

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Упакування куль у опуклому багатограннику
із зонами заборони
(тема)

Виконав:
студент 2 курсу, групи ПМм-19-1
Рибачок І.А.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Стоян Ю.Г.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Тевяшев А.Д.
(прізвище, ініціали)

2020 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Рибачок Ірині Анатоліївні

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Упакування куль у опуклому багатограннику із зонами заборони

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1422 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи постановка задачі упаковки куль у контейнер

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Стоян Ю. Г.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 87 с., 8 табл., 18 рис., 1 дод., 25 джерела.

КУЛЯ, УПАКОВКА, ГЕОМЕТРИЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ, ОПУКЛИЙ
БАГАТОГРАННИК, ЗАДАЧА ПРО РЮКЗАК.

Об'єкт дослідження – процес оптимального упакування 3D-об'єктів у контейнер.

Мета роботи – підвищення ефективності розв'язання оптимізаційних задач упакування куль шляхом розробки конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання, нових математичних моделей та ефективних оптимізаційних алгоритмів із застосуванням методів нелінійного програмування.

Методи дослідження – аналітична геометрія та функціональний аналіз для побудови Ф-функцій; методи геометричного проектування для побудови математичних моделей; методи нелінійного програмування для розробки алгоритмів, система візуального програмування Delphi 7.

Задачі упаковки є важливим класом задач геометричного проектування. Основа моделювання задач цього класу – аналітичний опис взаємодій геометричних об'єктів, які у загальному випадку мають довільну просторову форму.

У даній роботі побудована математична модель для задачі упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони. Алгоритм ґрунтується на задачі розміщення геометричних об'єктів сформульований у вигляді задачі про рюкзак.

ABSTRACT

Introductory note: 87 pages, 8 tables, 18 figures, 1 appendixes, 25 sources.

BALL, PACKAGING, GEOMETRIC DESIGN, CONVEX MULTIPLE, PROBLEM ABOUT BACKPACK.

The object of research – the process of optimal packaging of 3D objects in a container.

The aim of the work is to increase the efficiency of solving optimization problems of ball packing by developing constructive means of mathematical and computer modeling, new mathematical models and effective optimization algorithms using nonlinear programming methods.

Methods of research – analytical geometry and functional analysis for the construction of F-functions; methods of geometric design for construction of mathematical models; methods of nonlinear programming for the development of algorithms, visual programming system Delphi 7.

Packaging problems are an important class of geometric design problems. The basis for modeling problems of this class is an analytical description of the interactions of geometric objects, which in the general case have an arbitrary spatial shape.

In this paper, a mathematical model for the problem of packing spheres in a convex polygon with forbidden zones is constructed. The algorithm is based on the problem of placing geometric objects formulated in the form of a problem about a backpack.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми упакування куль у опуклому багатограннику із зонами заборони та постановка задач дослідження	10
1.1 Системний аналіз проблеми упакування куль у опуклому багатограннику із зонами заборони	10
1.1.1 Вербальна модель системи	10
1.1.2 Морфологічний опис системи	11
1.1.3 Функціональна модель системи	14
1.1.4 Інформаційна модель системи	16
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми пакування куль у опуклому багатограннику із зонами заборони	17
1.2.1 Модель аналізу проблеми	17
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	18
1.2.3 Модель вирішення проблеми	22
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	24
1.3.1 Змістовна постановка задачі	24
1.3.2 Формальна постановка задачі	26
1.4 Постановка задач дослідження	28
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання	29
2.1 Огляд методів упакування куль	29
2.2 Стратегія розв’язання задачі та побудова дерева розв’язків	32
2.3 Задача про рюкзак	33
2.4 Пошук локального максимуму задачі	37
2.5 Алгоритм розв’язання задачі	38
3 Програмна реалізація	41
3.1 Вибір середовища реалізації програми	41

	7
3.2 Опис програми.....	43
4 Результати обчислювального експерименту	46
5 Аналіз можливих застосувань	51
Висновки	55
Перелік джерел посилання	56
Додаток А Програма	59

ВСТУП

Проблема упакування полягає в знаходженні найбільш щільного розміщення об'єктів в області заданої форми. Така проблема має безліч практичних застосувань. Моделювання і розв'язання 2D і 3D задач упакування присвячено багато робіт. Основою моделювання задач цього класу є аналітичний опис взаємодій геометричних об'єктів, що мають довільні просторові форми [1].

Ефективним засобом моделювання взаємодії геометричних об'єктів у задачах упакування є Φ -функції. Зокрема, методом Φ -функцій можна описати відношення включення, неперетинання, дотику геометричних об'єктів, знаходження об'єктів на відстані.

Математичні моделі задач упакування в більшості випадків є NP-складними, тобто для яких поки не існує методів і алгоритмів, за допомогою яких точне рішення шукається за поліноміальний час. Для розв'язання задач цього класу використовують різні модифікації методів локальної та глобальної оптимізації, в тому числі методи гілок і меж, випадкового пошуку, оптимізації за групами змінних, евристичні методи.

У класі задач розкрою-упакування (Р-У) найбільш складними, вважаються задачі нерегулярного розміщення геометричних об'єктів складних форм. Це пов'язано з трудомісткістю формалізації умов взаємного неперетинання об'єктів та умов їх розміщення в заданих областях Р-У.

Тривимірні задачі Р-У мають безліч практичних застосувань. Зокрема виникають завдання упаковки нерівних куль. Упаковка нерівних куль використовується в радіохірургії [2]. Гамма-промені фокусуються на загальний центр, створюючи кулястий обсяг високої дози радіації. Ключове завдання в лікуванні гамма-ножами - як розмістити кулі в пухлини довільної просторової форми. У цій ситуації перетин куль може викликати передозування радіації.

Задачі розміщення нерівних куль виникають при дослідженні полідисперсних колоїдних систем [3], які поширені в природі. Наприклад, білки, кров, лімфа, вуглеводи, пектини знаходяться в колоїдному стані. У вугільній, торф'я-

ній, гірничорудній і нафтовій промисловості мають справу з дисперсними матеріалами (пилом, суспензіями, піною).

Інші напрями досліджень моделей розміщень рівних куль виникають у хімічній інженерії та матеріальній фізиці. Вони використовуються для опису різноманітних структур речовин, таких як кристали, рідини тощо. Такі моделі також важливі для прогнозування властивостей процесів транспортування в газорідких системах із рухомим середовищем, для дослідження речовини в рівноважному стані щодо критичного значення щільності в точці переходу між двома фазами для різних гранульованих речовин, кераміки тощо. Виникають задачі при розробці технологій лиття [5, 6].

Зростаючий інтерес до задач розміщення рівних та нерівних куль викликано застосуваннями в медицині: радіохірургії пухлин [7-9] та лазерній коагуляції сітківки ока [10].

У роботах, присвячених даній тематиці, розглядаються прості види контейнерів – багатогранник, циліндр, куля. Однак на практиці доводиться мати справу з областями більш складної геометричної форми. Крім того, розроблені на сьогоднішній момент методи точного розв'язання таких задач не знаходять свого застосування на практиці, тому що виявляються ефективними тільки за порівняно невеликої кількості об'єктів. При збільшенні числа об'єктів значно ускладнюється пошук не тільки глобального, а й локальних екстремумів, точні методи перестають задовольняти вимоги надійності, і швидкості роботи.

Таким чином, актуальним є створення ефективних алгоритмів розв'язання оптимізаційних задач розміщення куль в областях складної геометричної форми на основі конструктивних засобів обробки інформації, математичного та комп'ютерного моделювання, сучасних ефективних методів оптимізації та засобів візуалізації різних варіантів розміщення, які дозволяють за вихідними даними отримати кращий варіант розміщення відповідно до заданого критерію якості, що і визначило тему даної роботи.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ УПАКУВАННЯ КУЛЬ У ОПУКЛОМУ БАГАТОГРАННИКУ ІЗ ЗОНАМИ ЗАБОРОНИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Геометричне проектування».

Предмет аналізу – «Задача упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони».

Системна модель об'єкта створюється з метою побудови найбільш ефективного методу розв'язання задачі упаковки куль і вивчення етапів переходу від однієї точки локального максимуму до іншого так, щоб оцінка коефіцієнта заповнення отримала максимальне значення. Вона включає в себе побудову моделей пов'язаних між собою процесів, що протікають в системі; побудова геометричної моделі системи; розрахунок положення куль без взаємних накладань в багатогранній області, яке послужить перевіркою правильності побудови моделі.

Система «Задача упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони» відноситься до цілеспрямованим системам, для яких призначення визначається їх здатністю (властивістю) сприймати потреби і виконувати певні дії для задоволення цих потреб.

Головний вихід системи – опуклий багатогранник із зонами заборони, упакований кулями. На вході системи подаються її геометричні параметри, які описують геометричні об'єкти які є невід'ємною частиною побудови моделі. За допомогою програмного продукту і безпосередньо за участю дослідника, керуючись інформаційною базою, здійснюється реалізація процесу оптимізації упаковки.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Досліджувана система – «Задача упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони».

Призначення моделі – поліпшення методів нерегулярного розміщення геометричних об'єктів. Для реалізації мети системи використовуються інформаційні, технологічні ресурси.

Морфологічний опис системи почнемо розглядати з опису зовнішнього середовища, яка приведена на рис. 1.1.

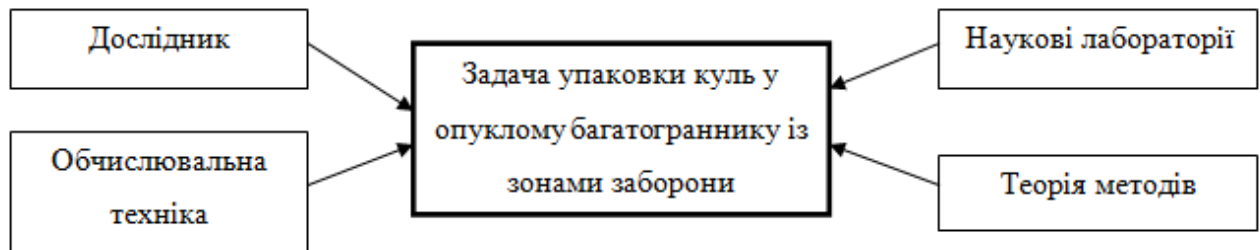


Рисунок 1.1 – Модель зовнішнього середовища системи

Зовнішнє середовище – сукупність всіх об'єктів поза межі системи, зміна властивостей яких впливають на систему, а також тих об'єктів, чий властивості змінюються в результаті поведінки системи.

Об'єкти зовнішнього середовища:

- а) наукові лабораторії забезпечують умови для проведення досліджень;
- б) за допомогою обчислювальної техніки здійснюється процес оптимізації упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони;
- в) дослідник безпосередньо проводить експерименти, вибирає методи і способи оптимізації процесу куль у опуклому багатограннику із зонами заборони;
- г) за допомогою теорії методів оптимізації встановлюється наскільки ефективна упаковка.

Модель типу «чорний ящик» системи «Задача упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони» представлена на рис. 1.2.

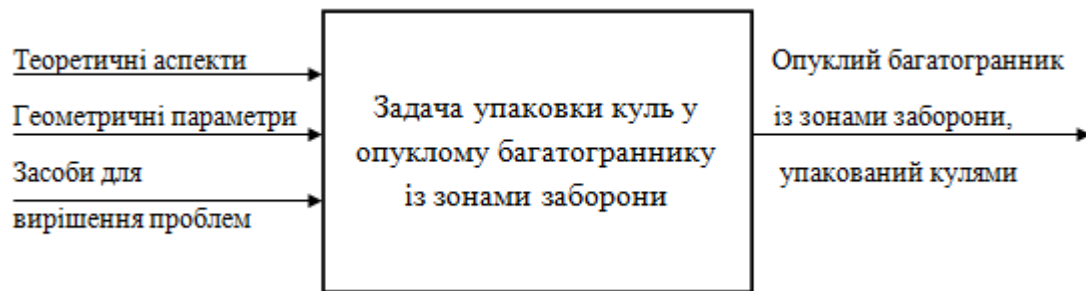


Рисунок 1.2 – Модель типу «чорний ящик»

Така модель є вихідною при побудові моделі складної системи, акцентує увагу дослідника на взаємодії системи з зовнішнім середовищем.

Тут виходами системи є її цільові продукти, а входи – це вплив середовища на систему.

Зміст «чорного ящика» не розкривається, тому що увага звертається тільки на кордон системи. Кордон, в свою чергу, підкреслює цілісність системи, відокремленість її від зовнішнього середовища і взаємодія системи і середовища.

В моделі типу «білий ящик» (рис. 1.3) описаний «склад системи», вказані взаємозв'язку між елементами системи.

Дана система А складається з двох підсистем: А1 і А2:

а) А1 – апарат управління, що складається з:

- 1) А11 – дослідника;
- 2) А12 – засобів управління:
 - пульт управління,
 - дисплей зворотного зв'язку.

б) А2 – теоретична і обчислювальна база, що складається з:

- 1) А21 – засобів виконання завдання:
 - структури рішення,
 - розрахункових формул;
- 2) А22 – обслуговування: ЕОМ.

