что позволяет получить как численное решение СЛАУ-2 (11) методом редукции с наперед заданной точностью для любых параметров задачи, так и аналитическое решение методом последовательных приближений [16] в некоторых частных случаях рассматриваемой структуры (полупрозрачная решетка, узкие щели, узкие конические ленты).

Для полупрозрачной конической решетки Σ_2 , которая определяется существованием предела ($m = \pm 1, m_0 = 0$)

$$W_1 = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 1}} \left[-\frac{1}{N} \ln \cos \frac{\pi d_2}{2l} \right], \quad (12)$$

получим аналитическое решение и проведем анализ спектра граничной электродинамической задачи. структуры поля и его поведения вблизи вершины конической структуры.

В случае полупрозрачной решетки ($N \gg 1$, $(l - d_2)/l \ll 1$, $W_2 = 0$) поле в области $\gamma_2 < \theta < \pi$ обуславливается только коэффициентом $\hat{\eta}_{m0}^{(\chi)}$:

$$\hat{\eta}_{m0}^{(1)} = \frac{1}{P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma_2)} \left[\hat{C}_{i\tau}^{(1),m}(\gamma_1, \gamma_2) + \hat{A}_{i\tau}^{(m)} \frac{1 - \hat{C}_{i\tau}^{(1),m}(\gamma_1, \gamma_2)}{\hat{A}_{i\tau}^{(m)} + 2W_1} \right],$$

$$\hat{\eta}_{m0}^{(2)} = \frac{\hat{C}_{i\tau}^{(2),m}(\gamma_1, \gamma_2)}{\frac{d}{d\gamma_2} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma_2)}, \quad \hat{A}_{i\tau}^{(m)} = \frac{1}{m(1 - \varepsilon_{02}^{(1)})}.$$

Электрический потенциал Дебая $U_1^{(1)}$ в этом случае может быть представлен в следующем виде

$$U_1^{(1)} = U_1^{(1), \tilde{m} \tilde{e} i \Sigma_1} + U_1^{(1), \Sigma_{1,2}}, \quad (13)$$

где $U_1^{(1), \tilde{m} \tilde{e} i \Sigma_1}$ соответствует потенциалу при дифракции плоской волны (2) на одиночном (в отсутствии Σ_2) сплошном конусе Σ_1 [13], а слагаемое $U_1^{(1), \Sigma_{1,2}}$ учитывает взаимодействие полей вследствие присутствия конуса Σ_1 и конической решетки Σ_2 , причем

$$U_1^{(1), \Sigma_{1,2}} = \cos \varphi \int_0^{+\infty} \varpi_{i\tau} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \hat{A}_{i\tau}^{(-1)} \frac{1 - \hat{C}_{i\tau}^{(1),-1}(\gamma_1, \gamma_2)}{\hat{A}_{i\tau}^{(-1)} + 2W_1} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma_2)}{P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma_2)} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \theta) d\tau -$$

$$- itg^2(\gamma_2/2) \frac{(1 - tg^2(\gamma_1/2)/tg^2(\gamma_2/2))^2}{1 - tg^2(\gamma_1/2)/tg^2(\gamma_2/2) + 2W_1} \cos \varphi \cdot ctg \frac{\theta \sin kr}{2 k^2 r}, \quad \gamma_2 < \theta < \pi, \quad (14)$$

$$\varpi_{i\tau} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{i\frac{\pi}{4}} \tau th \pi \tau \cdot e^{-\frac{\pi \tau}{2}}.$$

