

И. Н. ПРЕСНЯКОВ, канд. техн. наук, Ю. В. АФАНАСЬЕВ

МЕТОДЫ КОСВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

При оценивании марковских последовательностей, наблюдаемых на фоне шумов измерения, возможны прямой [1; 2] и косвенный [3] подходы, причем в ряде случаев косвенный метод нелинейной фильтрации имеет преимущества по апостериорной дисперсии оценки и условиям сходимости. Известные алгоритмы косвенной фильтрации [3; 4] ориентированы лишь на скалярные марковские последовательности и не охватывают те практически важные задачи, которые связаны с фильтрацией на фоне небелого шума измерения, фильтрацией марковских последовательностей при наличии сопутствующих случайных (марковских) параметров, оценкой состояния систем, описываемых дифференциальными уравнениями выше первого порядка и др.

Предложены три алгоритма различного приближения для косвенного оценивания векторных марковских последовательностей. На основе одного из них решается практическая задача фильтрации марковской фазы квазигармонического колебания с флюктуирующей амплитудой. Анализируется характер нелинейности уравнения наблюдения, при котором косвенные алгоритмы обеспечивают наибольший выигрыш по апостериорной дисперсии оценки. Проводится сравнение с алгоритмом расширенного фильтра Калмана.

Алгоритмы косвенной фильтрации. Пусть дискретные модели состояния и наблюдения определяются следующими соотношениями:

$$x_n = F(x_{n-1}) + \xi_n; \quad (1)$$

$$y_n = H(x_n) + \eta_n. \quad (2)$$

Здесь x_n — N -мерный вектор состояний; $F(x_{n-1})$ — N -мерная векторнозначная функция; ξ_n — N -мерный вектор шума состояния; y_n — K -мерный вектор наблюдения; $H(x_n)$ — K -мерная векторнозначная функция, $K \leq N$; η_n — K -мерный вектор шума измерения.

ξ_n, η_n — независимые нормальные случайные последовательности типа белого шума с параметрами

$$E\{\xi_i \xi_j^T\} = V_1 \delta(i - j); \quad E\{\eta_i \eta_j^T\} = V_2 \delta(i - j),$$

где $E\{\cdot\}$ — символ операции математического ожидания; $\delta(i - j)$ — символ Кронекера; V_1, V_2 — положительно определенные симметрические матрицы ковариаций размером $N \times N$ и $K \times K$ соответственно. Пусть также известна априорная плотность вероятности вектора оцениваемых параметров $p(x_0)$.

Получим оценку \hat{H}_n косвенного параметра $H_n = H(x_n)$, оптимальную по критерию максимума апостериорной плотности вероятности $p(H_n | Y_n)$, где $Y_n = \{y_i, i = \overline{1, n}\}$ — последовательность измеряемых векторов.

Предположим вначале, что размерности векторов состояния и наблюдения равны: $N=K$ и ограничимся функциями $F(\cdot)$ и $H(\cdot)$, которые могут быть разложены в ряд Тейлора. Предположим далее, что в области изменения значений последовательности $X_n = \{x_i, i = \overline{1, n}\}$ существует функция, обратная $H(\cdot)$: $x_n = G(H_n)$. Тогда, переходя к косвенной модели состояния и наблюдения

$$H_n = H[F(x_{n-1}) + \xi_n]; \quad y_n = H_n + \eta_n$$

и применяя методику [4], записываем следующие уравнения для текущей косвенной оценки \hat{H}_n и матрицы ее апостериорной дисперсии $V_{n,H}$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_n = y_n + V_2 \left[\frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right]^T V_1^{-1} \{R(\hat{H}_n) - G(\hat{H}_n)\} + \\ + V_2 \left[\frac{d}{d\hat{H}_n} \ln \left| \det \left(\frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right) \right| \right]^T; \end{aligned} \quad (3)$$

$$V_{n,H} = E[\hat{H}_n \hat{H}_n^T] - E[\hat{H}_n] E[\hat{H}_n^T], \quad (4)$$

где

$$R(\hat{H}_n) = \frac{\int F[G(H_{n-1})] p(H_{n-1} | Y_{n-1}) p(\hat{H}_n | H_{n-1}) \prod_{i=1}^k d h_{n-1,i}}{\int p(H_{n-1} | Y_{n-1}) p(\hat{H}_n | H_{n-1}) \prod_{i=1}^k d h_{n-1,i}}; \quad (5)$$