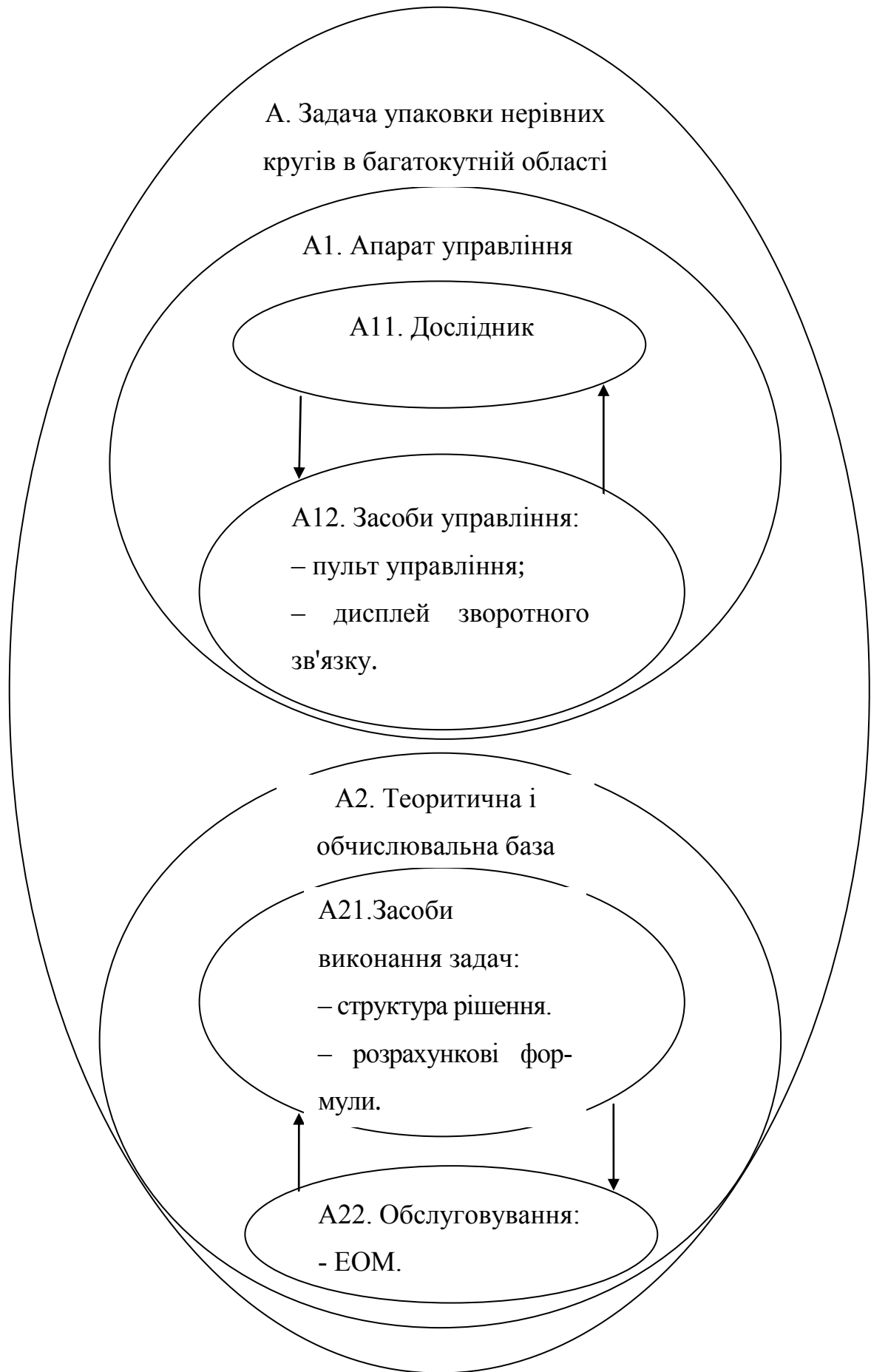


Рисунок 1.3 – Модель типу «білий ящик»

1.1.3 Функціональна модель системи

Методологія IDEF0 пропонує побудову ієрархічної системи діаграм - одиничних описів фрагментів системи. Спочатку проводиться опис системи в цілому і її взаємодії з навколишнім світом (контекстна діаграма), після чого проводиться функціональна декомпозиція - система розбивається на підсистеми і кожна підсистема описується окремо (діаграми декомпозиції). Потім кожна підсистема розбивається на більш дрібні і так далі до досягнення потрібного ступеня деталізації. Після кожного сеансу декомпозиції проводиться сеанс експертизи: кожна діаграма перевіряється експертами предметної області, представниками замовника, людьми, безпосередньо беруть участь у бізнес-процесі. Така технологія створення моделі дозволяє побудувати модель, адекватну предметної області на всіх рівнях абстрагування.

Перша діаграма в ієрархії діаграм IDEF0 представлена на рис. 1.4. Вона зображує функціонування системи в цілому. Ця діаграма називається контекстною.

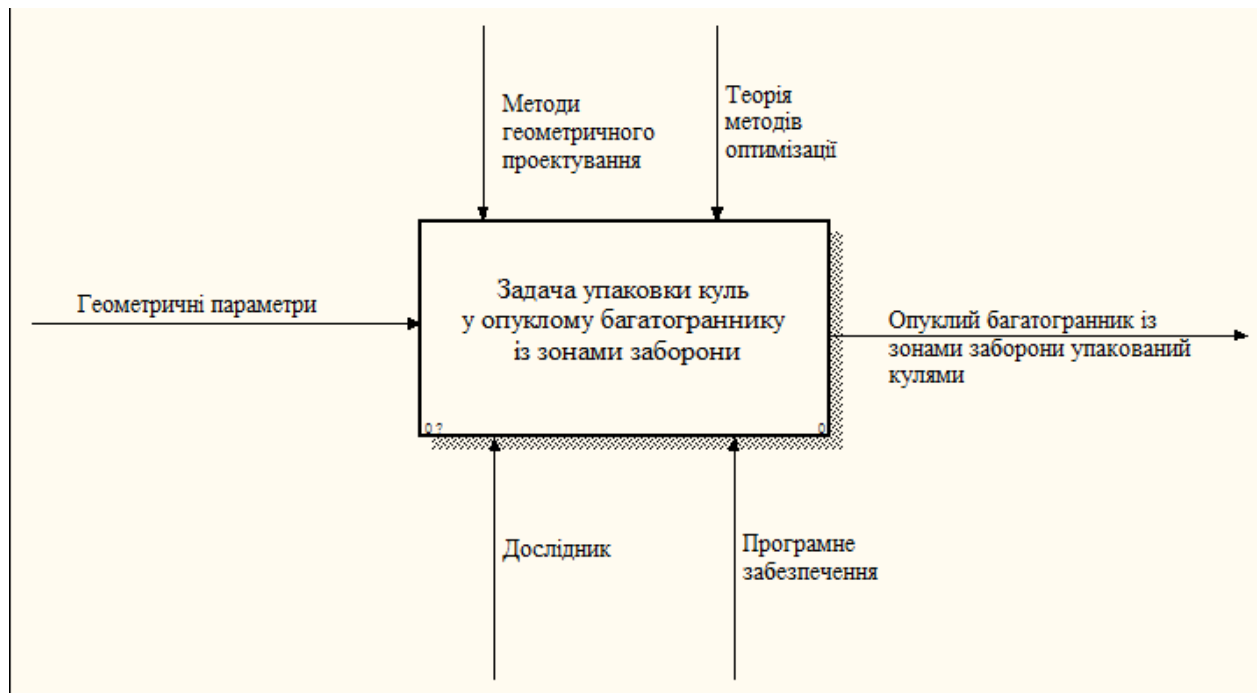


Рисунок 1.4 – Контекстна діаграма

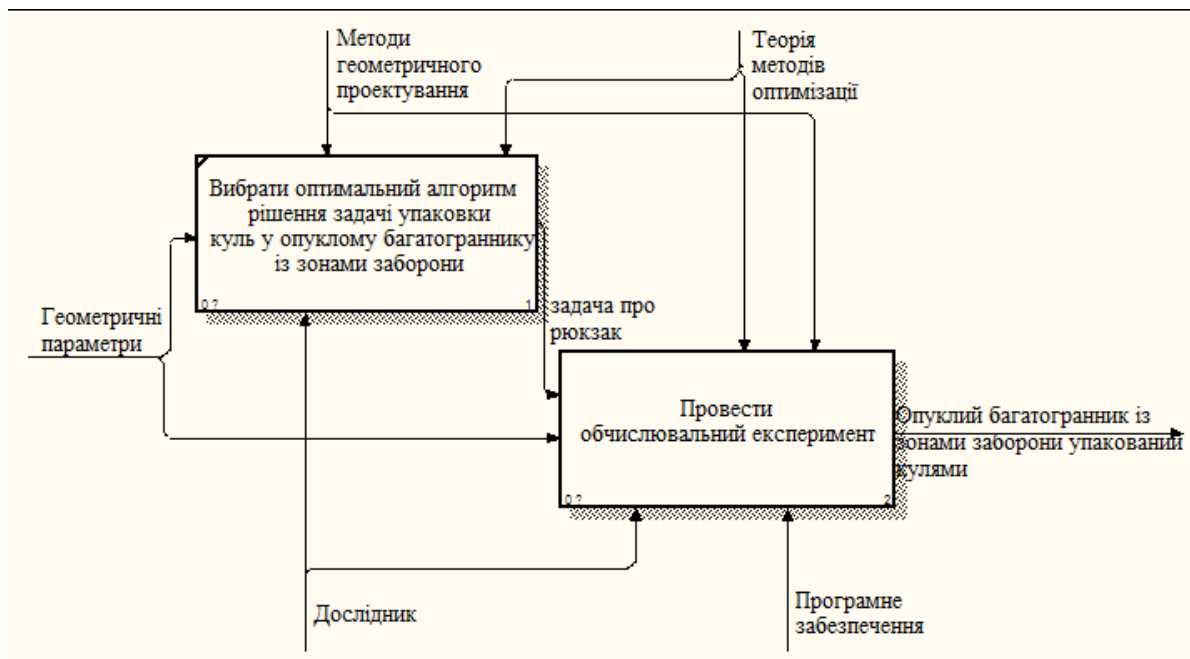


Рисунок 1.5 – Основні функції системи: рівень A0

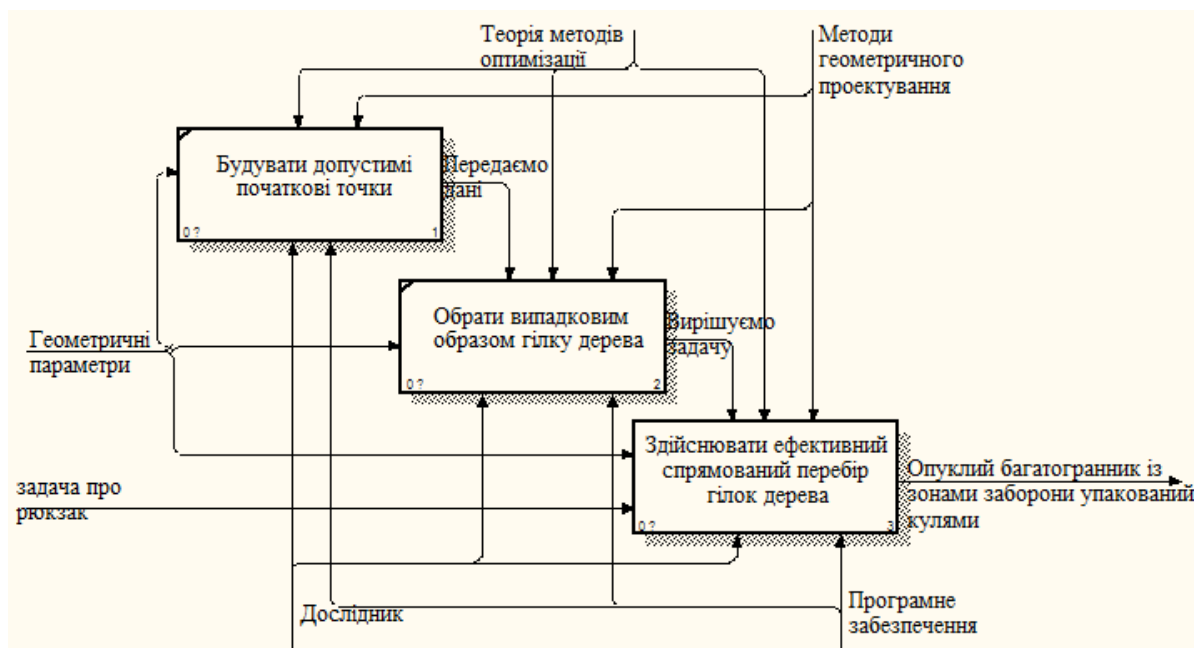


Рисунок 1.6 – Основні функції системи: рівень A2

В рамках методології IDEF0 процес представляється у вигляді набору елементів, які взаємодіють між собою, а також показуються ресурси, що споживаються кожною роботою.

Після того, як контекст описаний, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом однієї з

робіт на вищестоящій діаграмі. У нашому випадку розглядається функціонування системи «Задача упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони». Друга діаграма демонструє основні функції системи і їх деталізації за рівнями (рис. 1.5, 1.6).

1.1.4 Інформаційна модель

Метою методології є побудова моделі даної системи у вигляді діаграми потоків даних (Data Flow Diagram - DFD). Діаграми потоків даних призначені насамперед для опису документообігу та обробки інформації. Діаграми потоків даних будуються у вигляді ієрархії. Перед побудовою контекстної DFD необхідно проаналізувати зовнішні події (зовнішні сутності), що впливають на функціонування системи.

Подібно до IDEF0, DFD є модельною системою. Вони зображують досліджувану систему у вигляді мережі пов'язаних між собою робіт. Їх можна використовувати як додаток до моделі IDEF0 для більш наочного відображення поточних операцій. Порівнюючи методології DFD і IDEF0, можна відзначити, що в методології DFD є розширення образотворчих можливостей діаграм (за рахунок сховищ даних).