Аналогичные представления для $U_1^{(1), \Sigma_{1,2}}$ имеет место и при $\gamma_1 < \theta < \gamma_2$. Предельный переход в (14) при $W_1 \rightarrow 0$, что соответствует превращению полупрозрачной структуры в сплошной конус Σ_2 , приводит в (13) к потенциалу для сплошного конуса Σ_2 [13]. Устремляя γ_1 к нулю (внутренний конус Σ_1 исчезает) получаем потенциал Дебая $U_1^{(1)}$ для одиночного полупрозрачного конуса Σ_2 [9]. Магнитный потенциал Дебая $U_1^{(2)}$ в случае полупрозрачного конуса не испытывает присутствия полупрозрачной конической решетки Σ_2 и совпадает с магнитным потенциалом Дебая для одиночного сплошного конуса Σ_1 . В соответствии с вышеизложенным заключаем, что структура дифрагированного поля такова, что в ней можно выделить вклад сплошного конуса и поле, соответствующее взаимодействию сплошного конуса Σ_1 и полупрозрачной конической решетки Σ_2 . Переходя в (14) к интегрированию по мнимой оси ($\hat{\mu} = i\tau$) и применяя теорему Коши о вычетах [17], потенциал $U_1^{(1)}$ можно представить в виде ряда по полюсам подынтегральной функции. Аналогичные представления можно получить и для $U_1^{(2)}$. Подставляя эти формулы в (3), получим выражения для составляющих электромагнитного поля. Каждая из составляющих запишется в виде ряда, суммирование в котором проводится по полюсам подынтегральной функции в интегральных представлениях. Множество этих полюсов назовем спектром граничной электродинамической задачи. Спектр граничной задачи определяет набор мод дифрагированного поля и поведение поля вблизи вершины ($kr \ll 1$) [9, 18]. Поле у вершины конической структуры ведет себя следующим образом:

$$|\vec{E}| \sim |kr|^{-1+\alpha}, \quad |\vec{H}| \sim |kr|^{-1+\beta}, \quad (15)$$

где величины α и β выражаются через наименьшие собственные значения спектра первой ($\chi = 1$) и второй ($\chi = 2$) краевых задач для потенциалов $U_1^{(\chi)}$ соответственно.

В рассматриваемом случае полупрозрачного конуса спектр задачи состоит из корней уравнения

$$\frac{\pi}{\cos \pi \hat{\mu}} (\hat{\mu}^2 - 1/4) P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(\cos \gamma_2) P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2) [1 - \hat{C}_{\hat{\mu}}^{(1),-1}(\gamma_1, \gamma_2)] = 2W_1 \quad (16)$$

и корней

$$\frac{d}{d\gamma_1} P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_1) = 0. \quad (17)$$

Корни уравнения (17) изучены и их значения приведены, например, в [19, 20]. Проведем аналитическое исследование корней уравнения (16) в случаях узкого сплошного конуса Σ_1 ($\gamma_1 \ll 1$), а также при $W_1 \ll 1$.

1) $\gamma_1 \ll 1$.

Используя асимптотическое поведение функций $P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(\pm \cos \gamma_1) = 0$ при $\gamma_1 \ll 1$ преобразуем уравнение (16) к виду

$$g_{\hat{\mu}}^{(-1)}(\gamma_2, W_1) = -\frac{\gamma_1^2}{4 \cos^2 \pi \hat{\mu}} (\hat{\mu}^2 - 1/4)^2 [P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2)]^2 [1 + O(\gamma_1^2)], \quad (18)$$

где

$$g_{\hat{\mu}}^{(-1)}(\gamma_2, W_1) = \frac{\pi}{\cos \pi \hat{\mu}} (\hat{\mu}^2 - 1/4) P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(\cos \gamma_2) P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2) - 2W_1.$$

Уравнение (18) является уравнением с малой правой частью и корни его находятся вблизи нулей функции $g_{\hat{\mu}}^{(-1)}(\gamma_2, W_1)$:

$$\tilde{\mu}_n^{(-1)} = \zeta_n^{(-1)}(\gamma_2, W_1) - \gamma_1^2 \cdot \kappa(\zeta_n^{(-1)}, \gamma_2) + O(\gamma_1^4). \quad (19)$$

$$\kappa(\hat{\mu}, \gamma_2) = \frac{1}{\frac{d}{d\hat{\mu}} g_{\hat{\mu}}^{(-1)}} \frac{\pi^2}{\cos^2 \pi \hat{\mu}} (\hat{\mu}^2 - 1/4)^2 [P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2)]^2,$$

$$g_{\hat{\mu}}^{(-1)} \Big|_{\zeta_n^{(-1)}} = 0. \quad (20)$$

Таким образом, спектр граничной задачи для полупрозрачной конической решетки с узким сплошным внутренним конусом представляет собой возмущенный спектр $\{\zeta_n^{(-1)}(\gamma_2, W_1)\}$ для одиночного полупрозрачного конуса Σ_2 [9]. Неограниченное сужение внутреннего конуса Σ_1 влечет за собой превращение спектра (19) в спектр для одиночного полупрозрачного конуса. Наименьшее собственное значение спектра (19)

$$\tilde{\mu}_0^{(-1)} = \zeta_0^{(-1)}(\gamma_2, W_1) - \gamma_1^2 \cdot \kappa(\zeta_0^{(-1)}, \gamma_2) + O(\gamma_1^4)$$

