УДК 519.21.23

РАСЩЕПЛЕНИЕ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА НА НЕСВЯЗАННЫЕ ФРАГМЕНТЫ С ОДНОВРЕМЕННОЙ ФОКУСИРОВКОЙ В КАЖДОМ ИЗ НИХ

ГЕРАСИН С.Н., ДИКАРЕВ В.А., РОДЗИНСКИЙ А.А.

Рассматривается задача о расщеплении неоднородного марковского процесса с конечным числом состояний на процессы, не взаимодействующие между собой. Это расщепление производится на конечном интервале, правый конец которого является общей точкой фокусировки [1] для распадающихся фрагментов. Вероятности состояний распадающегося процесса имеют заданные левые пределы в общей точке фокусировки. Приводимые в статье доказательства о решении процесса уточняют результаты, содержащиеся в [1,2].

Пусть инфинитезимальная матрица $\Lambda(s)$ исследуемого процесса с конечным числом состояний n, непрерывная на некотором полуинтервале $\Omega=(s_0, t_0)$ и имеющая во всех его точках ранг n–1, удовлетворяет следующим условиям:

1. Среди элементов $\Lambda(s)$ есть элементы, являющиеся при $s\to t_0$, $s\in\Omega$ бесконечно большими величинами одинакового порядка, причем порядок их роста наибольший по сравнению с остальными элементами $\Lambda(s)$. Обозначим множество всех таких элементов через Σ. Предположим, что для любого $\sigma(s)\in\Sigma$ выполняются условия

$$\left|\int_{s_0}^{t_0}\sigma(s)ds\right| = \infty . \qquad (1)$$

Обозначим $\Lambda_1(s)$, $\Lambda_2(s)$ левый верхний и правый нижний диагональные блоки матрицы $\Lambda(s)$. Пусть эти блоки имеют порядки m×m и (n–m)×(n–m). Допустим, что блоки $\Lambda\alpha(s)$ $(\alpha=1,2)$ содержат столбцы $j\alpha$, элементы которых монотонно растут при $s\to t_0-0$ и имеют в t_0 неинтегрируемые особенности.

2. Существуют пределы

$$\vec{P}^*_\alpha = \lim_{s\to t_0-0}\vec{P}_\alpha(s) \qquad (\alpha=1,2) . \qquad (2)$$

Здесь $\vec{P}_\alpha(s)$ – нулевые векторы матриц $\Lambda^\tau\alpha(s)$:

$$\Lambda^\tau_\alpha(s) \qquad \vec{P}_\alpha(s)=0 \text{ на } \Omega,$$

$$\Lambda^\tau(s) \qquad P(s)=0\cdot$$

Нормы $\|\overline{P}\alpha(s)\|$ сохраняют на Ω постоянные значения (нормой $\|P\|$ вектора $\vec{P}$ будем называть число $\sum_k|P_k|$).

Если $\sigma(s)\in\Sigma$, то для любого элемента $\lambda_{ij}(s)$ матрицы Λ:

$$\lim_{s\to t_0-0}\lambda_{ij}(s)\sigma^{-1}(s) \qquad (3)$$

существует и отличен от нуля лишь в случае $l_{ij}(s)\in S$. Обозначим через $d(s)\in S$ элемент, удовлетворяющий для любого $l_{ij}(s)$ условию

$$\lim_{s\to t_0}\left|\sigma(s)\delta^{-1}(s)\right|\le 1 . \qquad (4)$$

3. Элементы внедиагональных блоков $\Lambda_{12}(s)$, $\Lambda_{21}(s)$ при $s\to t_0$ убывают к нулю достаточно быстро (насколько быстро, будет разъяснено ниже).

Рассмотрим

$$\lim_{s\to t_0-0} \delta^{-1}(s) \qquad \Lambda(s)=\Lambda^\infty .$$

Матрица $\Lambda\infty$ – блочно-диагональная. Обозначим ее блоки через Λ_1, Λ_2. Их порядки равны m×m и (n–m)×(n–m). Считаем, что ранги матриц Λ_1, Λ_2 равны m–1 и n–m–1.