DFD-діаграма представлена на рис. 1.7. DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції представлена на рис. 1.8.

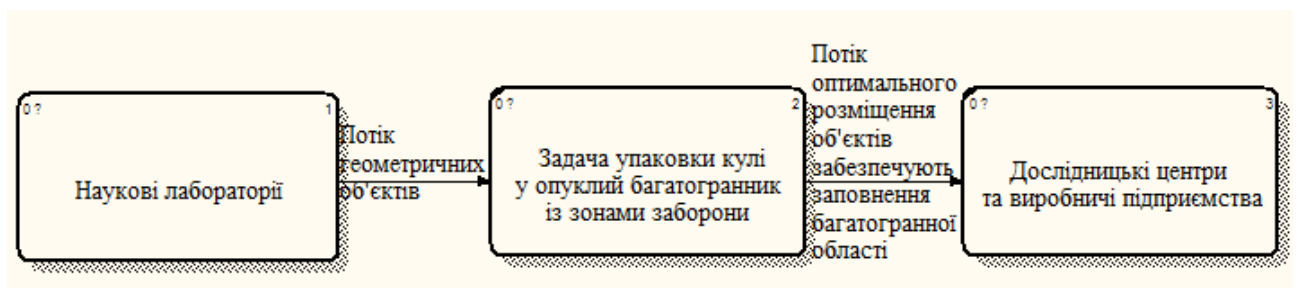


Рисунок 1.7 – DFD-діаграма

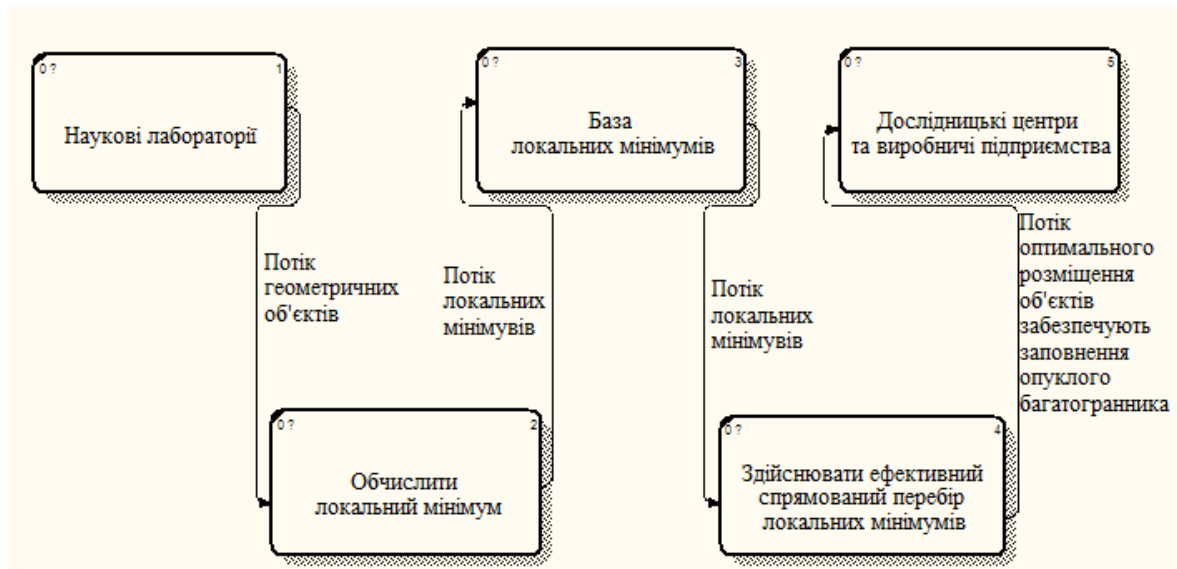


Рисунок 1.8 – DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Об'єктом дослідження є проблема яка містить система на основі моделі «Задача упаковки куль у опуклому багатограннику із зонами заборони».

На просторі розглянутих об'єктів виявимо ряд компонентів, які, на нашу думку, впливають на отримання необхідного результату. Ці незадоволеності розбиваються на три групи.

а) небажані властивості:

- 1) складність реалізації на ЕОМ;
- 2) невдалий вибір початкової точки;

б) критичні властивості:

- 1) неефективність методу;
- 2) велика похибка обчислень;

в) бажані властивості:

- 1) плавний перехід від одного локального мінімуму до іншого;

- 2) краще значення функції мети;
- 3) максимальне розміщення нерівних куль у контейнері;
- 4) можливість модифікувати алгоритм.

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для детального вивчення системи і отримання вихідних даних необхідно визначитися з середовищем в якому ми будемо проводити обчислення, а саме з мовою програмування. Підбір відповідного мови програмування може позначитися на швидкості і точності обчислень як в кращу сторону, так і в гіршу.

Визначимося з критеріями які будуть оптимальними:

Критерій 1 (K1): Велика кількість математичних функцій;

Критерій 2 (K2): Власні знання мови;

Критерій 3 (K3): Простота реалізації;

Критерій 4 (K4): Середня швидкість обчислень.

Спочатку сформуємо матрицю попарних порівнянь для елементів першого рівня ієрархії.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

	K1	K2	K3	K4
K1	1	2	5	7
K2	$\frac{1}{2}$	1	7	4
K3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	1	3
K4	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1

Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв міститься в таблиці 1.2.

Для обчислення індексу узгодженості знаходимо суми елементів матриці за допомогою стовпців:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = 1,84286,$$

$$y_2 = 2 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} = 3,3929,$$

$$y_3 = 5 + 7 + 1 + \frac{1}{3} = 13,33,$$

$$y_4 = 7 + 4 + 3 + 1 = 15.$$

Таблиця 1.2 – Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв

	K1	K2	K3	K4	Середнє геометричне по рядкам	Вектор пріоритетів
K1	1	2	5	7	$x_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7} = 2,8925$	$p_1^K = \frac{x_1}{\Sigma} = 0,5076$
K2	$\frac{1}{2}$	1	7	4	$x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 \cdot 4} = 1,9343$	$p_2^K = \frac{x_2}{\Sigma} = 0,3395$
K3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	1	3	$x_3 = \sqrt[4]{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 \cdot 3} = 0,54108$	$p_3^K = \frac{x_3}{\Sigma} = 0,0949$
K4	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	$x_4 = \sqrt[4]{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1} = 0,33032$	$p_4^K = \frac{x_4}{\Sigma} = 0,0579$
					$\Sigma = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ $= 5,69824$	

Тоді $\lambda_{\max}^K$ набуде значення:

$$\lambda_{\max}^K = 1,84286 \cdot 0,508 + 3,3929 \cdot 0,339 + 13,33 \cdot 0,095 + 15 \cdot 0,058 = 4,22281.$$

Індекс узгодженості:

$$CI^K = \frac{4,22281 - 4}{4 - 1} = 0,07427.$$

Оскільки матриця попарних порівнянь критеріїв є матрицею четвертого порядку, то $RI^K = 0,9$, і ставлення узгодженості:

$$CR^K = \frac{0,07427}{0,9} = 0,08252.$$

Оскільки відношення узгодженості менше ніж 0,1, то вважаємо, що матриця попарних порівнянь критеріїв побудована правильно. Вектор локальних пріоритетів щодо проблеми вибору дорівнює:

$$\vec{p}^K = (0,5076; 0,3395; 0,0949; 0,0579)^T.$$

Розшифровуючи значення вектора локальних пріоритетів можна сказати, що головним пріоритетом є велика кількість математичних функцій. Далі за важливістю в порядку зменшення йде власні знання мови. Далі простота реалізації. Потім – середня швидкість обчислень.

Далі формуємо матриці попарних порівнянь альтернатив (мов програмування) за кожним критерієм.

Альтернативами будуть мови програмування з допомогою яких ми можемо проводити обчислення:

Альтернатива 1 (A1): Python;

Альтернатива 2 (A2): Pascal;

Альтернатива 3 (A3): Delphi 7.

Побудуємо матриці попарних порівнянь альтернатив за обраними критеріями.

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К1

К	A1	A2	A3
A1	1	3	$\frac{1}{4}$
A2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{5}$
A3	4	5	1

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К2

К2	A1	A2	A3
A1	1	2	$\frac{1}{3}$
A2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$
A3	3	8	1

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К3

К1	A1	A2	A3
A1	1	4	$\frac{1}{2}$
A2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{3}$
A3	2	3	1

Таблиця 1.6 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К4

K1	A1	A2	A3
A1	1	2	$\frac{1}{5}$
A2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{7}$
A3	5	7	1

Для кожної матриці (аналогічно як і для матриці попарних порівнянь критеріїв) розраховуємо вектори локальних пріоритетів:

$$\vec{p}_1^A = \begin{pmatrix} 0,225 \\ 0,101 \\ 0,674 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2^A = \begin{pmatrix} 0,21 \\ 0,095 \\ 0,694 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3^A = \begin{pmatrix} 0,358 \\ 0,124 \\ 0,517 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_4^A = \begin{pmatrix} 0,166 \\ 0,094 \\ 0,739 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриці попарних порівнянь альтернатив – це матриці четвертого порядку, то $RI^A = 0,9$. Індеси узгодженості і відношення узгодженості для матриць парних порівнянь альтернатив за кожним критерієм рівні:

$$CI_{K1}^A = 0,043, \quad CI_{K2}^A = 0,0046, \quad CI_{K3}^A = 0,054, \quad CI_{K4}^A = 0,007, \\ CR_{K1}^A = 0,074, \quad CR_{K2}^A = 0,0079, \quad CR_{K3}^A = 0,093, \quad CR_{K4}^A = 0,012.$$

Всі відносини узгодженості менше, ніж 0,1, що свідчить про хорошу узгодженість думок експерта.

1.2.3 Модель вирішення проблеми

Розрахуємо вектор глобальних пріоритетів альтернатив.

Для цього з вектора локальних пріоритетів альтернатив за кожним критерієм складемо матрицю:

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,225 & 0,210 & 0,358 & 0,166 \\ 0,101 & 0,095 & 0,124 & 0,094 \\ 0,674 & 0,694 & 0,517 & 0,739 \end{pmatrix}$$

і скористаємося формулою

$$\vec{p} = P^A \vec{p}^K.$$

Отже, вектор глобальних пріоритетів дорівнює:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,225 & 0,210 & 0,358 & 0,166 \\ 0,101 & 0,095 & 0,124 & 0,094 \\ 0,674 & 0,694 & 0,517 & 0,739 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5076 \\ 0,3395 \\ 0,0949 \\ 0,0579 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,229 \\ 0,101 \\ 0,669 \end{pmatrix}.$$

Розраховуємо індекс узгодженості і відношення узгодженості для всієї ієрархії:

$$CI = CI^K + \left(\vec{p}^K, \overline{CI^A} \right) = 0,10313,$$

$$RI = RI^K + RI^A = 0,90 + 0,58 = 1,48,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0,069,$$

що є дуже хорошою узгодженістю.

Максимальна компонента вектора глобальних пріоритетів відповідає четвертій альтернативі, тобто пропонується вибрати Delphi 7.

1.3 Змістовна і формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Упаковка куль – задача комбінаторної геометрії про розміщення непересічних куль в евклідовому просторі. Типова постановка задачі звучить так: знайти спосіб розташування куль в просторі, щоб зайняти найбільшу частку цього простору.

Нехай задані множини $\Theta = \{S_{k1}, S_{k2}, \dots, S_{k\hat{j}_k}\}$, елементами яких є кулі із заданими радіусами $\hat{r}_k, k \in K = \{1, 2, \dots, \bar{k}\}$. Загальна кількість заданих куль –

$$n = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \hat{j}_k$$

Для зручності перейменуємо кулі $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1\hat{j}_1}, S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2\hat{j}_2}, \dots, S_{\bar{k}1}, S_{\bar{k}2}, \dots, S_{\bar{k}\hat{j}_{\bar{k}}}$ як $S_i, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$. Радіуси куль $S_i : r_i^0 = \hat{r}_1$ для $i = 1, 2, \dots, \hat{j}_1, r_i^0 = \hat{r}_2$ для $i = \hat{j}_1 + 1, \hat{j}_1 + 2, \dots, \hat{j}_2$, й так далі, $r_i^0 = \hat{r}_{\bar{k}}$ для $i = \bar{j} - \hat{j}_{\bar{k}} + 1, \bar{j} - \hat{j}_{\bar{k}} + 2, \dots, n$.

Нехай $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ – координати центрів куль $S_i, i \in I$. Отже, вектор $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ визначає місцезнаходження всіх куль $S_i, i \in I$, в $\mathbb{R}^3$.

Кулі $S_i, i \in I$, мають бути розміщені в області (рис. 1.9)

$$C = cl(A / C_q),$$

де $A = \bigcup_{l \in I} P_l \subset \mathbb{R}^3$ – контейнер (рис. 1.9 а)

$P_l = \{v \in \mathbb{R}^3 : A_{hl}x + B_{hl}y + C_{hl}z + D_{hl} \geq 0, h = 1, 2, \dots, \bar{h}, l \in I\}$, – опуклі багатогранники, $P_i \cap P_j = \emptyset, i, j \in I, i \neq j$, $A_{hl}x + B_{hl}y + C_{hl}z + D_{hl} \geq 0, h = 1, 2, \dots, \bar{h}$ – нормальні рівняння площин, на яких лежать грані;

зони заборони $C_q, q \in Q = \{1, 2, \dots, \bar{q}\}$, – прямі кругові циліндри (рис. 1.9б);

Циліндри C_q задаються двома точками $H_{1q}(h_{x1q}, h_{y1q}, h_{z1q})$ та $H_{2q}(h_{x2q}, h_{y2q}, h_{z2q})$ ($H_{1q}, H_{2q} \in C_q$), які лежать на осях циліндрів, та радіусами $p_q, q \in Q$.