характеризует поведение поля у вершины. В этом случае

$$\alpha = \alpha^{i\vec{r} \cdot \vec{e} \vec{\alpha} \cdot \vec{\Delta} \Sigma_2} - \gamma_1^2 \cdot \kappa(\zeta_0^{(-1)}, \gamma_2) + O(\gamma_1^4), \quad (21)$$

где $\alpha^{i\vec{r} \cdot \vec{e} \vec{\alpha} \cdot \vec{\Delta} \Sigma_2} = -1/2 + \zeta_0^{(-1)}(\gamma_2, W_1)$ определяет поведение электрического поля у вершины полупрозрачной конической структуры Σ_2 [9]. По мере приближения к вершине одиночной полупрозрачной структуры Σ_2 ($kr \rightarrow 0$) полное электрическое поле убывает [9]. Поскольку $\kappa(\zeta_0^{(-1)}, \gamma_2) < 0$, то из (21) следует, что в присутствии узкого конуса Σ_1 полное электрическое поле убывает быстрее при $kr \rightarrow 0$ по сравнению с поведением поля у вершины одиночной полупрозрачной структуры Σ_2 .

2) $W_1 \ll 1$.

В соответствии с (12) свойства полупрозрачной структуры Σ_2 незначительно отличаются от свойств сплошного конуса. Поле падающей плоской волны в основном отражается от поверхности

полупрозрачной конической структуры и мало проникает в часть пространства между конусами. В этом случае полупрозрачного конуса корни уравнения с малой частью (16) находятся вблизи нулей функции $P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2)$ и функции

$$\hat{R}_{\hat{\mu}}^{(1),(-1)} = P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_1) P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(\cos \gamma_2) - P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(\cos \gamma_1) P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2),$$

из которых состоят спектры для одиночного сплошного конуса Σ_2 и биконической поверхности, состоящей из сплошных конусов Σ_1 и Σ_2 [20]. В связи с этим спектр для рассматриваемого случая представляет собой множество значений

$$\hat{\vartheta}_n^{(-1),-} = \hat{\alpha}_n^{(-1),-}(\gamma_2) + 2W_1 \frac{T_{\hat{\mu}}^{-1}(\gamma_2)}{\frac{d}{d\hat{\mu}} P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2)} \Big|_{\hat{\mu}=\hat{\alpha}_n^{(-1),-}(\gamma_2)} + O(W_1^2), \quad (22)$$

$$\hat{\vartheta}_n^{(-1),-} = \hat{\alpha}_n^{(-1)}(\gamma_1, \gamma_2) + 2W_1 \frac{T_{\hat{\mu}}^{-1}(\pi - \gamma_2)}{\frac{d}{d\hat{\mu}} \hat{R}_{\hat{\mu}}^{(1),(-1)}} \Big|_{\hat{\mu}=\hat{\alpha}_n^{(-1)}(\gamma_1, \gamma_2)} + O(W_1^2), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

$$T_{\hat{\mu}}^{-1}(\gamma) = \frac{\cos \pi \hat{\mu}}{\pi(\hat{\mu}^2 - 1/4) P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(\cos \gamma)}.$$

В учитываемых членах асимптотического представления (22) отсутствует угол раскрытия γ_1 конуса Σ_1 , зависимость от которого входит в $O(W_1^2)$.

Наименьшим собственным значением спектра (22), (23) является $\hat{\vartheta}_0^{(-1),-}$. Тогда

$$\alpha \approx \alpha^{\hat{\gamma}\hat{\Gamma}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\delta}, \Sigma_2},$$

$$\alpha^{\hat{\gamma}\hat{\Gamma}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\delta}, \Sigma_2} \approx \alpha^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}, \Sigma_2} + 2W_1 \frac{T_{\hat{\mu}}^{-1}(\gamma_2)}{\frac{d}{d\hat{\mu}} P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2)} \Big|_{\hat{\mu}=\hat{\alpha}_n^{(-1),-}(\gamma_2)},$$