$h_{n-1,i}$ — элементы вектора H_{n-1} , а математическое ожидание в (4) вычисляется по апостериорной плотности $p(\hat{H}_n | Y_n)$:

$$\begin{aligned} p(\hat{H}_n | Y_n) = C p(y_n | \hat{H}_n) \int p(\hat{H}_n | H_{n-1}) \times \\ \times p(H_{n-1} | Y_{n-1}) \prod_{i=1}^k d h_{n-1,i}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$p(y_n | \hat{H}_n) = N(H_n; V_2); \quad (7)$$

$$p(\hat{H}_n | H_{n-1}) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} (\det V_1)^{-\frac{1}{2}} \left| \det \left(\frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right) \right| \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [G(\hat{H}_n) - F(G(H_{n-1}))]^T V_1^{-1} [G(\hat{H}_n) - F(G(H_{n-1}))] \right\}. \quad (8)$$

Здесь плотность вероятности $p(H_{n-1} | Y_{n-1})$ определяется на предыдущем $(n-1)$ -м шаге, а постоянная C может быть найдена из условия нормировки.

Как и при прямом методе фильтрации полный алгоритм (3)—(8) получается сложным, а решение уравнения косвенной фильтрации (3) — трудоемким. Поэтому в практических приложениях приходится прибегать к различным аппроксимациям. Так, если в апостериорной плотности (6) положить $p(H_{n-1} | Y_{n-1}) = N(H_{n-1}; V_{n-1,H})$, а в переходной плотности (8) разложить функцию $F[G(H_{n-1})]$ в ряд Тейлора вблизи точки H_{n-1} с сохранением только линейных членов (модифицированный метод гауссовской аппроксимации), получим алгоритм

$$\hat{H}_n = y_n + V_2 \left[\frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right]^T V^{-1} \{ F[G(\hat{H}_{n-1})] - G(\hat{H}_n) \}; \quad (9)$$

$$V_{n,H} = E[\hat{H}_n \hat{H}_n^T] - E[\hat{H}_n] E[\hat{H}_n^T], \quad (10)$$

где $V = V_1 + Z_H(\hat{H}_{n-1}) V_{n-1,H} [Z_H(\hat{H}_{n-1})]^T; \quad (11)$

$$Z[\hat{H}_{n-1}] \triangleq F[G(\hat{H}_{n-1})]; \quad (12)$$

$$p(\hat{H}_n | Y_n) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_n - \hat{H}_n)^T V_2^{-1} (y_n - \hat{H}_n) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [G(\hat{H}_n) - Z(\hat{H}_{n-1})]^T V^{-1} [G(\hat{H}_n) - Z(\hat{H}_{n-1})] \right\}. \quad (13)$$

Структура приближенного уравнения (9) совпадает со структурой полного алгоритма (3), за исключением последнего слагаемого, отсутствие которого эквивалентно разложению функции $G(\hat{H}_n)$, стоящей в определителе под знаком производной, в ряд Тейлора с сохранением только линейных членов. Результаты моделирования показали, что добавление точного слагаемого $V_2 \left[\frac{d}{d\hat{H}_n} \ln \left| \det \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \left(\frac{dG(\hat{H}_n)}{d\hat{H}_n} \right) \right| \right]^T$ в алгоритм (9) ухудшает качество его работы, вплоть до расхождения оценки. Объясняется это тем, что здесь погрешность приближенного нахождения интегрального выражения (5) компенсируется приближенностью вычисления функции $G(\hat{H}_n)$. Наконец, аппроксимация обеих плотностей $p(H_{n-1} | Y_{n-1})$ и $p(H_n | H_{n-1})$ нормальным законом приводит к алгоритму, который по вычислительной сложности примерно соответствует алгоритму расширенного фильтра Калмана:

$$\hat{H}_n = V_g (V_2 + V_g)^{-1} y_n + V_2 (V_2 + V_g)^{-1} \psi(\hat{H}_{n-1}); \quad (14)$$

$$V_{n,H} = \{ [G_H^*(\hat{H}_n)]^T V^{-1} G_H(\hat{H}_n) + V_2^{-1} \}^{-1}, \quad (15)$$

где
$$\psi(\hat{H}_{n-1}) \equiv \psi_{n-1} \triangleq H \{F[G(\hat{H}_{n-1})]\}; \quad (16)$$

$$V_g = [G'_\psi(\psi_{n-1})]^{-1} V [G'_\psi(\psi_{n-1})]^{-\tau}, \quad (17)$$

а остальные обозначения соответствуют принятым в предыдущем алгоритме.

Приведенные алгоритмы позволяют вычислить косвенную оценку \hat{H}_n . Конечной целью фильтрации является, однако, получение оценки текущего значения x_n последовательности X_n . В соответствии с основным принципом косвенного нелинейного оценивания [3] во всех трех алгоритмах оценка \hat{x}_n определяется нелинейным преобразованием $x_n = G(H_n)$ (18). При этом матрица ковариаций оценки

$$V_{n,x} = E[G(\hat{H}_n)G^T(\hat{H}_n)] - E[G(\hat{H}_n)]E[G^T(\hat{H}_n)], \quad (19)$$

причем для первых двух алгоритмов математическое ожидание находится по апостериорной плотности (6) и (13), а для алгоритма (14) — (17) — по апостериорной плотности $p(\hat{H}_n | Y_n) = N(\hat{H}_n, V_{n,H})$.

Разлагая в (19) функцию $G(\hat{H}_n)$ в ряд с сохранением линейных членов, можно для всех трех алгоритмов получить более простую приближенную формулу

$$V_{n,x} \approx G_H(\hat{H}_n) V_{n,H} [G_H(\hat{H}_n)]^T. \quad (20)$$

Для последнего алгоритма из (15), (20) имеем

$$V_{n,x} = \{V^{-1} + [G'_H(\hat{H}_n)]^{-\tau} V_2^{-1} [G'_H(\hat{H}_n)]^{-1}\}^{-1}; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} V &= V_1 + Z'_H(\hat{H}_{n-1}) V_{n-1,H} [Z'_H(\hat{H}_{n-1})]^T = \\ &= V_1 + F'_x(x_{n-1}) V_{n-1,x} [F'_x(x_{n-1})]^T. \end{aligned} \quad (22)$$

Следует иметь в виду, что оптимальность оценки (18) в смысле максимума апостериорной плотности достигается лишь при несобственном равномерном априорном распределении $p(H_n)$ параметра H_n [3]. В этом случае апостериорная плотность совпадает с функцией правдоподобия $p(H_n | Y_n) = Cp(Y_n | H_n)$, а оценка максимума правдоподобия инвариантна по отношению к нелинейному преобразованию $G(\cdot)$. Тогда начальные условия запишутся в виде

$$\hat{H}_1 = y_1; \hat{x}_1 = G(y_1); V_{1,H} = V_2; V_{1,x} = G'_y(y_1) V_2 [G'_y(y_1)]^T. \quad (23)$$

При необходимости можно получить оценку \hat{x}_n , оптимальную по критерию максимума апостериорной плотности вероятности и при произвольном априорном распределении $p(H_n)$. Для этого достаточно воспользоваться формулой $p_x(x_n) = H'_x(x_n) p_H[H(x_n)]$ и максимизировать плотность $p_x(x_n)$. Однако эта операция повлечет за собой дополнительные вычислительные затраты, которые могут оказаться сравнимыми с затратами на весь алгоритм (14) — (17). Исключение составляет скалярный случай, когда соответствующее уравнение часто имеет аналитическое решение.