Указанные допущения позволяют свести изучение исходного процесса к изучению процессов, описанных матрицами $\Lambda\alpha(s)$ $(\alpha=1,2)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–3. Тогда для произвольного начального распределения вероятностей $\vec{P}_0(s)$, заданного в любой точке $s\in n$, вероятности $P_i(s,t)$ процесса с матрицей Λ имеют пределы при $t\to t_0$:

$$\lim_{t\to t_0-0}\vec{P}(s,t)=\vec{P}^* . \qquad (5)$$

Здесь $\vec{P}^*=(\vec{P}_1^*,\vec{P}_2^*)$, $\vec{P}_1^*,\vec{P}_2^*$ – нулевые собственные векторы матрицы $\hat{\Lambda}_1^\tau$ и $\hat{\Lambda}_2^\tau$; $\left\|\vec{P_1^*}\right\|=a$, $\left\|\vec{P_2^*}\right\|=1-a$, где $a\in[0,1]$ зависит от начального распределения $\vec{P}_0(s)$ и положения точки s. Здесь вектор $\vec{P}^*=(P_1^*,P_2^*,K,P_n^*)$, $\sum_{i=1}^n P_i^*=1$ имеет вид

$$\vec{P}^*=(\vec{P}_1^*,\vec{P}_2^*), \qquad (6)$$

где $\vec{P}^*$ определены формулами (2).

Доказательство. Требование быстрого убывания к нулю при $s\to t_0$ элементов матриц Λ_{12}, Λ_{21} означает следующее. Существует монотонная последовательность $\{t_k\}$, $\{t_k\}\to t_0$, $\{t_k\}\in\Omega$ такая, что для отрезков $[t_k, t_{k+1}]$, k=1,2,... выполняется условие

$$\left\|X_k(t)-\hat{X}_k(t)\right\|\to 0, \qquad k\to\infty . \qquad (7)$$

Здесь $X_k(t)$ – матрицант системы уравнений Колмогорова с матрицей $\Lambda(t)$, отвечающий отрезку $[t_k, t_{k+1}]$; $\hat{X}_k(t)$ – матрицант для этого же отрезка системы Колмогорова с матрицей $\hat{\Lambda}(t)$, полученной из $\Lambda(t)$ заменой нулями блоков Λ_{12}, Λ_{21} с последующей коррекцией блоков Λ_1, Λ_2. Коррекция состоит в замене элементов $\lambda_{ij}(t)$ этих блоков величинами $\hat{\lambda}_{ij}(t)$:

$\hat{\lambda}_{ij}(t) = \lambda_{ij}(t) + \Delta_i(t)$. Здесь

$$\hat{\lambda}\Delta_i(t) = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_{ij}(t), \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\hat{\lambda}\Delta_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}(t), \quad i = m+1, \ldots, n.$$

Условие (7) имеет место, если убывание к нулю блоков Λ_{12}, Λ_{21} будет достаточно быстрым (см. оценку для нормы разности матрицантов в [4, с.26]).

Выясним зависимость между матрицами возмущенной и не возмущенной системы Колмогорова для случая, описанного выше. В качестве нормы выберем следующий интеграл:

$$\|\Lambda(t)\| = \int_{s_0}^{t_0} \Lambda(t)dt.$$

Уравнения для матрицантов имеют вид $X' = X\Lambda$, $\hat{X}' = \hat{X}\hat{\Lambda}$ или

$$\frac{d}{dt}(\hat{X} - X) = (\hat{X} - X)\hat{\Lambda}(t) + X(\hat{\Lambda}(t) - \Lambda),$$

$$[\hat{\Lambda} - \Lambda]\big|_{t=s_0} = 0.$$

Данное неоднородное матричное уравнение при указанных начальных условиях имеет следующее решение:

$$\hat{X}(t) - X(t) = \int_{s_0}^{t} \hat{X}(\tau)(\hat{\Lambda}(t) - \Lambda(\tau))X^{-1}(\tau)d\tau \cdot \hat{X}(t).$$

Оцениваем его по норме

$$\left|\hat{X}(t) - X(t)\right| \le \int_{s_0}^{t} \left|X(\tau)\right| \left\|\hat{\Lambda}(t) - \Lambda(\tau)\right\| \left|X^{-1}(\tau)\right| d\tau \cdot \left|\hat{X}(t)\right|.$$

Матрицант $\hat{X}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{X}(t) = I_n + \int_{s_0}^{t} \hat{X}(\tau)\hat{\Lambda}(\tau)d\tau,$$

из него следует оценка $\left|\hat{X}(t)\right| = \left|I_n\right| + \int_{s_0}^{t} \left|\hat{X}(\tau)\right| \left\|\hat{\Lambda}(\tau)\right| d\tau$.