где $\alpha^{\hat{\gamma}\hat{\Gamma}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\delta}, \Sigma_2}$ определяет поведение электрического поля у вершины полупрозрачного одиночного конуса Σ_2 , а $\alpha^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}, \Sigma_2}$ - у вершины одиночного сплошного конуса Σ_2 [13]. Следует отметить, что у вершины сплошного конуса (при облучении его плоской волной) электрическое поле особенности не имеет и убывает по мере приближению к вершине [20]. Поскольку

$$\frac{T_{\hat{\mu}}^{-1}(\gamma_2)}{\frac{d}{d\hat{\mu}} P_{-1/2+\hat{\mu}}^{-1}(-\cos \gamma_2)} \Big|_{\hat{\mu}=\hat{\alpha}_n^{(-1),-}(\gamma_2)} < 0,$$

то $\alpha^{\hat{\gamma}\hat{\Gamma}\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\delta}, \Sigma_2} < \alpha^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}, \Sigma_2}$ и электрическое поле медленнее убывает при приближении к вершине полупрозрачной структуры ($W_1 \ll 1$) с внутренним экраном по сравнению с поведением у вершины сплошного конуса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развит подход, основанный на использовании интегрального преобразования Конторовича-Лебедева и метода полуобращения, для решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на трехмерной двойной конической решетке. Обоснована эквивалентность исходной электродинамической задачи двум связанным системам линейных алгебраических уравнений первого рода относительно коэффициентов Фурье разложения составляющих поля в ряд по азимутальным гармоникам. В частном случае полупрозрачной конической решетки с внутренним сплошным коническим экраном получено аналитическое решение задачи, проведен анализ структуры поля и изучено влияние внутреннего экрана на спектр граничной задачи, а также его поведение вблизи сингулярной точки (вершины). Показано, что изменением угловых размеров сплошного конического экрана и параметром прозрачности можно влиять на структуру поля и его поведение у вершины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ямпольский В.Г., Фролов О.П. Антенны и ЭМС. М.: Радио и связь, 1983, 272с.
2. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. М.: Радио и связь, 2002, 536с.
3. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских ленточных решетках// ЖТФ. 1962, №4. С.381,394.
4. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400с.
5. Сологуб В.Г., Харчевникова Т.И. Дифракция сферических волн на конической поверхности специального вида// Радиотехника: Всеукр. межвед. научн.-техн. сб. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1972. Вып. 20. С.52-57.
6. Дорошенко В.А., Сологуб В.Г. О структуре поля радиального магнитного диполя, рассеянного конической поверхностью с прорезанными вдоль образующих щелями// Радиотехника и электроника. 1987. Т.32, №5. С.1110-1112.
7. Дорошенко В.А. Возбуждение магнитным радиальным диполем конуса с продольными щелями// Радиотехника: Всеукр. межвед. научн.-техн. сб. Харьков: Изд-во "Основа". 1992. Вып.97. С.54-61.
8. Дорошенко В.А., Семенова Е.К. Рассеяние плоской электромагнитной волны незамкнутым коническим отражателем// Радиоэлектроника и информатика. 2003, №4. С.18-22.
9. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур// Электромагнитные волны и электронные системы. 2003. Т.8, №6. С.4-78.
10. Сверхширокополосные антенны. Сб. статей. М.: Мир, 1964, 416с.
11. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428с.
12. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк., 1991. 224с.
13. Горяинов А.С. Дифракция плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси конуса// Радиотехника и электроника. 1961. Т.6, №1. С.47-57.
14. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем// ЖЭТФ. 1938. Т.8. Вып.10-11. С.1192-1206.
15. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е. и др. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики. Харьков: Основа, 1997. 286с.
16. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742с.
17. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967. Т.1. 742с.
18. Колодий Б.И., Куриляк Д.Б. Осесимметричные задачи дифракции электромагнитных волн на конических поверхностях. Киев: Наук. думка, 1995. 167с. (на укр. яз)
19. Гошин Г.Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1987. 127с.
20. Ван Бладель Я. Сингулярности поля вблизи вершины конуса// ТИИЭР. 1983. Т.71. С.146-147.
21. Вилкова Л.П., Нефедов Е.И. Волны биконического рупора// Радиотехника и электроника 1979. Т.24, №6. С.1017-1026.