Заметим, что скалярный вариант алгоритма (14) — (17), (18), (20), (21) — (23) отличается от предложенного в работе [3] лишь заменой

при вычислении апостериорной дисперсии $H_F [F(\hat{x}_{n-1})]$ на $H'_x(\hat{x}_n)$. Так как \hat{x}_n в среднем ближе к x_n , чем экстраполированная оценка $F(\hat{x}_{n-1})$, то можно ожидать некоторого улучшения работы алгоритма.

Для сравнения приведем матрицу апостериорной дисперсии расширенного фильтра Калмана [2]

$$V_n = \{V^{-1} + [H_F(F(x_{n-1}))]^T V_2^{-1} H_F(F(\hat{x}_{n-1}))\}^{-1}, \quad (24)$$

где V находится в соответствии с (22). Сопоставление (21) с (24) показывает, что при одинаковых начальных условиях \hat{x}_{n-1} , $V_{n-1,x}$ отличие заключается в слагаемых $[G_H(\hat{H}_n)]^{-1} V_2^{-1} [G_H(\hat{H}_n)]^{-1}$ и $[H_F \times (F(\hat{x}_{n-1}))]^T V_2^{-1} H_F(F(\hat{x}_{n-1}))$. В частности, если матрица $G_H(\cdot)$ — диагональна, то $[G_H(H(\hat{x}_{n-1}))]^{-1} = H'_x(\hat{x}_{n-1})$ и выигрыш по дисперсии оценки i -й компоненты $x_{i,n}$ ($i = \overline{1, N}$) вектора состояния x_n определяется отношением

$$\lambda_i = \left\{ \frac{h'_{ii}(\hat{x}_{i,n})}{h'_{ii}(f_i(\hat{x}_{i,n-1}))} \right\}^2. \quad (25)$$

Здесь h'_{ii} , f_i — элементы матрицы $H'_x(\cdot)$ и вектора $F(\cdot)$. Если $\lambda_i > 1$ эффективность косвенной фильтрации по соответствующей компоненте $x_{i,n}$ выше.

Асимптотически при $V_1 = 0$, $n \rightarrow \infty$, $\lambda_i \rightarrow 1$, как и в одномерном случае, для нефлуктуирующего сигнала эффективность обоих фильтров одинакова. Наибольшие различия между числителем и знаменателем (25) достигаются в том случае, когда экстраполированное значение $f_i(\hat{x}_{i,n-1})$ существенно отличается от оценки $\hat{x}_{i,n}$, что следует ожидать при больших дисперсиях — диагональных элементах матрицы шума состояния V_1 . При этом знак неравенства $\lambda_i \geq 1$ определяется характером нелинейности функции $H(\cdot)$. Несложно видеть, что $\lambda_i > 1$, когда $h'_{ii} > 0$ и $\lambda_i < 1$ — в противном случае. Чтобы иметь выигрыш в случае функции $G(\cdot)$ с противоположным типом нелинейности, требуются дополнительные меры [3].

Пусть теперь векторы состояния и наблюдения имеют различную размерность, т. е. $N \neq K$. Особенно часто встречается на практике скалярное наблюдение многомерного марковского процесса: $N > 1$, $K = 1$. При $N \neq K$ в общем случае обратная функция $G(\cdot)$ неоднозначна. Однако косвенная фильтрация может выполняться и при этих условиях. Действительно, для получения однозначной векторной функции $G(\cdot)$, обратной $H(\cdot)$, достаточно дополнить систему

$$\begin{aligned} h_{n,1} &= h_1(x_n); \\ h_{n,2} &= h_2(x_n); \\ &\dots \dots \dots \\ h_{n,K} &= h_K(x_n) \end{aligned} \quad (26)$$