Используя известное неравенство о том, что для неотрицательных функций a(t) и b(t) из

$$a(t) \le a(s_0) + \int_{s_0}^{t} b(\tau)a(\tau)d\tau$$

следует

$$a(t) \le a(s_0)\exp\left[\int_{s_0}^{t} b(\tau))d\tau\right],$$

получаем

$$\left|\hat{X}(t)\right| \le I_n \exp\int_{s_0}^{t} \left|\hat{\Lambda}(\tau)\right| d\tau \le \sqrt{n}e^{\|\hat{\Lambda}\|}.$$

Кроме того, дифференцируя тождество

$$\hat{X}^{-1}(t)\hat{x}(t) = I_n,$$

находим

$$\frac{d}{dt}\hat{X}^{-1} = -\hat{X}^{-1}\frac{d}{dt}\hat{X}^{-1}\hat{X}^{-1} = -\hat{X}^{-1}\hat{\Lambda}(t).$$

Аналогично получим оценку для $\left|\hat{X}^{-1}\right|$:

$$\left|\hat{X}^{-1}(t)\right| \le \sqrt{n}e^{\|\hat{\Lambda}\|}.$$

Отсюда вытекает искомая оценка

$$\left|\hat{X}^{-1}(t) - X(t)\right| \le \sqrt{n}e^{2\|\hat{\Lambda}\| + \|\Lambda\|} \left\|\hat{\Lambda}(t) - \Lambda\right\|.$$

Таким образом, при стремлении к точке фокусировки t_0 матрицанты стремятся друг к другу со скоростью, пропорциональной стремлению к нулю внедиагональных блоков.

Матрица $\hat{\Lambda}(t)$ блочная. Ее блоки $\hat{\Lambda}_1(t)$, $\hat{\Lambda}_2(t)$ являются инфинитезимальными матрицами. Если s принадлежит достаточно малой полуокрестности точки t_0, их ранги равны m-1 и n-m-1. Точка t_0 является их общей точкой фокусировки. Это следует из допущений п. 1-3.

Рассмотрим монотонную последовательность $\{s_k\}_k^{\infty} = 1$, $s_k \in \Omega$, $s_k \to t_0$. Считаем, что $\{s_k\}_k^{\infty} = 1$ содержит точки последовательности t_k.

Рассмотрим процесс на $[t_1, t]$, $t = t_n$. Заменим на каждом отрезке $[s_k, s_{k+1}]$ (k=1,2,...), содержащемся в $[t_1, t]$, матрицу $\hat{\Lambda}(s)$ на матрицу

$$\tilde{\Lambda}(s) = \hat{\Lambda}(\tau_k),\ t_k \in [s_k, s_{k+1}],\ s_k \le s \le s_{k+1}. \quad (8)$$

Устремив t к t_0, определим $\tilde{\Lambda}(s)$ на всех $[s_k, s_{k+1}]$ и, значит, на всех $[t_k, t_{k+1}]$. Матрица $\tilde{\Lambda}(s)$ является кусочно-постоянной аппроксимацией матрицы $\hat{\Lambda}(s)$.

Считаем, что $\{s_k\}_{k=1}$ выбрана так, чтобы матрицанты $\hat{X}_k(s), \tilde{X}_k(s)$ системы Колмогорова с матрицами $\hat{\Lambda}(s)$, $\tilde{\Lambda}(s)$, отвечающие отрезкам $[t_k, t_{k+1}]$, удовлетворяли условию

$$\left\|\hat{X}_k(s) - \tilde{X}_k(s)\right\| \to 0, \quad k \to \infty. \quad (9)$$

К процессам, которые описываются диагональными блоками $\tilde{\Lambda}_1(s)$; $\tilde{\Lambda}_2(s)$ матрицы $\tilde{\Lambda}(s)$, применим тот же прием оценивания разностей $R_j(s,t)$, $r_j(s,t)$,

$r_j(s,t) = \inf_1 P_{ij}(s,t), \quad R_j(s,t) = \sup_1 P_{ij}(s,t)$, что и в [1].