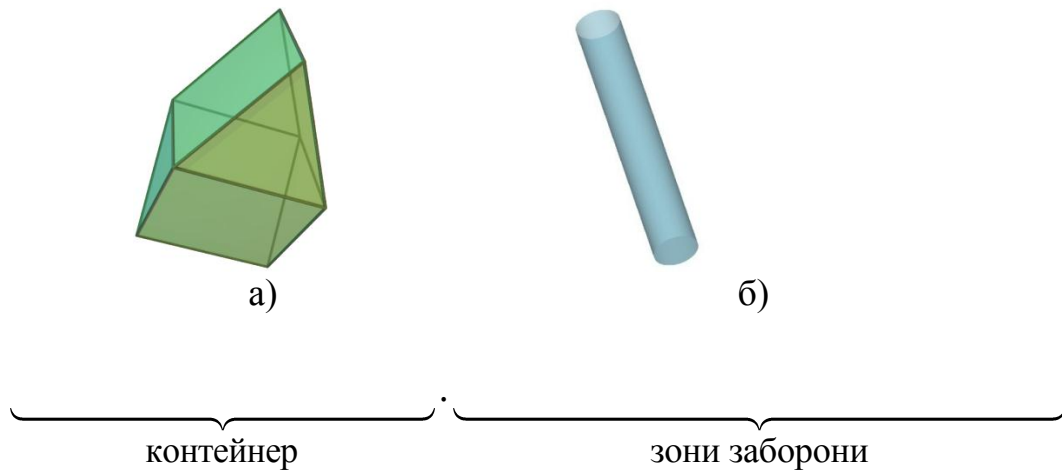


Рисунок 1.9 – Контейнер та зони заборони

Використовуючи напрямні косинуси осей

$$\xi_q = (\cos \alpha_q, \cos \beta_q, \cos \gamma_q) = \left(\frac{h_{x2q} - h_{x1q}}{g_q}, \frac{h_{y2q} - h_{y1q}}{g_q}, \frac{h_{z2q} - h_{z1q}}{g_q} \right),$$

$$\text{де } g_q = \sqrt{(h_{x2q} - h_{x1q})^2 + (h_{y2q} - h_{y1q})^2 + (h_{z2q} - h_{z1q})^2}.$$

Побудуємо рівняння бокових поверхонь $C_q, q \in Q$. Для цього виконаємо поворот циліндра

$$C^0 = \{X \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - p_q^2 \leq 0\}$$

на кути $-\gamma_q$ навколо осі OY й на кути $-\theta_q$ навколо осі OZ та транслюємо на вектори H_{1q} :

$$\left(\left(R_1(-\gamma_q, -\theta_q) \right), (X - H_{1q}) \right)^2 + \left(\left(R_2(-\gamma_q, -\theta_q) \right), (X - H_{1q}) \right)^2 - p_q^2 = 0, q \in Q,$$

де кути θ_q та γ_q можна визначати, використовуючи такі формули:

$$\cos \theta_q = \frac{\cos \alpha_q}{\sqrt{\cos^2 \alpha_q + \cos^2 \beta_q}}, \sin \theta_q = \frac{\cos \beta_q}{\sqrt{\cos^2 \alpha_q + \cos^2 \beta_q}}, \sin \gamma_q = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_q};$$

$$R(\gamma, \theta) = \begin{pmatrix} R_1(\gamma, \theta) \\ R_2(\gamma, \theta) \\ R_3(\gamma, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \theta & \cos \gamma \sin \theta & -\sin \gamma \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \gamma \cos \theta & \sin \gamma \sin \theta & \cos \gamma \end{pmatrix}, q \in Q.$$

1.3.2 Формальна постановка задачі

Задача. Необхідно розмістити кулі із набору $S_i, i \in I$ у контейнері C так, щоб виконувалися обмеження на мінімально допустиму відстань ρ між кулями S_i та S_j , $(i, j) \in \Theta$, а коефіцієнт заповнення контейнера був максимальним.

Задача зображається як задача про рюкзак. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$(v^*, t^*) = \arg \max_{(v, t) \in W_{KP} \subset (\mathbb{R}^{3n} \times B^n)} \Psi(v, t), \quad (1.1)$$

де $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ – змінні параметри розміщення куль $S_i, i \in I$,

$t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, $t_i \in B = \{0, 1\}$, $i \in I$, – двійкові змінні;

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(v_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$\Psi(v, t) = \frac{4}{3} \pi \sum_{i \in I} r_i^3 t_i, \quad (1.2)$$

$$W_{KP} = \{(v, t) \in (\mathbb{R}^{3n} \times B^n) : t_i t_j \widehat{\Phi}_{ij}(v_i, v_j) \geq 0, (i, j) \in \Theta\}, \quad (1.3)$$

$$\Phi_{ij}(v_i, v_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - (r_i + r_j + \rho)^2,$$

$$\Phi_i(v_i) = \min \{ \Phi_i^P(v_i), \Phi_{iq}^{PC}(v_i), q \in Q \}, i \in I,$$

$$\Phi_i^P(v_i) = \Phi_i^{PA}(v_i), \text{ якщо } A = P,$$

$$\Phi_i^{PA}(v_i) = \min \{ A_h x_i + B_h y_i + C_h z_i + D_h - r_i, h = 1, 2, \dots, \bar{h} \},$$

де $\Phi_{iq}^{PC}(v_i)$ – Φ -функція опуклого багатогранника P_i та прямого кругового циліндра $C_q, q \in Q, i \in I$.

Нерівність $\Phi_i(v_i) \geq 0$ забезпечує розміщення кулі $S_i(v_i), i \in I$, в контейнері C , параметр t_i показує, чи знаходиться куля $S_i(v_i)$ в контейнері C , а нерівність $\Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0$ гарантує ненакладення куль S_i та $S_j, i < j \in I$.

Постановка задачі (1.1) – (1.3) має сталі значення радіусів $r_i, i \in I$, вибраними з дискретної множини $\{\hat{r}_1, \hat{r}_2, \dots, \hat{r}_k\}$.

Досліджено основні властивості задачі (1.1) – (1.3).

- задача (1.1) – (1.3) є задачею змішаного цілочислового нелінійного програмування (mixed-integer non-linear programming – MINLP), змінні $t_i, i \in I$, є двійковими, а змінні $v_i, i \in I$, – неперервними;

- функція цілі $\Psi(v, t)$ є кусково-сталою через присутність множників t_i та пропорційна сумі об'ємів куль, які розміщуються в контейнері C ($t_i = 1, i \in I$);

- якщо всі кулі з набору $S_i, i \in I$, розміщуються в C , то функція $\Psi(v, t)$ досягає глобального максимуму;

- локальні та глобальні максимуми, загалом, є нестрогими;

- кожному $t \in B^n$ відповідає деякий набір куль, для яких частина значень $t_i = 1$, а решта – $t_i = 0, i \in I$. Тоді множина $W^t = \{v \in \mathbb{R}^{3n} : (v, t) \in W_{KP}\}$ задає всі-

лякі допустимі розміщення куль у контейнері C , для яких $t_i = 1, i \in I$.

Очевидно, що для розв'язання задачі (1.1) – (1.3) необхідно здійснити перебір усіх 2^n елементів $t \in B^n$ та визначити точки $v^t \in W^t$ для кожної множини W^t .

1.4 Постановка задач дослідження

Мета магістерської атестаційної роботи полягає в розробці алгоритму розв'язання задачі упаковки куль у опуклому багатограннику з урахуванням зон заборони.

Поставлена мета обумовлює такі етапи дослідження:

- провести системний аналіз предметної області;
- формалізувати поставлену задачу за допомогою методу Ф-функцій;
- розробити алгоритм для розв'язання задачі, для якого потрібно реалізувати;
- побудову дерева, що охоплює всілякі сполучення куль із заданого набору;
- побудову математичної моделі упакування заданого набору куль у опуклому багатограннику;
- побудову початкової точки;
- обчислення глобального або локального максимуму;
- вибір набору куль, для якого знайдено допустиме упакування і коефіцієнт заповнення є наближенням до максимального;
- програмно реалізувати розроблений алгоритм;
- провести обчислювальний експеримент.

2 ВИБІР ТА ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Огляд методів упакування куль

На сьогодні значно зростає інтерес до задач оптимального розміщення геометричних об'єктів через велику кількість практичних застосувань у різних галузях, зокрема, в хімічній промисловості, енергетиці, машино-, судно-, авіабудуванні, адитивних технологіях, будівництві, логістиці, робототехніці, біології, медицині тощо. Спектр використання таких задач – від вивчення властивостей атомів до моделювання космічних тіл, наприклад, імітаційне моделювання в матеріалознавстві, порошковій металургії та нанотехнологіях, планування радіохірургії та лазерної коагуляції сітківки ока в медицині, вивчення біологічних структур (клітини, хромосоми тощо) в біології; проектування схем розміщення вантажів у відсіках транспортних засобів, оптимізація топології виробів для 3D-друку; кодування та захист інформації тощо.

Дослідженню математичних моделей та методів розв'язання тривимірних задач розміщення куль присвячено багато робіт. Задачі відрізняються кількістю розміщуваних куль, їхніми розмірами, контейнерами, відношенням розміру куль до розміру контейнера, способами отримання розміщення тощо. Одним із важливих параметрів, який визначає структуру розміщення, є коефіцієнт (щільність) заповнення та пористість.

У 1959 році в роботі Bernal [9] вперше використав випадкову щільність розміщення рівних куль для моделювання рідин. Різні практичні застосування такої моделі вивчаються багатьма вченими залежно від використаного матеріалу, форми контейнера, розміру куль тощо.

Метод комп'ютерного проектування (САПР) використовується Lal та Sun [11] для моделювання двох альтернативних способів розміщення мікрокуль: з мінімальною щільністю й максимальною пористістю для структури кісткової тканини із замкненими клітинами та з максимальною щільністю й мінімальною пористістю для структури кісткової тканини відкритої клітини. Потім визнача-

ється кількість мікрокуль, розміщених за допомогою цих двох моделей.

У роботі Abreu та ін. [4] застосовується метод Monte-Carlo для опису характеристик розміщення та розподілу кульових частинок у циліндрі в присутності гравітаційного поля. Імітаційне моделювання показує, що наявність циліндричної стінки не впливає на явище гравітаційної сегрегації, тобто на розподіл частинок за розмірами.

Метод Monte-Carlo застосовується Roozbahani та ін. [12] для розміщення однакових куль у віртуальних прямокутних контейнерах за аналогією до циліндричних контейнерів. Автори використовують підхід циліндричного розміщення в циліндрі для моделювання заповнення різних віртуальних прямокутних контейнерів. Досліджується вплив стіни. Пористість сферичних розміщень у внутрішній частині циліндра вивчається і без впливу кордонів, щоб показати структуру розміщень в різних прямокутних контейнерах за різних співвідношень розмірів сторін.

Проблема оптимізації пакувальних сфер представляє особливий інтерес для різних галузей людської діяльності. Одним з важливих застосувань проблем сфери упаковки є адитивним виробництво (3D-друк) [13,14]. Технології аддитивного виробництва виготовляють деталі (3D-об'єкти) складних космічних форм, додаючи матеріали шар за шаром.

Yamada et al. [15] досліджували властивості бетону, моделюючи тверді матеріали або наночастинки у вигляді нерівних сфер. Заповнення пір бетоном може підвищити міцність. Стаття [16] присвячена теоретичним та практичним дослідженням структури сумішей, сформульованих як упаковка куль різних розмірів. Такі дослідження можуть бути використані в нанотехнологіях для моделювання структури матеріалу і можуть бути використані при теоретичному розгляді проблем матеріального машинобудування та в хімічній промисловості: синтез наноматеріалів, адсорбентів, носіїв каталізаторів та упаковки для хроматографічних колон. Застосування в космічній техніці проблем упаковки, включаючи упаковку кола та сфери, досліджено в [17, 18].

Потужний пакет для 3-D моделювання молекулярної динаміки був розро-

блений у [19]. Автори використовують молекулярне моделювання для моделювання взаємодій між рівними та нерівними сферами з урахуванням допустимої відстані між атомами різних молекул, що перевищує певний допуск. Програмне забезпечення дозволяє упаковувати мільйони сфер, згрупованих у довільно складні контейнери, включаючи перетин сфер, еліпсів, циліндрів, площин або коробок за розумний проміжок час.

Стоян та ін. використовують модифікацію алгоритму стрибка [20], щоб упаковати нерівні сфери в різні контейнери мінімальних розмірів (включаючи сферичний контейнер мінімального радіуса). У роботі [21] розглядається проблема оптимізації упаковки різних сфер і кубоїдів у кубоїд мінімальної висоти. Допускаються переклади та безперервні обертання кубоїдів. Взаємодія геометричних об'єктів моделюється функції, запропоновані в [22]. Концепції штучного збільшення розмірності простору рішення шляхом введення змінних метричних характеристик для задач оптимальної упаковки геометричних об'єктів, включаючи кола та сфери, запропоновані в [23, 24].

У данній роботі проблема упаковки об'єктів довільної форми в оптимізований контейнер сформульована як проблема рюкзака (КР) [25]. Новий підхід, заснований на гомотетичних перетвореннях контейнера, дозволяє звести проблему рюкзака до послідовності проблем з відкритим розміром.