недостающими $N-K$ уравнениями. При оценивании вектора постоянных параметров $x_n = x_{n-1}$ ($V_1 \equiv 0$) для этого следует взять M последовательных наблюдений $y_n \dots y_{n+M}$ таким образом, чтобы выполнялось

неравенство $M \times K \geq N$. В более общем случае, когда $V_1 \neq 0$, функцию $G(\cdot)$ можно найти приближенно, дополняя систему (26) $N-K$ уравнениями относительно экстраполированного значения оцениваемого процесса $x_{n+1}^{\circ} = F(x_n)$:

$$\begin{aligned} h_{n,1} &= h_1(x_n); \\ &\dots \dots \dots \\ h_{n,K} &= h_K(x_n); \\ h_{n+1,1} &\approx h_1(x_{n+1}^{\circ}); \\ &\dots \dots \dots \\ h_{n+1,N-K} &\approx h_{N-K}(x_{n+1}^{\circ}). \end{aligned} \quad (27)$$

Решение системы (27) относительно h_{ij} представляет собой искомую функцию $G(\cdot)$.

Фильтрация квазигармонического колебания. Рассмотрим пример использования алгоритма (14)—(17), (18), (20), (21)—(23). Пусть необходимо получить оценку нормальной марковской фазы квазигармонического сигнала с флюктуирующей амплитудой, плотность вероятности которой может быть описана m -распределением (Накагами)

$$\rho(a) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Phi}\right)^m a^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Phi} a^2}, \quad (28)$$

где m ; Φ — параметры m -распределения [1].

Очевидно, в дискретном времени флюктуации фазы описываются разностным уравнением $\varphi_n + R_{\varphi} \varphi_{n-1} + \xi_{\varphi,n}$ (29). Здесь $E\{\xi_{\varphi,i} \xi_{\varphi,j}\} = \sigma_{\xi_{\varphi}}^2 \delta(i-j)$; $|R_{\varphi}| < 1$ — коэффициент корреляции между φ_n и φ_{n-1} . Априорная дисперсия фазы в установившемся режиме $\sigma_{\varphi}^2 = \sigma_{\xi_{\varphi}}^2 / (1 - R_{\varphi}^2)$.

Для синтеза уравнения, соответствующего (25), необходимо привлечь дополнительные априорные сведения о процессе $a(t)$. Пусть известно, что $a(t)$ — стационарный односвязный марковский процесс с экспоненциальной функцией корреляции (в частности, таким процессом во многих случаях являются релеевские замирания, $m=1$). Тогда динамика процесса $a(t)$ выражается стохастическим дифференциальным уравнением $\dot{a}(t) = f(a) + n(t)$ (30), где $f(\cdot)$ — некоторая нелинейная функция; $n(t)$ — нормальный белый шум с нулевым средним и спектральной плотностью $N_a/2$.

Полагая, что плотность вероятности (28) является стационарным решением соответствующего (30) уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, находим функцию $f(\cdot)$:

$$f(a) = \frac{N_a}{4} \frac{2m-1}{a} - \frac{N_a}{2} \frac{m}{\Phi} a.$$

Перейдя обычным способом к дискретному времени, имеем разностное уравнение для огибающей

$$a_n = \frac{\alpha}{a_{n-1}} + \beta a_{n-1} + \xi_{a,n}. \quad (31)$$

Здесь $\alpha = 0,25 N_a \tau_d (2m - 1)$; $\beta = 1 - 0,5 N_a \tau_d m / \Phi$; $\xi_{a,n}$ — нормальная случайная последовательность типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_{\xi,a}^2 = 0,5 N_a \tau_d$; τ_d — интервал дискретизации.

Можно показать, что для (31) дисперсия в установившемся режиме $\sigma_a^2 = \Phi \left\{ 1 - \frac{\Gamma^2(m+0,5)}{m\Gamma^2(m)} \right\}$, а коэффициент корреляции между a_n и a_{n-1} $R_a = \exp(-m\sigma_{\xi,a}^2/\Phi)$.