При рассмотрении этих процессов используем вероятностные пространства

$$\langle \Omega, F, P_A \rangle, \quad \langle \Omega, F, P_B \rangle \quad (10)$$

(см. [3, с. 80]).

Здесь A и B – события, состоящие в том, что процесс протекает внутри состояний 1,...,m и, соответственно, внутри состояний m+1,...,n. В силу сделанных в п.2 предположений P(A)>0, P(B)>0. При переходе к пространствам (10) следует произвести перенормировку вероятностей, характеризующих эти процессы.

Так, для $\langle \Omega, F, P_A \rangle$, $\sum_{j=1}^{m} P_{Aij}(s,t) = 1.$

Повторяя рассуждения, проведенные в [1], получаем, что теорема верна и для процесса с матрицей $\hat{\Lambda}(s)$, где начальные распределения вероятностей $\vec{P}^0{}_{\alpha(s)}$ процессов с матрицами $\Lambda\alpha(s)$ (α=1,2) удовлетворяют лишь условиям

$$\left\| P_1^0(s) \right\| = a, \qquad \left\| P_2^0(s) \right\| = 1 - a,$$

a – любое число из [0,1].

Проверим, что (5) выполняется и для исходного процесса с матрицей Λ. Для этого процесса зададим начальное распределение вероятностей $\vec{P}^0(s)$ в любой точке $s \in \Omega$. Пусть

$$\overline{P}(s, s') \qquad (11)$$

есть решение системы Колмогорова с матрицей Λ и указанным начальным распределением $\overrightarrow{P^0}(s)$. Возьмем в (11) s' настолько близко к t_0, чтобы решения

$$\vec{P}(s', t), \quad \vec{\hat{P}}(s', t) \qquad (12)$$

систем Колмогорова с матрицами Λ, $\hat{\Lambda}$, отвечающие общему начальному условию $\vec{P}^0(s') = \vec{P}(s, s')$, заданному в s', удовлетворяли неравенству

$$\left| \vec{P}(s', t) - \vec{\hat{P}}(s', t) \right| < \varepsilon \qquad (13)$$

для всех $t \in [s', t_0]$. Выбор такой точки s' возможен для любого $\varepsilon > 0$ в силу (7).

Выше было доказано, что $\lim_{t \to t_0 - 0} \vec{\hat{P}}(s', t)$ существует. Отсюда и из (13), ввиду произвольности ε, следует существование предела

$$\lim_{t \to t_0 - 0} \vec{P}(s', t) = P^*,$$

который имеет вид (6). Теорема доказана.

1. Пусть элементы блока $\Lambda_{12}(s)$ убывают к нулю при $s \to t_0 - 0$ достаточно быстро, а все элементы блока $\Lambda_{21}(s)$ ограничены в Ω. Тогда, если выполняются условия 1, 2, то для начального распределения вероятностей $P^0(s)$, $s \in \Omega$ пределы (5) существуют для всех $i=1,\ldots,m$.

2. Пусть порядок роста элементов из Σ таков, что интегралы (1) сходятся, но их абсолютные величины достаточно велики. Тогда t_o является точкой фокусировки [1] для процессов с матрицами $\hat{\Lambda}_1$, $\hat{\Lambda}_2$. В этой ситуации для выполнения (7) достаточно произвольного (а не "достаточно быстрого") убывания к нулю элементов из Λ_{12}, Λ_{21}. Это следует из оценки нормы разности матрицантов, содержащейся, например, в [4, с.26]. В таком случае верно следующее утверждение.

Пусть выполнены условия 1–3 (с изменениями, указанными выше). Тогда для произвольного распределения вероятностей $\vec{P}^0(s)$, заданного в любой $s \in \Omega$, t_0 является точкой σ-фокусировки на $\vec{P}^* = (\vec{P}_1^*, \vec{P}_2^*)$ для вероятностей $P_i(s,t)$ процесса с матрицей $\Lambda(s)$.