Дослідження показують, що зовнішні фактори: наявність гравітаційного поля, псевдозрідження, сегрегація, перегрупування, пружна деформація, фрагментація, затвердіння, дилатантність (збільшення об'єму сипучих матеріалів при зволоженні), когезія (процес молекулярного зчеплення) впливають на максимальну досяжну щільність розміщення та на бажану структуру й властивості розміщених частинок.

2.2 Стратегія розв'язання задачі та побудова дерева розв'язків

Для розв'язання необхідно виконати повний перебір усіх $\prod_{k \in K} (\hat{j}_k + 1)$ можливих сполучень куль з множини $\Theta_k = \{S_{k1}, S_{k2}, \dots, S_{k\hat{j}_k}\}$, $k \in K$. Сполучення визначається числами j_k , $k \in K$, куль з Θ_k , для яких значення $t_i = 1$ в наборі куль $\{S_i, i \in I\}$.

Такий перебір можна реалізувати за допомогою дерева розв'язків. Стратегія розв'язання задачі складається з наступних етапів: побудова дерева розв'язків, що реалізує всі можливі множини $\{j_1, j_2, \dots, j_{\bar{k}}\}$, $0 \leq j_k \leq \hat{j}_k$, $k \in K$.

Дерево T будується наступним чином (Рис. 2.1). Корінь T_R дерева розгалужується на вузли T_{j_1} , $j_1 \in \hat{J}_1 = \{0, 1, \dots, \hat{j}_1\}$, першого рівня, де j_1 означає, що береться j_1 куль із множини Θ_1 . Для цих куль відповідні значення $t_i = 1$, $i \in I$, дорівнюють одиниці. В свою чергу, кожен з $\hat{j}_1 + 1$ вузлів першого рівня розгалужується в $\hat{j}_2 + 1$ вузлів: $T_{j_1 j_2}$, $j_1 \in \hat{J}_1$, $j_2 \in \hat{J}_2 = \{0, 1, \dots, \hat{j}_2\}$, де значення j_1 та j_2 означають, що береться j_1 куль із множини Θ_1 та j_2 куль із множини Θ_2 . Цим кулям відповідають значення $t_i = 1$, $i \in I$, в (1.1). Загальна кількість вузлів другого рівня $(\hat{j}_1 + 1)(\hat{j}_2 + 1)$. Знову ж, кожен вузол з гілок другого рівня розгалужується в $\hat{j}_3 + 1$ вузлів третього рівня і так далі. Таким чином, гілка $(T_R, T_{j_1}, T_{j_1 j_2}, T_{j_1 j_2 j_3}, \dots, T_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}})$, $j_1 \in \hat{J}_1$, $j_2 \in \hat{J}_2$, $\dots, j_{\bar{k}} \in \hat{J}_{\bar{k}} = \{0, 1, \dots, \hat{j}_{\bar{k}}\}$ (або термінальний вузол $T_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$) означає, що береться j_1 куль із множини Θ_1 , j_2 куль із множини Θ_2 і так далі, $j_{\bar{k}}$ куль із множини $\Theta_{\bar{k}}$. Цим кулям будуть відповідати значення $t_i = 1$, $i \in I$.

Таким чином, загальна кількість кінцевих вузлів дерева

$$\prod_{k \in K} (\hat{j}_k + 1).$$

Для великої кількості розміщуваних кругів перебрати все дерево розв'язків неможливо, тому ми вибираємо круги у відповідності до випадкової гілки дерева, для якого коефіцієнт заповнення контейнеру знаходиться в заданому діапазоні :

$$h_a \leq \frac{\pi \sum_{\substack{i \in I \\ t_i = 1}} r_i^2}{S_p} \leq h_b. \quad (2.1)$$

Значення h_a, h_b визначаються емпіричним шляхом.

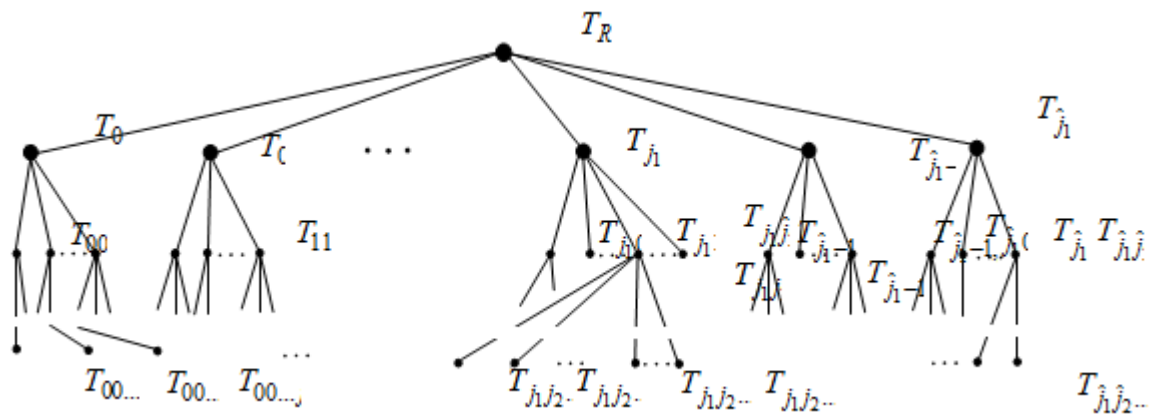


Рисунок 2.1 – Дерево розв'язків

2.3 Задача про рюкзак

Задача про рюкзак (КР – knapsack problem) полягає в розміщенні кругів із заданого набору в контейнері заданих фіксованих розмірів з максимальним коефіцієнтом заповнення. Математична модель задачі КР формулюється таким способом. Нехай є контейнер $C \subset \mathbb{R}^2$, задана геометрична форма, з фіксовани-

ми розмірами і наборами кругів $S_i(u_i) \subset \mathbb{R}^2$, $i \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ з заданими радіусами, де u_i – вектор трансляції кругів S_i , $i \in I_N$. Задача полягає в розміщенні кругів з набору $S_i(u_i)$, $i \in I_N$ (всіх або частини з них) без взаємних накладень в контейнері C з максимальним коефіцієнтом заповнення.

Припустимо, що маємо K розмірів кругів з набору $S_i(u_i)$, $i \in I_N$ з радіусами r_k , $k \in I_K = \{1, 2, \dots, K\}$. Позначимо кількість кругів з радіусом r_k , які можуть бути розміщені всередині контейнера C як n_k , $k \in I_K$, і сгенеруємо кортеж $t = (n_1, n_2, \dots, n_K)$. У кортежі t повинен міститися, принаймні, один ненульовий елемент n_k , $k \in I_K$. Позначимо множину всіх можливих кортежів t як T . Потужність множини T : $\prod_{k=1}^K (n_k + 1)$ сформулюємо підмножину S^t кругів $S_j(u_j)$, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$ з набору $S_i(u_i)$, $i \in I_N$ відповідно до кортежу $t = (n_1, n_2, \dots, n_K)$, де

$$n = \sum_{k=1}^K n_k.$$

Підмножина S^t з урахуванням трансляції позначається $S^t(v) = \{E_j(v_j), j \in J\}$, де $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^2$ – вектор параметрів розміщення $S_j(v_j)$, $j \in J$, $v_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{dj})$ – вектор трансляції кіл $S_j(v_j)$.

Задача КР може бути сформульована таким чином. Знайти підмножину кіл $S^t(v^*)$, $q \in I_Q$, яке може повністю розміститися в контейнері C з максимальним коефіцієнтом заповнення:

$$F^* = F(v^*, t^*) = \arg \max_{(v, t) \in W \subset (\mathbb{R}^{2n} \times B^n)} \varphi(v, t), \quad (2.2)$$

де $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in B^n,$$

$$t_i \in B = \{0, 1\}, i \in I;$$

$$\varphi(v, t) = \sum_{i \in J}^n (r_i)^2 t_i,$$

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(v_i) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$W = \{(v, t) \in (R^{2n} \times B^n) : \Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0, i, j \in J, i > j, \Phi_i(v_i) \geq 0, i \in J\}, \quad (2.3)$$

$$\Phi_{ij}(v_i, v_j) = \|v_i - v_j\|^2 - (r_i + r_j + d)^2. \quad (2.4)$$

У математичній моделі (2.2)–(2.4) нерівність $\Phi_i(v_i) \geq 0$ забезпечує розміщення кругів $S_i, i \in I$, в контейнері C , двійкова змінна t_i показує, чи знаходиться куля S_i в C , а нерівність $\Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0$ гарантує ненакладання кругів S_i та $S_j, i < j \in I$.

Розглянемо основні властивості задачі (2.2)–(2.4).

1. Задача є задачею змішаного цілочисельного нелінійного програмування (mixed-integer non-linear programming – MINLP): частина змінних є двійковими, а решта – неперервними.

2. Функція цілі $\varphi(v, t)$ кусково-постійна через присутність множників t_i та пропорційна сумі d -вимірних об'ємів куль, які розміщуються в контейнері ($t_i = 1$).

3. Якщо всі кулі з набору $S_i, i \in I$, розміщуються в контейнері, то функція $\varphi(v, t)$ досягає глобального максимуму $\sum_{i \in J}^n (r_i)^2$.

4. Локальні та глобальні максимуми, загалом, є нестрогими.

5. Кожному $t \in B^n$ відповідає деякий набір куль, для яких частина значень, $t_i = 1$, а решта – $t_i = 0, i \in I$. Тоді множина $W^t = \{v \in R^2 : (v, t) \in W\}$ задає всілякі допустимі розміщення куль, для яких $t_i = 1, i \in I$, в контейнері C .

6. Кількість обмежень, які описують множину W^t , не більше, ніж C_n^2 й визначається числом пар компонентів у наборі $t \in B^n$, одночасно нерівних нулю.

7. У випадку, коли всі кулі $S_i, i \in I$, мають однаковий радіус, задача КР розглядається як задача розміщення рівних куль (Identical Item Packing). Кількість елементів $t_i = 1, i \in I$, відповідає кількості рівних куль.

8. При збільшенні вимірності простору d кількість активних обмежень значно зростає, а щільність розміщення значно зменшується.

9. Матриця системи активних обмежень розріджена для невеликих значень d . Розрідженість матриці зменшується при збільшенні d .

Очевидно, що здійснення перебору всіх 2^n елементів $t \in B^n$ та визначення точки $u^t \in W^t$ для кожної множини W^t будуть означати розв'язання задачі (2.2)–(2.4).

Рішення задачі (2.2)–(2.4) може бути зведене до перебору елементів множини T , для яких може бути знайдена точка $v \in W$. Пошук точки $v \in W$ може бути виконаний за допомогою рішення наступної оптимізаційної задачі нелінійного програмування, в якій радіуси кругів є змінними:

$$\kappa^* = \kappa(v^*, r^*) = \max \sum_{j \in J} r_j \text{ за умови } (v, r) \in M, \quad (2.5)$$

де $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$;

$$M = \{(v, r) \in \mathbb{R}^{(d+1)n} : \Phi_{ij}(v_i, v_j, r_i, r_j) \geq 0, i, j \in J, i < j, \quad (2.6)$$

$$\Phi_i(v_i, r_i) \geq 0, i \in J, r - r_i \geq 0, i \in J\},$$

$$\Phi_{ij}(v_i, v_j, r_i, r_j) = \sum_{k=1}^n (x_{ki} - x_{kj})^2 - (r_i + r_j)^2.$$

Задачі (2.5)–(2.6) є багатоекстремальними. Функція мети лінійна, тому екстремуми знаходяться в крайніх точках області допустимих рішень M . Функція $\Phi_{ij}(v_i, v_j, r_i, r_j)$ є квадратичною формою. Вид функції $\Phi_i(v_i, r_i)$ залежить

від геометричної форми контейнера.

2.4 Пошук локального максимуму задачі

Розглянемо вершину $T_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$ дерева розв'язків та визначимо ненульові двійкові змінні, які відповідають цій вершині. Нехай кількість ненульових значень дорівнює $n = j_1 + j_2 + \dots + j_{\bar{k}} \leq N$. Це означає, що треба розмістити кулі $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1j_1}, S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2j_2}, \dots, S_{\bar{k}1}, S_{\bar{k}2}, \dots, S_{\bar{k}j_{\bar{k}}}$ з набору S_i , $i \in I_N$. Для зручності перейменуємо кулі $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1j_1}, S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2j_2}, \dots, S_{\bar{k}1}, S_{\bar{k}2}, \dots, S_{\bar{k}j_{\bar{k}}}$ як S_p , $p \in I_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Вважаємо, що радіуси r_p , $p \in I_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, є змінними. Позначимо початкові значення радіусів як r_p^0 , $p \in I_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, відповідно. Для пошуку розміщення куль S_p , $p \in I_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$ в області C розв'язується така задача:

$$(u^*, r^*) = \arg \max_{(u, r) \in D \subset \mathbb{R}^{4n}} \chi(u, r), \quad (2.7)$$

$$\text{де } \chi(u, r) = \sum_{k=1}^n r_k - \text{функція цілі}; \quad (2.8)$$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – змінні параметри розміщення;

$r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ – змінні радіуси куль;

$$W = \{(u, r) \in \mathbb{R}^{3n} : \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, i < j \in I_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}, \Phi_i(u_i, r_i) \geq 0, i \in I_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}, \\ r_i \geq 0, i \in I_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}, -r_i + r_i^0 \geq 0, i \in I_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}\}, \quad (2.9)$$

Задача (2.7) – (2.9) є задачею нелінійного програмування. Початкову точку вибирають у випадковий спосіб. У разі, коли (u^*, r^*) – розв'язок задачі (2.7)

– (2.9) такий, що $\sum_{k=1}^n r_k^* = \sum_{k=1}^n r_k^0$, то отримано розміщення куль, яке відповідає вузлу $T_{j_1 j_2 \dots j_{\bar{k}}}$, що відповідає значенню функції цілі $\Psi(v, t) = \frac{4}{3} \pi \sum_{k=1}^n (r_k^*)^3$ в задачі (1.1) – (1.3). Інакше вибирають іншу початкову точку або роблять висновок, що для вузла, який розглядається, не існує розв'язку задачі (1.1) – (1.3).