Будем вести фильтрацию в двух квадратурных каналах. При этом окончательно модели состояния и наблюдения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varphi_n &= R_\varphi \varphi_{n-1} + \xi_{\varphi,n}; \\ a_n &= \alpha/a_{n-1} + \beta a_{n-1} + \xi_{a,n}; \\ y_n^- &= a_n \sin(\omega n + \varphi_n) + \eta_n^-; \\ y_n^+ &= a_n \cos(\omega n + \varphi_n) + \eta_n^+, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\omega = 2\pi\tau_d/T$; T — период колебаний; $E\{\eta_i^- \eta_j^-\} = (\sigma_\eta^-)^2 \delta(i-j)$; $E\{\eta_i^+ \eta_j^+\} = (\sigma_\eta^+)^2 \delta(i-j)$.

Привлечение дополнительного квадратурного канала y_n^+ необходимо здесь по следующим причинам: размерность вектора наблюдения $y_n = \{y_n^-, y_n^+\}^T$ приводится к размерности вектора состояния $x_n = \{a_n, \varphi_n\}^T$; исключается неоднозначность обратной функции $G(\cdot)$ при случайных скачках фазы, превышающих $\pm 90^\circ$; появляется возможность использования в качестве компоненты $G(\cdot)$ функции арктангенс, которая имеет желательный вид кривизны.

Обозначим $\theta_n = \varphi_n + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = \omega n - 2\pi l$ — неинформативный набег фазы; $l = \lfloor \omega n / 2\pi \rfloor$; квадратные скобки обозначают целую часть. Тогда векторную функцию $G(\cdot)$, соответствующую наблюдениям y_n^- и y_n^+ , можно представить в виде

$$G(\bar{H}_n) = \begin{bmatrix} g^-(\hat{h}_n^-, \hat{h}_n^+) \\ g^+(\hat{h}_n^-, \hat{h}_n^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(\hat{h}_n^-)^2 + (\hat{h}_n^+)^2 \\ \text{arctg}(\hat{h}_n^-/\hat{h}_n^+) - \varepsilon_n + i\pi \end{bmatrix}, \quad (33)$$

где $i = 1$, если $\hat{h}_n^+ < 0$, $i = 2$, если при $\varepsilon_n > \pi$ $\hat{h}_n^- > 0$ и $\hat{h}_n^+ > 0$ или $\hat{h}_n^- < 0$ и $\hat{h}_n^+ > 0$. Иначе $i = 0$.

В соответствии с (14) — (17), (32), (33) алгоритм косвенной оптимальной фильтрации огибающей a_n и фазы φ_n определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} \hat{H}_n &= V_g (V_2 + V_g)^{-1} y_n + V_2 (V_2 + V_g)^{-1} \psi(\hat{x}_{n-1}); \\ V_{n,H} &= \{ [G_H^+(\hat{H}_n)]^T V^{-1} G_H^+(\hat{H}_n) + V_2^{-1} \}^{-1}; \hat{x}_n = G(\hat{H}_n); \\ V_{n,x} &= G_H^+(\hat{H}_n) V_{n,H} [G_H^+(\hat{H}_n)]^T, \end{aligned}$$

где

$$V_g = [G_\psi(\psi_{n-1})]^{-1} V [G_\psi(\psi_{n-1})]^{-T}; V = V_1 + F_x^+(\hat{x}_{n-1}) V_{n-1,x} [F_x^+(\hat{x}_{n-1})]^T;$$

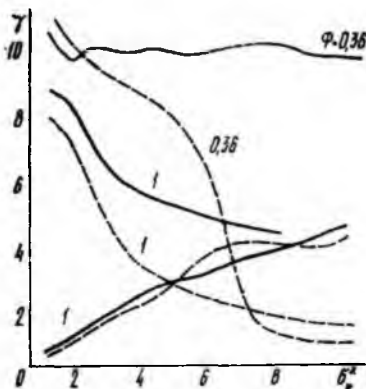
$$V_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi,a}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\xi,\varphi}^2 \end{bmatrix}; V_2 = \begin{bmatrix} (\sigma_\eta^-)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma_\eta^+)^2 \end{bmatrix};$$

$$\psi(\hat{x}_{n-1}) \triangleq \psi_{n-1} = \begin{bmatrix} \psi_{n-1}^- \\ \psi_{n-1}^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha/\hat{a}_{n-1} + \beta\hat{a}_{n-1}) \sin(\omega n + R_\Phi \hat{\varphi}_{n-1}) \\ (\alpha/\hat{a}_{n-1} + \beta\hat{a}_{n-1}) \cos(\omega n + R_\Phi \hat{\varphi}_{n-1}) \end{bmatrix};$$

$$G_{\hat{H}}(\hat{H}_n) = \frac{1}{\hat{a}_n} \begin{bmatrix} \hat{h}_n^- & \hat{h}_n^\perp \\ \hat{h}_n^\perp/\hat{a}_n & -\hat{h}_n^-/\hat{a}_n \end{bmatrix};$$

$$G_\psi^\dagger(\psi_{n-1}) = \begin{bmatrix} \psi_{n-1}^-/\sqrt{(\psi_{n-1}^-)^2 + (\psi_{n-1}^\perp)^2} & \psi_{n-1}^\perp/\sqrt{(\psi_{n-1}^-)^2 + (\psi_{n-1}^\perp)^2} \\ \psi_{n-1}^\perp/[(\psi_{n-1}^-)^2 + (\psi_{n-1}^\perp)^2] & -\psi_{n-1}^-/[(\psi_{n-1}^-)^2 + (\psi_{n-1}^\perp)^2] \end{bmatrix};$$

$$F_{\hat{x}}(\hat{x}_{n-1}) = \begin{bmatrix} -\alpha/\hat{a}_{n-1} + \beta & 0 \\ 0 & R_\Phi \end{bmatrix}.$$



Некоторые результаты моделирования полученного алгоритма приведены на рисунке. Параметры уравнений состояния и наблюдения, кроме указанных на чертеже, для всех графиков приняты следующие: $R_a(\tau_d) = 0,9$; $R_\Phi(\tau_d) = 0,96$; $\sigma_\Phi^2 = 0,5 \text{ рад}^2$; $m = 2$; $\omega = 5$. Параметр $m = 2$ задает распределение амплитуды по закону Релея — Райса. Сплошные кривые соответствуют косвенному фильтру, пунктирные — расширенному фильтру Калмана. Начальные условия выбраны одинаковыми в соответствии с (23). По оси абсцисс от-

ложена дисперсия шума наблюдения $(\sigma_\eta^-)^2 = (\sigma_\eta^\perp)^2$; по оси ординат — относительные величины

$$\gamma_\Phi = E \{ (\arctg(y_n^-/y_n^\perp) + \pi - \varepsilon_n - \varphi_n)^2 \} / E \{ (\hat{\varphi}_n - \varphi_n)^2 \};$$

$$\gamma_a = E \{ \sqrt{(y_n^-)^2 + (y_n^\perp)^2} - a_n \}^2 / E \{ (\hat{a}_n - a_n)^2 \},$$

характеризующие выигрыш от применения фильтрации. Возрастающие кривые относятся к огибающей, остальные — к фазе. Результаты моделирования подтверждают, что предложенный алгоритм для рассмотренных характеристик оцениваемых процессов имеет более высокую эффективность.

Список литературы: 1. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов, М., 1975. 704 с. 2. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении, М., 1976. 495 с. 3. Шлома А. М. Косвенный метод нелинейной фильтрации марковских процессов // Радиотехника и электрон. 1986. Т. 31, № 7. С. 1304—1310. 4. Пресняков И. Н., Афанасьев Ю. В. Обобщенный алгоритм косвенной нелинейной фильтрации марковских процессов // Радиотехника. 1989. Вып. 89. С. 76—78.

Поступила в редколлегию 22.01.88