Из перечисленного выше видно, что расщепление процесса на несвязанные фрагменты с одновременной их фокусировкой на предельные вероятности может быть выполнено при существенных ограничениях на процесс.

Отметим также, что процесс расщепления в каком-то смысле является неустойчивым. Это видно из доказанной теоремы и следующего утверждения.

Пусть матрица процесса $\Lambda(s)$ удовлетворяет условиям 1–3 (быстрота убывания к нулю блоков Λ_{12}, Λ_{21} здесь несущественна), а $\vec{P}_1(s)$, $\vec{P}_2(s)$ – нулевые векторы матриц $(\Lambda_1(s), \Lambda_{12}(s))$, $(\Lambda_{21}(s), \Lambda_2(s))$ и α – произвольное число из отрезка [0,1].

Тогда в достаточно малой полуокрестности Ω точки t_0 найдутся такие $P_1(s)$, $P_2(s)$, что:

а) $||P_1(s)|| = \alpha$, $||P_2(s)|| = 1 - \alpha$ на Ω;

б) существуют пределы $\lim_{s \to t_0} \overline{P}_1(s) = \overline{P}_1^*$, $\lim_{s \to t_0} \overline{P}_2(s) = \overline{P}_2^*$, где $\overline{P}_1^*, \overline{P}_2^*$ определены формулой (2).

Очевидно, $\left\| \overline{P}_1^* \right\| = \alpha$, $\left\| \overline{P}_2^* \right\| = 1 - \alpha$. Доказательство этого утверждения приводить не будем.

В теореме 1 точка фокусировки t_0 совпадает с моментом времени t_1 обращения в нуль внедиагональных блоков Λ_{12}, Λ_{21}: $t_0 = t_1$. Рассмотрим случаи $t_0 < t_1$ и $t_0 > t_1$. Если выполняются условия 1–3, то случай $t_0 < t_1$ тождественен ситуации, описанной в теореме 1 из [1]. Для случая $t_0 > t_1$ теорема 1 о расщеплении остается в силе.

Теорема о расщеплении и теорема 1 из [1] остаются в силе, если условие (5) заменить условием

$P\{P_i(t) \neq P_i \mid t \in [s_0, t_0)\} = 0$, $i=1,2,\ldots,n$,

где по-прежнему $P_i(t)$ ($i=1,\ldots,n$) – компоненты нулевого вектора матрицы $\Lambda(t)$. Однако теперь сходимость к P_i^* в (5) следует понимать как сходимость по вероятности.

Доказательство следующего предложения (его можно было бы назвать теоремой о соединении невзаимодействующих фрагментов с фокусировкой на заданное распределение), которое мы опускаем, проводится без каких-либо ограничений на инфинитезимальную матрицу процесса.

Теорема 2. Пусть $\hat{\Lambda}$ – блочно-диагональная матрица $n \times n$, блоки которой $\hat{\Lambda}_1$, $\hat{\Lambda}_2$ порядков $m \times m$ и $n-m \times n-m$ являются инфинитезимальными матрицами и имеют ранги $m-1$ и $n-m-1$. Пусть далее Λ – инфинитезимальная матрица $n \times n$ ранга $n-1$, $\vec{P}^*$ – ее нулевой собственный вектор, s_0, t_0 – произвольные моменты времени, $s_0 < t_0$. Тогда на $[s_0, t_0)$ существует неоднородный марковский процесс с матрицей $\Lambda(s)$ порядка $n \times n$ такой, что:

а) $\overline{\Lambda}(s)$ имеет при $s\in(s_0,t_0)$ ранг $n-1$,

б) $\overline{\Lambda}(s_0)=\hat{\Lambda}$,

в) $\lim\limits_{s\to t_0}\overline{P}(s)=\overline{P}^*$, где $\overset{\rho}{P}(s)$ – нулевой собственный вектор матрицы $\overline{\Lambda}(s)$,

г) в некоторой левой полуокрестности точки t_0 матрицы $\overline{\Lambda}(s)$, $\Lambda(s)$ отличаются лишь на скалярный множитель.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при рассмотрении конкретных задач, в которых изучаются процессы марковского типа, распадающиеся на несвязанные или слабо связанные фрагменты. Задачи такого типа возникают в нейронных и компьютерных сетях, экономике, экологии и радиоэлектронике. Изложенный в работе подход был применен авторами при анализе распадающихся экономик [5].