Найліпше значення Ψ^* для всіх вузлів зрізаного дерева розглядається як наближення до глобального максимуму задачі (1.1) – (3.3).

2.5 Алгоритм розв'язання задачі

Згідно зі стратегією розв'язання задачі на першому кроці проводиться аналіз вихідних даних задачі: оцінка кількості куль, що упаковуються, їх розміри у порівнянні з розмірами контейнеру, наявність зон заборони та їхні метричні характеристики. На основі цих даних вибирається спосіб побудови початкових точок.

Наступним кроком обчислюються початкові значення нижньої $\underline{\Psi}$ та верхньої $\bar{\Psi}$ функції цілі $\Psi(v)$ задачі (1.1) – (1.2).

Далі робиться вибір гілки дерева, на основі якої формуються дані для розв'язання задачі (2.7) – (2.9).

Наступний етап – побудова початкової точки λ в спосіб, вибраний на початку роботи алгоритму.

Після цього розв'язується задача (2.7) – (2.9). Для цього використовується пакет програм .

Якщо отримана точка – точка глобального максимуму, тобто $r_i^* = r_i^0 \forall i \in I$ то поновлюються краще значення функції цілі $\Psi^* = \chi^*$, верхня межа $\bar{\Psi} = \chi^*$ й розглядається наступна гілка дерева з урахуванням правил відтинання та онов-

леного значення верхньої межі.

Якщо отримана точка – точка локального (глобального) максимуму, для якої $\exists i \in I$, що $r_i^* < r_i^0$, то вибирається наступна початкова точка та знову розв'язується задача (2.7) – (2.9). За необхідності розглядається до десяти початкових точок ($\lambda = 1, 2, \dots, 10$).

Коли всі початкові точки вичерпані, вибирається наступна гілка дерева.

Процес перебору гілок усіченого дерева продовжується до тих пір, поки за визначений час не буде знайдено поліпшення функції цілі.

Блок-схема алгоритму зображена на рис. 2.1.

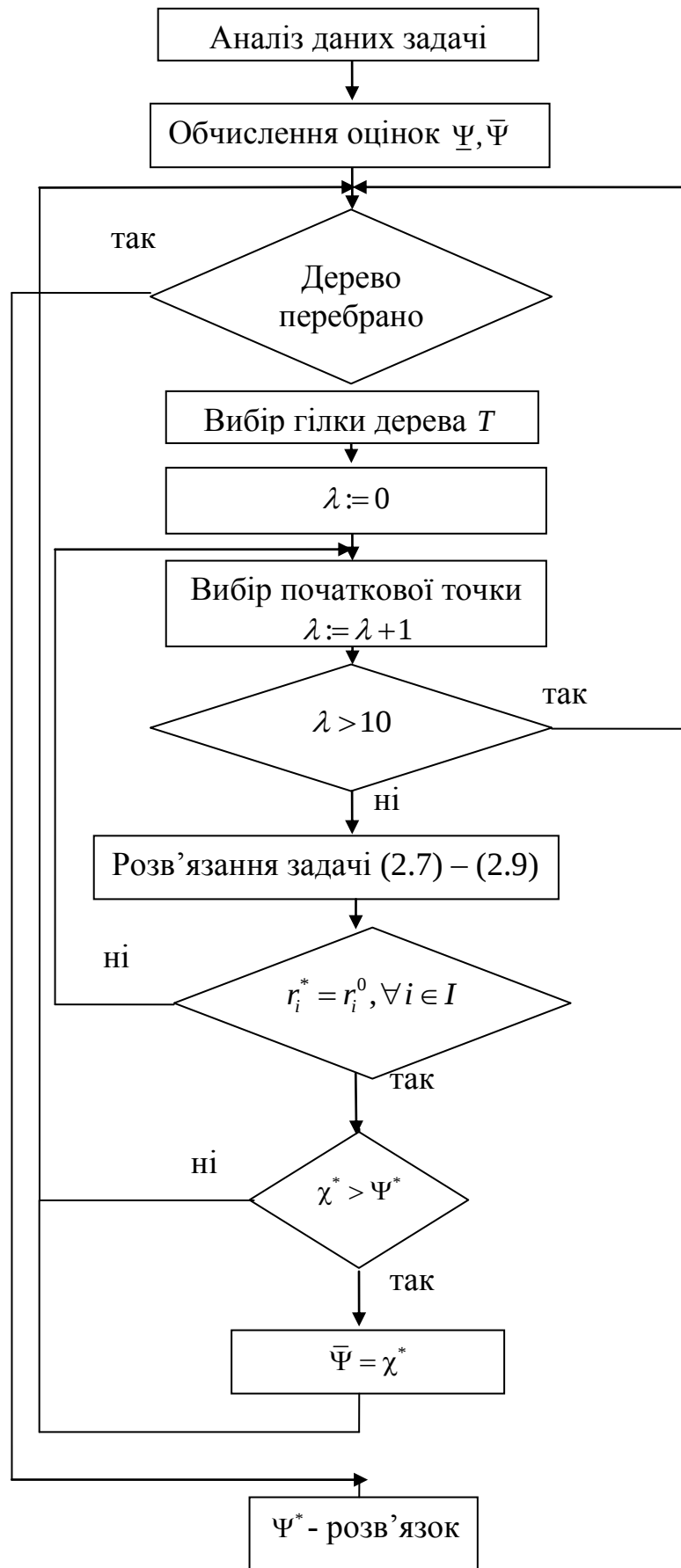


Рисунок 2.1 – Схема алгоритму

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Вибір середовища реалізації програми

При виборі середовища програмування перш за все оцінювались зручність візуального програмування, можливість підключення графічних пакетів, а також ступінь захищеності кодів програми від несанкціонованого доступу.

Виходячи із специфіки об'єкта, що моделюється, для реалізації програмної системи була обрана мова програмування Delphi з використанням стандартної бібліотеки компонент (VCL), графічної бібліотеки Open GL та існуючих розширень. Використання мови Delphi мотивувалось також тим, що в цьому програмному продукті пропонуються зручні засоби для створення інтерфейсу, вбудований апарат обробки виняткових ситуацій, гарно реалізований механізм роботи зі списками и записами, засоби, які дозволяють застосовувати пояснюючі компоненти (Help-файли з гіпертекстом), реалізовані стандартними засобами операційного середовища Windows. При розробці програми були використані архітектура управління подіями та об'єктно-орієнтований підхід, в якому програма зображується у вигляді сукупності об'єктів.

Delphi – це комбінація декількох найважливіших технологій:

- високопродуктивний компілятор у машинний код;
- об'єктно-орієнтована модель компонент;
- візуальна (а, тому, і швидкісна) побудова застосувань з програмних прототипів;
- масштабовані засоби для побудови баз даних.

Компілятор у машинний код. Компілятор, вбудований у Delphi, забезпечує високу продуктивність, необхідну для побудови застосувань в архітектурі «клієнт-сервер». Цей компілятор на сьогодні є найшвидшим у світі. Він пропонує легкість розробки та швидкий час перевірки готового

програмного блоку, характерного для мов четвертого покоління (4GL) та в той же час забезпечує якість коду, характерного для компілятора 3GL. Крім того, Delphi забезпечує швидку розробку без необхідності вбудовувати вставки на C або ручного написання коду.

У процесі побудови застосувань розробник обирає з палітри компонент готові компоненти. Ще до компіляції він бачить результати своєї роботи – після підключення до джерела даних їх можна бачити відображеними на формі, можна пересувати по даним, зображати їх в тому або іншому вигляді. В цьому значенні проектування в Delphi мало чим відрізняється від проектування в інтерпретуючому середовищі, однак після виконання компіляції ми отримуємо код, який виконується в 10-20 разів швидше, ніж той же самий, зроблений за допомогою інтерпретатору.

Об'єктно-орієнтована модель програмних компонент. Основний наголос цієї моделі в Delphi робиться на максимальному повторному використанні коду. Це дозволяє розробникам будувати застосування досить швидко із заздалегідь підготовлених об'єктів, а також дає їм можливість створювати свої власні об'єкти для середовища Delphi. Ніяких обмежень по типам об'єктів, які можуть створювати розробники, не існує. Дійсно, все в Delphi написано на ньому ж, тому розробники мають доступ до тих же об'єктів та інструментів, які використовувались для створення середовища розробки.

Середовище Delphi поєднує повний набір візуальних інструментів для швидкісної розробки застосувань (RAD – rapid application development), яка підтримує розробку користувального інтерфейсу та підключення до корпоративних баз даних. VCL - бібліотека візуальних компонент, що поєднує стандартні об'єкти побудови користувального інтерфейсу, об'єкти управління даними, графічні об'єкти, об'єкти мультімедіа, діалоги та об'єкти управління файлами, управління DDE та OLE.

3.2 Опис програми

Програмна система призначена для імітаційного моделювання процесу пакування каталітичних елементів у контейнері складної форми, а також візуального та чисельного результатів пакування.

Вхідними даними програми є:

- координати вершин багатогранника;
- кількість різних кругів в контейнері;
- відстань між кругами.

Програма дозволяє здійснювати пошук локально-оптимального пакування сферичних елементів (за групою змінних), стежити за процесом пакування за допомогою графічного інтерфейсу, отримувати результати упакування як в графічному, так і в чисельному вигляді як текстовий файл з координатами об'єктів.

При завантаженні програми відкривається вікно, зображене на рис. 3.1.

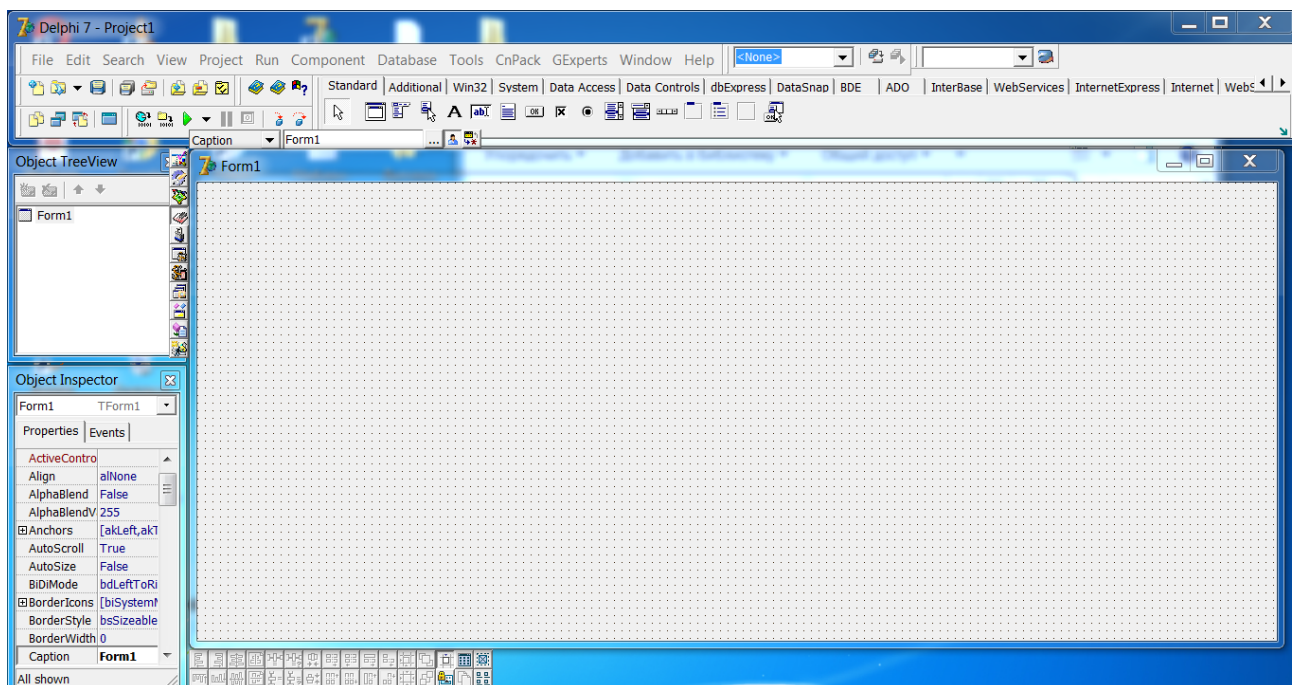


Рисунок. 3.1 – Меню програми

Перед нами чотири вікна Delphi. Вгорі під всю ширину екрану вікно управління проектом і середовищем розробки - головне вікно Delphi.

Зліва – Інспектор об'єктів (Object Inspector). У ньому задаються властивості складових нашу програму компонентів. І нарешті, в центрі одне над іншим два вікна Delphi, вікно форми майбутньої програми і вікно програмної начинки. Прямо перед нами - вікно, яке в Delphi називається Форма(Form). Саме Форма є візуальним прообразом нашої майбутньої програми.

Зміст і призначення головного меню:

- File – файл. Операції з файлами, на зразок створити, відкрити, зберегти;
- Edit – редагування. Операції редагування, як стандартні для текстового процесора (скасування, копіювання-вставка), так і специфічні для редагування розроблюваних вікон додатків (вирівнювання, порядок створення і т.п.);
- Search – пошук. Різні варіанти пошуку і заміни;
- View – вид. Перемикання між різними вікнами - як відносяться до IDE, так і щодо розроблюваного з додатком;
- Project – проект. Всі операції по роботі з проектом, як то додавання і видалення файлів, налаштування, збірка і компіляція;
- Run - виконати. Засоби для налагодження програм;
- Component – компоненти. Засоби для роботи з компонентами, включаючи настройку палітри компонент;
- Database – дані. Деякі засоби для роботи з БД;
- Tools – сервіс. Налаштування параметрів IDE, а так же виклик допоміжних програм (Image editor і ін.);
- Windows – вікно. Містить список всіх відкритих в поточний момент вікон і дозволяє перемикатися між ними (актуально, коли вікон багато і одні загороджують інші);
- Help – довідка.

Програма показує виконання основного процесу пакування. Для запуску другого варіанта треба натиснути кнопку “Run”. Кількість упакуваних каталітичних елементів виводиться у полі “Count of balls”.

Після виконання розрахунків, тобто після визначення максимальної кількості елементів, система видає повідомлення “The process is finished” та графічну ілюстрацію пакування елементів.

Таким чином, розроблена програмна система є ефективним засобом для імітаційного моделювання упакування великої кількості елементів у контейнер.

Для графічної ілюстрації результатів обчислень використовувалася комп’ютерна програма «Дослідницька система SC Φ -function 3D».

Текст програми наведений у додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для перевірки роботи методу запропоновано тестові приклади. Приклади були обчислені на персональному комп'ютері з процесором AMD Athlon 64 X2 6000+ (3.1Ghz). Для розв'язання задач нелінійного програмування використовувався пакет програм IPOPT.

Приклад 1. Розміри $w \times l \times h$ паралелепіпеда Ω : $w=15$, $l=25$, $h=17$; $C = P_1 \cup P_2$, $S_{1q} \subset P_1$, $q \in I_1$, $S_{2q} \subset P_2$, $i \in I_2$. Обмеження на радіуси куль: $r_q^- = 0.5$, $r_q^+ = 2$, мінімально допустима відстань між кулями $\rho = 0.25$.

Координати полюса багатогранника P_1 : $x_1 = 7.5$, $y_1 = 7.5$, $z_1 = 8.5$. Він має 6 вершин, координати вершин у власній системі координат: $V_{11} = (-7.1, 1.4, 0.1)$, $V_{12} = (-2, 0.7, 8.2)$, $V_{13} = (0.45, 7.25, 0.2)$, $V_{14} = (7.15, 0.15, 0.25)$, $V_{15} = (0.7, -8.05, 0.9)$, $V_{16} = (1, 1, -7)$. Межа P_1 складається з 8-ми граней, які проходять через вершини V_{11}, V_{12}, V_{13} ; V_{12}, V_{14}, V_{13} ; V_{11}, V_{15}, V_{12} ; V_{12}, V_{15}, V_{14} ; V_{11}, V_{16}, V_{13} ; V_{13}, V_{16}, V_{14} ; V_{11}, V_{16}, V_{15} та V_{16}, V_{15}, V_{14} відповідно. Циліндр C_1 задається двома точками $H_{11}(0, 0, 0)$ та $H_{21}(0, 0, 1)$, що лежать на осях циліндрів, і радіусом $r_c = 0.5$.

Кількість різних радіусів куль становить $\bar{k} = 3$: Радіуси та кількість куль – $\hat{r}_1 = 2$, $\hat{j}_1 = 3$, $\hat{r}_2 = 1.5$, $\hat{j}_2 = 3$, $\hat{r}_3 = 1$, $\hat{j}_3 = 12$ відповідно.

Час обчислень – 2 години 5 хвилин. Ілюстрацію розміщення куль наведено на рис. 4.1.

Таблиця 4.1 – Радіуси та координати центрів куль

Номер	Радіус	Координати		
q	r_{1q}	x_{1q}	y_{1q}	z_{1q}
1	2	-0,2198	3,6036	0,7705
2	2	-3,6637	1,1432	0,3665
3	2	2,8552	0,9067	-0,3861
4	1,5	1,5168	-1,9967	1,5741

Кінець таблиці 4.1.

5	1,5	0,8004	-2,3791	-1,573
6	1,5	-1,7268	-1,8992	1,3942
7	1	-1,7629	-0,9795	-1,1975
8	1	-1,0484	2,035	4,3581
9	1	-3,027	0,7971	3,7847
10	1	2,107	0,4871	2,8926
11	1	0,5985	3,4028	-2,3708
12	1	-0,7958	-1,8709	4,1457
13	1	0,7096	-5,9065	0,698
14	1	-1,8846	1,195	-2,5598
15	1	0,5765	1,8658	-4,0181
16	1	-0,1455	-4,0178	2,4721
17	1	2,0192	0,2061	-3,4679
18	1	-0,4725	-4,0489	0,2143

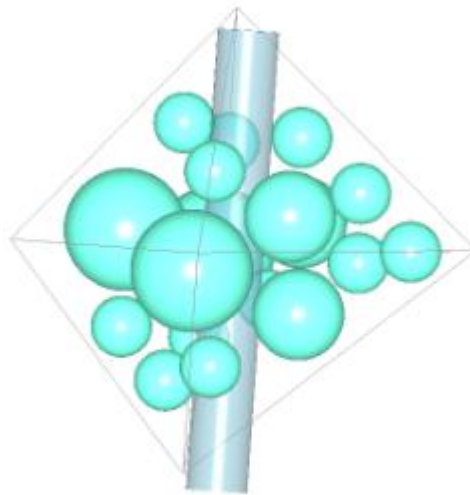


Рисунок 4.1 – Ілюстрація розміщення куль для багатогранника P_1

Координати полюса багатогранника P_2 : $x_2 = 7.5$, $y_2 = 11.5$, $z_2 = 8.5$. Багатогранник P_2 має 15 вершин, координати вершин у власній системі координат: $V_{21} = (3, -2, -7)$, $V_{22} = (0, -4, -7)$, $V_{23} = (3, -4, 7)$, $V_{24} = (3, 0, -7)$, $V_{25} = (3, 4, 0)$,

$V_{26} = (0, 4, -7)$, $V_{27} = (-2, 4, -7)$, $V_{28} = (-3, 3, -7)$, $V_{29} = (-3, 4, 0)$, $V_{2,10} = (0, 4, 7)$,
 $V_{2,11} = (-3, 3, 7)$, $V_{2,12} = (3, 0, 7)$, $V_{2,13} = (-3, 0, 7)$, $V_{2,14} = (0, -4, 7)$ та
 $V_{2,15} = (-3, -4, -7)$. Межа P_2 складається з 12-ти граней, які проходять через вершини V_{21}, V_{22}, V_{23} ; V_{24}, V_{25}, V_{26} ; V_{27}, V_{28}, V_{29} ; $V_{29}, V_{2,10}, V_{2,11}$; $V_{2,13}, V_{2,14}, V_{2,15}$;
 $V_{25}, V_{2,10}, V_{2,12}$; $V_{22}, V_{2,15}, V_{2,14}, V_{23}$; $V_{21}, V_{24}, V_{25}, V_{2,12}, V_{23}$; $V_{25}, V_{26}, V_{27}, V_{29}, V_{2,10}$;
 $V_{28}, V_{29}, V_{2,11}, V_{2,13}, V_{2,15}$; $V_{21}, V_{24}, V_{26}, V_{27}, V_{28}, V_{2,15}, V_{22}$ та $V_{23}, V_{2,12}, V_{2,10}, V_{2,11}, V_{2,13}, V_{2,14}$ відповідно. Циліндр C_1 задається двома точками $H_{11}(0, 0, 0)$ та $H_{21}(0, 0, 1)$, що лежать на осях циліндрів, і радіусом $r_c = 0.5$.

Кількість різних радіусів куль становить $\bar{k} = 2$: Радіуси та кількість куль – $\hat{r}_1 = 1,5$, $\hat{j}_1 = 8$, $\hat{r}_2 = 1$, $\hat{j}_2 = 20$ відповідно.

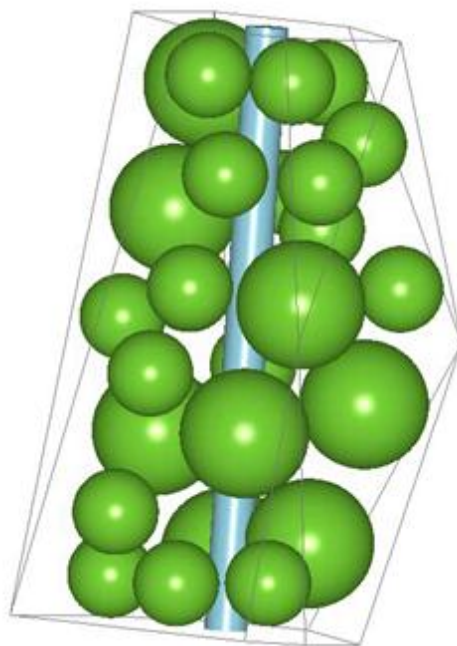
Час обчислень – 2 години 25 хвилин. Ілюстрацію розміщення куль наведено на рис. 4.2.

Таблиця 4.2 – Радіуси та координати центрів куль

Номер	Радіус	Координати		
q	r_{2q}	x_{2q}	y_{2q}	z_{2q}
1	1,5	0,0373	-2,478	-2,5862
2	1,5	-1,4939	1,3618	-2,3164
3	1,5	0,53	1,8795	-4,8264
4	1,5	1,4832	2,4479	-1,5486
5	1,5	-1,1278	2,4791	0,7667
6	1,5	1,4858	-1,3616	-5,3099
7	1,5	0,9511	-2,3881	5,4805
8	1,5	-0,5987	-1,8961	2,6193
9	1	-0,6901	-2,9705	-5,972
10	1	-1,9646	-1,1699	-1,1435
11	1	1,9538	-0,5614	3,098
12	1	1,9263	0,4984	0,4755

Кінець таблиці 4.2

13	1	1,9707	-1,3089	-0,9691
14	1	-1,9185	0,6076	3,6221
15	1	-0,9384	-2,93	0,022
16	1	1,9751	-2,8667	2,9338
17	1	0,9236	2,364	4,4824
18	1	1,3653	-2,8675	0,6643
19	1	1,8185	0,3656	5,7273
20	1	-1,8749	-0,0516	-5,9143
21	1	-1,9652	2,7421	-5,6701
22	1	-1,9717	-0,1648	0,9347
23	1	1,893	2,9545	1,1661
24	1	-1,9778	-1,9093	-4,4179
25	1	-1,5929	-0,3516	5,851
26	1	-1,7549	2,286	5,9199
27	1	-1,2305	2,8891	3,6369
28	1	0,8548	1,3472	2,4168

Рисунок 4.2 – Ілюстрація розміщення куль для багатогранника P_2

Ілюстрацію розміщення багатогранників P_1 і P_2 у контейнер C , який має просторову форму паралелепіпеда показано на рис. 4.3.

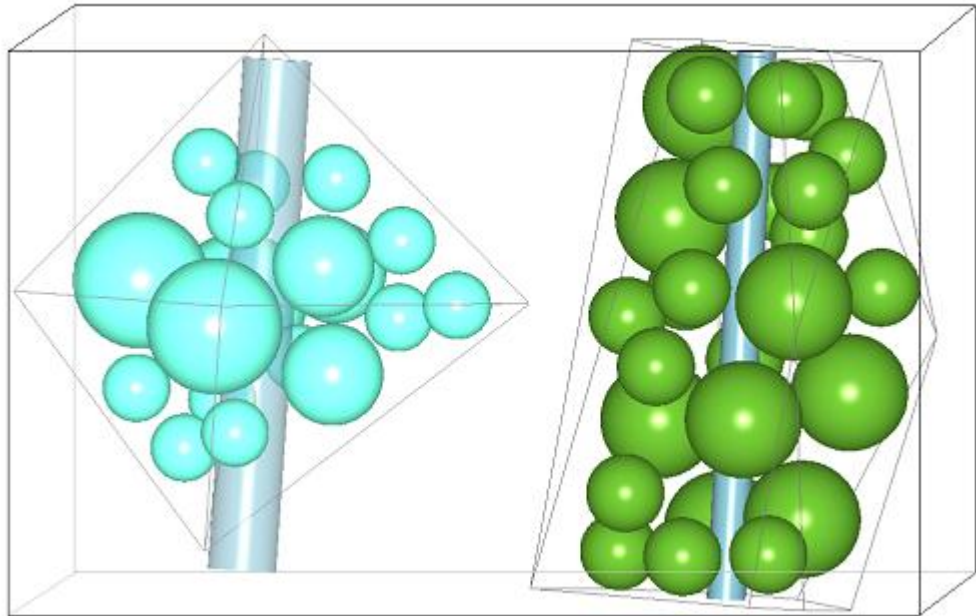


Рисунок 4.3 – Ілюстрація розміщення куль для Прикладу 1

Присутність зон заборони в контейнері, з одного боку, зменшує об'єм контейнера й кількість куль, яку можна розмістити в ньому, а з іншого боку, – значно ускладнює формалізацію умов розміщення куль й, за наявності великої кількості зон заборони, – пошук початкових точок області допустимих розміщень. Наявність зон заборони зменшує ймовірність виникнення фрагментів розміщення з регулярною (гратчастою) структурою.

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

На сьогоднішній день і в доступному для огляду майбутньому в різних сферах виробництва виникають і будуть виникати проблеми ресурсо- та енергозбереження, пов'язані з задачами розкрою і упакування (компонування). До таких задач належать:

- задачі оптимального розкрою матеріалу на заготовки довільної форми, які вирішуються при виробництві виробів у машинобудівній, авіабудівній, суднобудівній, текстильній, шкіряній, деревообробній, меблевій і багатьох інших галузях промисловості;
- задачі компонування: вантажів у різноманітних контейнерах, схем генеральних планів промислових підприємств, двигунів, радіоелементів на платах і т.д. .;
- задачі оптимізації топології виробів у адитивних технологіях (3D-друк);
- задачі планування радіопроменевої терапії та терапії очного дна за допомогою лазерної коагуляції в медицині.

Всі перераховані вище задачі за своєю суттю належать до проблеми оптимізаційного геометричного моделювання, що полягає в оптимізації розміщення об'єктів в заданих областях.

Задачі упакування куль грають важливу роль в багатьох галузях людської діяльності. Упакування нерівних куль використовується в радіохірургії [2]. Гамма-промені фокусуються на загальний центр, створюючи кулястий обсяг високої дози радіації (рис. 5.1). Ключове завдання в лікуванні гамма-ножами - як розмістити кулі в пухлини довільної просторової форми.

Головним інструментом лікування діабетичного макулярного набряку на сьогоднішній день є лазеркоагуляція макулярної зони сітківки. Процедура лазерного лікування є нанесення серії дозованих мікроопіків - лазерокоагулятів, у зоні набряку на сітківці. Накладення коагулятів відбувається або по одному, або серією коагулятів, розташованих у вигляді заданої фігури правильної форми (наприклад, кулі) – паттерна, або з попереднім плануванням розташування

коагулятів з наступним накладенням отриманого плану на зображення сітківки в режимі реального часу (рис. 5.2).

Адитивні технології — одна з форм технологій адитивного виробництва, де тривимірний об'єкт створюється шляхом накладання послідовних шарів матеріалу (друку) за даними цифрової моделі. Друк здійснюється спеціальним пристроєм — 3D-принтером, який забезпечує створення фізичного об'єкта шляхом послідовного накладання пластичного матеріалу на основі віртуальної 3D-моделі. За допомогою 3D принтера можна виготовити все — від запчастин для автомобілів, та деталей побутової техніки до складних медичних імплантів і авіаційно-космічної техніки (рис. 5.3). У порівнянні з класичним методом виробництва деталей, за допомогою 3D принтера, вдається зменшити їх вагу.

3D друк часто називають «магічною» технологією, тому що вона дозволяє конвертувати, отримані в CAD-системах в готові вироби. Насправді процес 3D-друку вимагає також багато ручної праці, що включає попередню підготовку і подальшу обробку надрукованих деталей для досягнення їх бажаної якості.

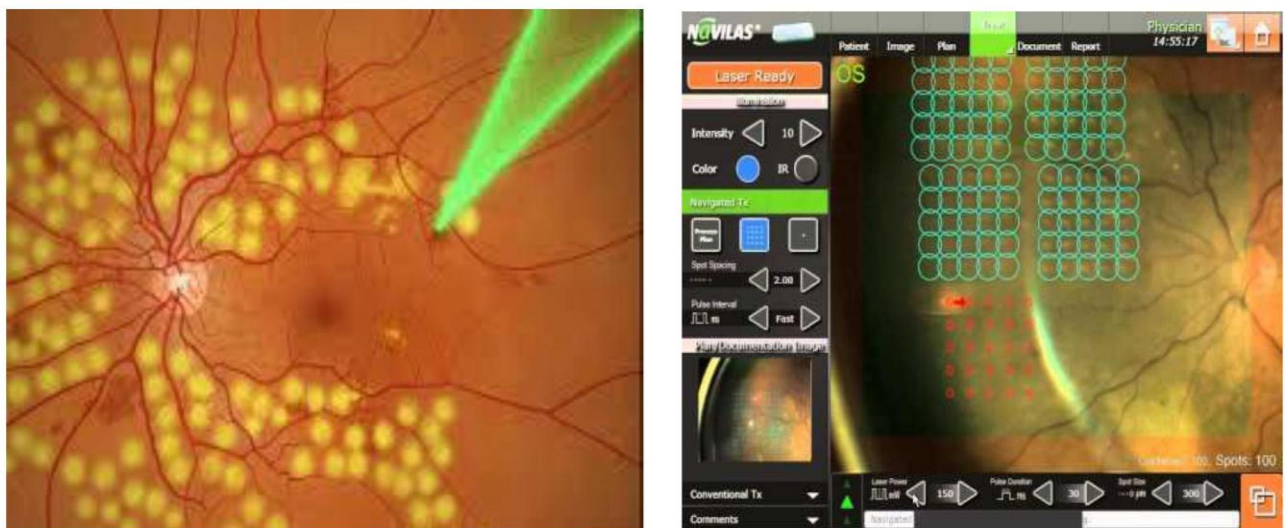


Рисунок 5.2 – Ілюстрацію процесу лазеркоагуляції сітківки

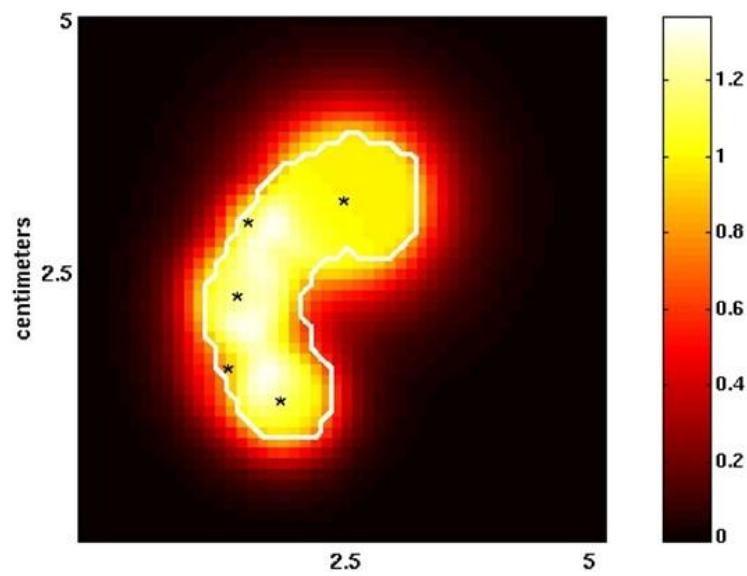


Рисунок 5.1 – Ілюстрацію процесу гамма-променевої терапії пухлин

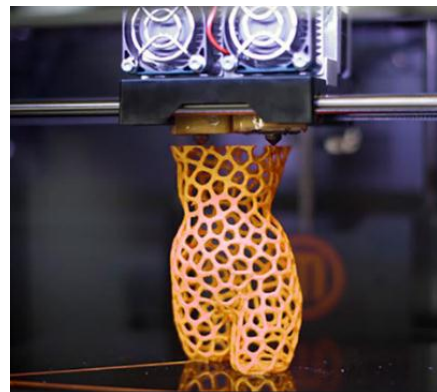


Рисунок 5.3 – Ілюстрація предметів, виготовлених 3D принтером

Результати атестаційної роботи можуть бути застосовані в наукових дослідженнях в біології, фізиці, хімії, медицині, а також інженерній практиці при вирішенні задач упакування нерівних куль у контейнерах складної геометричної форми.

Розроблений програмний продукт може знайти застосування в НДІ, які займаються проблемами геометричного проектування.

ВИСНОВКИ

У результаті виконання атестаційної роботи проєкті розглядалась задача пакування куль в опуклому багатограннику із зонами заборони.

При вивченні сучасного стану проблеми, що розглядається, наведені численні практичні застосування задач упакування. Обґрунтована актуальність досліджень цього класу задач та необхідність створення сучасних програмних засобів для їх вивчення, імітаційного моделювання процесів в експериментальному устаткуванні.

Досліджена математична модель задачі як оптимізаційної задачі геометричного проєктування. Проаналізовані властивості цієї моделі, вивчений та застосований апарат Ф-функцій, який надає можливість розв'язувати задачі упакування геометричних об'єктів як задачі математичного програмування. Припущення, що радіуси куль змінні, дозволяє запропонувати новий спосіб отримання початкових точок, що належать області допустимих рішень задачі. Застосування комбінації випадкового способу формування початкових точок дозволяє гнучко вибирати спосіб в залежності від розмірів контейнеру та куль, які упаковуються.

Використання результатів цієї магістерської роботи, зокрема розробленого програмного продукту і алгоритму, може значно спростити обчислювальні аспекти при вирішенні задач упакування куль у опуклий багатогранник із зонами заборони з максимальним коефіцієнтом заповнення.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Стоян Ю. Г. Размещение геометрических объектов. Киев : Наукова думка, 1975. 240 с.
2. Yamada S., Kanno J., Miyauchi M. Multi-sized sphere packing in containers: optimization formula for obtaining the highest density with two different sized spheres // IPSJ Online Transactions. 2011. № 4. С. 126–133.
3. Sollich P., Wilding N. B. Crystalline phases of polydisperse spheres. // Phys. Rev. Lett. 2010. № 11. P. 118302.
4. Monte Carlo simulation of the packing and segregation of spheres in cylinders / C R. A. Abreu, R. Macias-Salinas, F. W. Tavares, M. A. Castier // Brazilian Journal of Chemical Engineering. 1999. № 16(4). P. 395–405.
5. Banhart J. Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams // Progress in Materials Science. 2001. № 46(6). P. 559–632.
6. Manufacturing of open-cell aluminum foams via infiltration casting in super-gravity fields and mechanical properties / Z. Wang, J. Gao , K. Chang, L. Meng , N. Zhanga, Z. Guoa // RSC Adv., 2018. № 8. P. 15933–15939.
7. Gavrilouk E. O. Unequal sphere packing problem in the context of stereotactic radiosurgery. Shaker Verlag GmbH, Germany. 2007.
8. Wang J. Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning // Journal of Combinatorial Optimization. 2010. № 3. P. 160–168.
9. Chen D. Z., Xu J. Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics / ed. by T. F. Gonzalez, Taylor & Francis Books, New York. 2007. P. 816.
10. Исследование алгоритмов расстановки коагулятов на изображение глазного дна / А. С. Широканев, Д. В. Кириш, Н. Ю. Ильясова, А. В. Куприянов // Компьютерная оптика. 2018. Т. 42. № 4. С. 712–721.
11. Lal P., Sun W. Computer modeling approach for microsphere-packed bone scaffold // Computer-Aided Design. 2004. № 36(5). P. 487–497.
12. Roozbahani M. M., Huat B. B. K., Asadi A. Effect of rectangular

container's sides on porosity for equal-sized sphere packing // Powder Technology. 2012. № 224. P. 46–50.

13. Analysis of problems of irregular three-dimensional packaging in additive production: a new taxonomy and data set / Louis JP Araujo, E. Yozkan, Jason AD Atkin, M. Baumer // International Journal of Industrial Research. 2018. C. 5920–5934.

14. Gibson I., Rosen D., Stucker B. Additive manufacturing technologies, 3D printing, rapid prototyping and direct digital production // Springer-Verlag, Нью-Йорк, 2015.

15. Yamada S., Kanno J. and Meowchi M. Packaging of multi-circuit balls in containers: an optimization formula for obtaining the highest density with two different sized spheres // IPSJ Online Transactions. 2011. C. 126–133 .

16. Останні досягнення в моделюванні структур багатокomпонентних сумішей із використанням підходу до сферичної упаковки / Л. Бурцева, Б. В. Салас, Р. Ромеро та Ф. Вернер // Міжнародний журнал нанотехнологій. 2016. С. 44–59.

17. Optimized packaging in space technology: Part I / Yu. Stoyan, A. Pankratov, T. Romanova, G. Fasano, J. D. Pinter, Yu. E. Stoyan, A. Chugai, // Modeling and Optimization in Space Engineering, перек. G. Fasano and J. Pinter, Springer Optimization and its Applications, New York 144 (2019), P. 395–437.

18. Optimized packaging in space technology: Part II / Yu. Stoyan, I. Grebennik, T. Romanova and A. Kovalenko // Modeling and Optimization in Space Engineering, перек. G. Fasano and J. Pinter, Springer Optimization and its Applications, New York. 2019. T. 144. P. 439–457.

19. Package for building initial configurations for modeling molecular dynamics / L. Martinez, R. Andrade, EG Birgin and JM Martinez // J. Comput. Xim. 2009. T. 30. C. 2157–2164.

20. Stoyan, Y., Yaskov, G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. 2014. T. 8. P. 949–970.

21. Stoyan, Y.G., Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and

spheres into a cuboid // *Advances in decision sciences*. 2014.

22. Stoyan Yu.G. Optimization problems on geometrical design // *Modeling the innovation: communications and information systems*, North-Holland, Amsterdam. 1990. P. 443-451.

23. Яковлев С. В. Метод штучного розширення простору в задачах оптимального укладання геометричних об'єктів // *Кібернетика і системний аналіз*. 2017. Т. 53. С. 725–731.

24. Яковлев С. В. Формалізація задач оптимізації просторової конфігурації за допомогою спеціального класу функцій // *Кібернетика і системний аналіз*. 2019. Т. 5. С. 512–523.

25. Wäscher G., Haußner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // *European Journal of Operational Research*. 2007. P. 1109–1130.