Литература: 1. *Дикарев В. А.* Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. Харьков, 1995. Рукопись представлена Харьковским университетом радиоэлектроники. Деп. в ГНТБ Украины 28 февраля 1995, №526 Ук.95. 2. *Дикарев В. А.* Точки фокусировки и стабилизация неоднородных марковских процессов. Харьков, 1995. Рукопись представлена Харьковским университетом радиоэлектроники. Деп. в ГНТБ Украины 28 февраля 1995, №533 Ук.95. 3. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328с. 4. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 432с. 5. *Dikarev V. A., Veprik A. I., Zabelin V. I.* Modeling of disintegrating economy by Markov processes // 2 Internation conference on "Computing in economics and finance", Geneva, 1996. P. 170 - 171.

Поступила в редколлегию 15.09.98
Рецензент: д-р техн. наук Евдокимов А.Г.

Герасин Сергей Николаевич, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, теория процессов Маркова. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел: (0572) 40-93-72, (0572) 72-12-38. e-mail: hm@kture.ua

Дикарев Вадим Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, теория процессов Маркова. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-36, (0572) 33-57-03.

Родзинский Анатолий Анатольевич, аспирант кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, теория процессов Маркова. Адрес: Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-36.

УДК 519.713

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ОТСЕЧЕНИЙ ПРИ РАСКРОЕ

ЕМЕЦ О.А., ЕМЕЦ Е.М., КОЛЕЧКИНА Л.Н.

Рассматривается оптимизационная задача размещения прямоугольников, которую можно интерпретировать как задачу минимизации времени работы мультипроцессорной вычислительной системы (МВС). Для ее решения применяется метод отсечений. Приводятся результаты счета.

1. Введение

Одними из первых по исследованию проблемы раскроя являются работы Канторовича Л.В. и Залгаллера В.А. [1, 2]. Разработке методов решения комбинаторных задач оптимального размещения геометрических объектов посвящены работы школы Стояна Ю.Г. [3, 4]. Разные подходы к раскрою материалов рассматриваются также в работах [5-8]. Нами рассматривается метод отсечения [9] для одной задачи раскроя, которую можно толковать как задачу минимизации времени работы МВС при решении заданого набора задач [10].

Введем необходимые понятия и обозначения. Мультимножеством [3,4] называется совокупность элементов, среди которых есть одинаковые. Мультимножество A можно представить его основанием S(A) – множеством всех его разных элементов с указанием их кратностей – чисел, указывающих количество повторений каждого элемента основания в мультимножестве. Упорядоченные n-выборки из мультимножества A, содержащего k разных элементов, т. е. такие, что различаются между собой только порядком следования элементов, образуют общее множество перестановок $E_{nk}(A)$ [3,4]. Обозначим: J_m– множество первых m натуральных чисел, R^n – евклидово арифметическое пространство.

2. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим следующую задачу [3, 4]. Пусть имеется набор p прямоугольников одинаковой ширины и разной длины. Необходимо разместить данное множество прямоугольников в m полос так, чтобы длина z занятой части полос была минимальной. Длину прямоугольников можно интерпретировать как время решения задач, а m – как число эквивалентных процессоров в МВС.

Построим математическую модель данной задачи. Пусть x_{ij} – длина прямоугольника, стоящего на месте j в полосе i. Очевидно, что в оптимальном решении $1\le j\le p-m+1$. Будем считать, что $j\in J_{p-m+1}$. Получим в m полосах всего $(p-m+1)m=n$ прямоугольников, из которых p – задано, а остальные будем считать, не нарушая общности, имеющими нулевую длину. Обозначим длины прямоугольников через g_i, $i\in J_n$. G – мультимножество, которое состоит из элементов g_i, $i\in J_n$. Пусть $E_{nk}(G)$ – общее множество перестановок из действительных чисел – длин прямоугольников, которые составляют мультимножество чисел G. Тогда задача сводится к определению: