УДК 510.62

Ю. Э. ИЦКОВ, Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛИНЕЙНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРЕДИКАТА

Рассмотрим экспериментально проверяемые условия, при выполнении которых любая динамическая система может быть математически описана набором линейных функционалов. Такие динамические системы широко распространены в природе и технике. Статья продолжает исследования, начатые в работе [1].

Линейно-функциональным предикатом назовем любой предикат Φ, заданный на декартовом квадрате пространства $L_2[0, 1]$, который может быть представлен в виде

$$\Phi(x, y) = D\left(\int_0^1 x(t)\, a(t)\, dt,\ \int_0^1 y(t)\, a(t)\, dt\right). \qquad (1)$$

Здесь D — предикат равенства; $a(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t))$; $\{a_i\}_{i=1}^n$ — система линейно-независимых функций из $L_2[0, 1]$.

Сформулируем и докажем теорему об условиях существования линейно-функционального предиката.

Теорема 1. *Для того чтобы предикат был линейно-функциональным, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойствами симметричности, транзитивности, аддитивности, n-мерности и непрерывности.*

Предикат Φ мы называем *симметричным*, если из $\Phi(x, y) = 1$ следует $\Phi(y, x) = 1$, *транзитивным*, если из $\Phi(x, y) = \Phi(y, z) = 1$ следует $\Phi(x, z) = 1$, и *аддитивным*, если из $\Phi(x, y) = \Phi(u, v) = 1$ следует $\Phi(x + u, y + v) = 1$ для любых x, y, z, u, v из $L_2[0, 1]$. Предикат Φ назовем n-мерным, если существует система функций $\{e_k\}_{k=1}^n$ из $L_2[0, 1]$ такая, что для всякой функции x из $L_2[0, 1]$ найдется единственный набор вещественных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющий условию

$$\Phi\left(x, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = 1. \qquad (2)$$

Если функционалы $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\ldots$, $\alpha_n(x)$ непрерывны в $L_2[0, 1]$, то предикат Φ назовем *непрерывным*.

Доказательство. *Достаточность.* Вначале покажем, что предикат Φ рефлексивен, т. е. что $\Phi(x, x) = 1$ для любого x из $L_2[0, 1]$. Действительно, из n-мерности предиката Φ следует, что

для любого x найдется $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i$ такой, что $\Phi(x, y) = 1$ [α_i] О
Поскольку предикат Φ симметричен, то $\Phi(y, x) = 1$. Воспользо
вавшись транзитивностью предиката Φ, получаем $\Phi(x, x) = 1$ [3]
Докажем далее, что функционалы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ линейны
Для этого установим их аддитивность. Пусть x и y — произволь в
ные функции из $L_2[0, 1]$. Согласно (2) имеем
а

$$\Phi\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i\right) = 1; \qquad (3)$$ г

$$\Phi\left(y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y)\, e_i\right) = 1; \qquad (4)$$ 1

$$\Phi\left(x + y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x + y)\, e_i\right) = 1. \qquad (5)$$

По свойству аддитивности предиката Φ из (3) и (4) выводим

$$\Phi\left(x + y, \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(x) + \alpha_i(y))\, e_i\right) = 1. \qquad (6)$$

В силу n-мерности предиката Φ множители при e_i в (5) и (6) совпадают, поэтому $\alpha_i(x + y) = \alpha_i(x) + \alpha_i(y)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Полученное равенство означает аддитивность функционалов α_i. Поскольку в силу непрерывности предиката Φ они еще и непрерывны, то функционалы α_i линейны.

Покажем теперь, что $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ — линейно-независимая система функционалов. Запишем уравнение $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_i(x) = 0$ (7). Нам надо доказать, что оно выполняется лишь в случае, когда все числа γ_i равны нулю. Положим $x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$. В силу рефлексивности предиката Φ имеем $\Phi\left(x, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i\right) = 1$.

Сравнивая последнее равенство с (2), по свойству n-мерности предиката Φ получаем $\alpha_i(x) = \gamma_i$. После подстановки в (7) находим $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 = 0$, откуда следует $\gamma_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Это означает, что функционалы в системе $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ линейно-независимы.

Далее докажем, что равенство $\Phi(x, y) = 1$ и система равенств $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, равносильны. Пусть $\Phi(x, y) = 1$. Используя свойства симметричности и транзитивности предиката Φ и учитывая (3), (4), имеем $\Phi\left(y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i\right) = 1$. Сравнивая полученное равенство с (4), из n-мерности предиката Φ выводим

$\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$. Обратно, если $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, то $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y) e_i$. Отсюда, а также из (3) и (4), пользуясь симметричностью и транзитивностью предиката Φ, заключаем, что $\Phi(x, y) = 1$.

По теореме Рисса [2], об общем виде линейных функционалов в пространстве $L_2[0, 1]$ имеем $\alpha_i(x) = \int_0^1 x(t)\, a_i(t)\, dt$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, где $a_i(t)$ — некоторые фиксированные функции из $L_2[0, 1]$. Осталось показать, что $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — система линейно-независимых функций. Составим уравнение $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i a_i(t) = 0$ **(8)** и докажем, что оно выполняется лишь в случае, когда все числа γ_i равны нулю. Из (8) следует, что

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i a_i(t) \right) x(t)\, dt = 0.$$

Вместе с тем

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i a_i(t) \right) x(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int_0^1 x(t)\, a_i(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_i(x).$$

Таким образом, приходим к уравнению (7), а оно, как мы уже знаем, выполняется, только когда $\gamma_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Это означает, что функции в системе $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ линейно-независимы.

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть выполняется равенство (1). Симметричность, транзитивность и аддитивность предиката Φ очевидны. Докажем, что предикат Φ n-мерен. С этой целью запишем систему уравнений $\sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 a_i(t)\, a_k(t)\, dt \right) \alpha_i = \int_0^1 x(t)\, a_k(t)\, dt$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ **(9)** относительно неизвестных чисел α_i. Эта система уравнений ставит в соответствие каждому x из $L_2[0, 1]$ единственный набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Для того чтобы убедиться в истинности последнего утверждения, достаточно проверить, что столбцы

$$\left\| \begin{array}{c} \int_0^1 a_i(t)\, a_1(t)\, dt \\ \int_0^1 a_i(t)\, a_2(t)\, dt \\ \cdots\cdots \\ \int_0^1 a_i(t)\, a_n(t)\, dt \end{array} \right\| \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (10)$$

коэффициентов при неизвестных α_i в уравнениях (9) линейно не зависимы. Составим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^1 a_i(t)\,a_k(t)\,dt=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{11}$$

и покажем, что она выполняется лишь при одновременном равенстве нулю всех чисел γ_i. Положим $y(t)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k a_k(t)$ и скалярно умножим левую и правую части этого равенства на $y(t)$:

$$\int_0^1 y^2(t)\,dt=\int_0^1 y(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_k a_k(t)\right)dt.$$

Используя (11), находим, что правая часть последнего равенства равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\int_0^1 y(t)\,a_k(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i a_i(t)\right)a_k(t)\,dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^1 a_i(t)\right)a_k(t)\,dt=0.$$

Таким образом, $\int_0^1 y^2(t)\,dt=0$, а значит, и $y(t)=0$. Поэтому $\sum_{i=1}^{n}\gamma_k a_k(t)=0$. Поскольку функции $a_k(t)$ линейно-независимы, то все числа $\gamma_k=0$. Следовательно, столбцы (10) коэффициентов при неизвестных α_i в уравнениях (9) линейно-независимы.

Теперь проверим, что набор чисел $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ удовлетворяет условию n-мерности предиката Φ при условии, что в качестве системы функций $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ взята система $\{a_k\}_{k=1}^{n}$. Согласно (9) имеем

$$\int_0^1 x(t)\,a_k(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 a_i(t)\,a_k(t)\,dt\right)\alpha_i=$$

$$=\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i(t)\right)a_k(t)\,dt,\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда по (1) непосредственно следует, что $\Phi\left(x,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\right)=1$. Никакой другой набор чисел $(\alpha_1',\ \alpha_2',\ \ldots,\ \alpha_n')$ не удовлетворяет этому равенству. В самом деле, предположим, что $\Phi\left(x,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i' a_i\right)=1$. Согласно (1) это означает, что

$$\int_0^1 x(t)\,a_k(t)\,dt=\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' a_i(t)\right)a_k(t)\,dt.$$

Иными словами,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 a_i(t)\,a_k(t)\,dt\right)\alpha_i' = \int_0^1 x(t)\,a_k(t)\,dt \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, набор чисел $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$ является решением уравнения (9). А так как решение этого уравнения единственно, то $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n') = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Этим завершается доказательство n-мерности предиката Φ.

В соответствии с (9) числа α_i представляют собой линейные комбинации чисел $\int_0^1 x(t)\,a_k(t)\,dt$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, непрерывно зависящих от x. Следовательно, функционалы $\alpha_i(x)$ непрерывны. Этим доказывается непрерывность предиката Φ.

Теорема 1 доказана.

В некотором смысле система условий теоремы 1 является экономной, о чем свидетельствует

Теорема 2. *Свойства симметричности, транзитивности, аддитивности, n-мерности и непрерывности предиката Φ независимы.*

Доказательство. Для доказательства независимости каждого свойства от остальных достаточно привести пример предиката Φ, для которого это свойство не выполняется, а остальные свойства выполняются.

1. Симметричность. Положим $\Phi(x, y) = D(Px, Py) \wedge C\|Qy\|$, где $x,\ y \in L_2[0, 1]$; P — ортопроектор на некоторое n-мерное подпространство L пространства $L_2[0, 1]$; Q — ортопроектор на некоторое одномерное подпространство M пространства $L_2[0, 1]$, причем $L \perp M$; $C(t)$ — предикат от вещественного аргумента t, равный 1, если t — целое число, и равный 0 — в противном случае. Выберем такое x, что $C\|Qx\| = 0$, и $y = Px$. Тогда $\Phi(x, y) = \Phi(x, Px) = D(Px, P^2x) \wedge C\|QPx\| = D(Px, Px) \wedge C(0) = 1 \wedge 1 = 1$.

Однако $\Phi(y, x) = D(Py, Px) \wedge C\|Qx\| = D(Py, Px) \wedge 0 = 0$. Это означает, что предикат Φ несимметричен.

Вместе с тем предикат Φ транзитивен. Действительно, пусть $\Phi(x, y) = \Phi(y, z) = 1$. Это значит, что $D(Px, Py) \wedge C\|Qy\| = 1$ и $D(Py, Pz) \wedge C\|Qz\| = 1$. Отсюда следует $Px = Py$, $Py = Pz$, а значит, $Px = Pz$ и $C\|Qz\| = 1$. Таким образом, $\Phi(x, z) = D(Px, Pz) \wedge C\|Qz\| = 1 \wedge 1 = 1$. Нетрудно доказать также аддитивность предиката Φ. В самом деле, пусть $\Phi(x, y) = \Phi(u, v) = 1$. Тогда $Px = Py$, $Pu = Pv$, а значит, и $Px + Pu = Py + Pv$, поэтому $P(x + u) = P(y + v)$. Кроме того, $C\|Qy\| = C\|Qv\| = 1$, следовательно, $\|Qy\|$ и $\|Qv\|$ — целые числа, а значит, и $\|Qy + Qv\|$ — целое число. Поэтому $C\|Q(y+v)\| = 1$. Таким образом, $\Phi(x + u,\ y+v) = D(P(x + u),\ P(y + v)) \wedge C\|Q(y + v)\| = 1 \wedge 1 = 1$.

Докажем n-мерность и непрерывность предиката Φ. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — какой-нибудь ортонормированный базис в L. Тогда для

любого x из $L_2[0, 1]$ Px имеет единственное разложение: $Px = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i$, где $\alpha_i(x) = \int_0^1 x(t) e_i(t)\, dt$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. При этом

$$\Phi\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = D\left(Px, P\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\right) \wedge C\left\|Q\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\right\| =$$

$$= D\left(P^2 x, P\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\right) \wedge C\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q e_i\right\| = 1 \wedge C\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 0\right\| =$$

$$= 1 \wedge C(0) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Таким образом, предикат Φ n-мерен. Непрерывность предиката Φ непосредственно вытекает из непрерывности функционалов α_1, α_2, ..., α_n.

2. Транзитивность. Положим $\Phi(x, y) = D(Px + Py, 0)$, где $x, y \in L_2[0, 1]$; P — ортопроектор на некоторое n-мерное подпространство L пространства $L_2[0, 1]$. Предикат Φ нетранзитивен. Действительно, $\Phi(x, -x) = \Phi(-x, x) = 1$ для любого x из $L_2[0, 1]$, однако $\Phi(x, x) = D(2Px, 0) = 0$ для тех $x \in L_2[0, 1]$, у которых $Px \neq 0$. Вместе с тем предикат Φ симметричен. Он также аддитивен. В самом деле, предположим, что $\Phi(x, y) = \Phi(u, v) = 1$. Это означает, что $Px + Py = Pu + Pv = 0$. Отсюда следует, что $P(x + u) + P(y + v) = 0$, иными словами, $\Phi(x + u, y + v) = 1$.

Докажем n-мерность и непрерывность предиката Φ. Для произвольного $x \in L_2[0, 1]$ выберем из L функцию y такую, чтобы $\Phi(x, y) = 1$. Тогда $Py = y$, а значит, $y = -Px$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис в L. В этом случае для любого x найдется единственный набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, при котором

$$\Phi\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 1,$$

где $\alpha_i(x) = -\int_0^1 x(t) e_i(t)\, dt$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Итак, предикат Φ n-мерен. Непрерывность предиката Φ непосредственно вытекает из непрерывности функционалов $\alpha_i(x)$.

3. Аддитивность. Положим $\Phi(x, y) = D(a(x), a(y))$, где $x, y \in L_2[0, 1]$, $a(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$;

$$\alpha_i(x) = x_i\left(1 + \int_0^1 x(t)\, a(t) dt\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты проекции функции x на n-мерное подпространство L в ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$; a — ненулевая функция из ортогонального дополнения к подпространству L.

Предикат Φ неаддитивен. В самом деле, если бы он был аддитивен, то отсюда следовала бы аддитивность функционалов $\alpha_i(x)$, однако эти функционалы в силу своей нелинейности неаддитивны. Вместе с тем предикат Φ симметричен и транзитивен. Он также n-мерен. Действительно, пусть функция x произвольно выбрана из $L_2[0,1]$. Положим $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i$. Отсюда следует, что $y_i = \alpha_i(x)$. Так как $y \in L$ и $a \perp L$, то $\int_0^1 y(t)\, a(t)\, dt = 0$.

Таким образом, $\alpha_i(y) = y_i = \alpha_i(x)$. Следовательно, $\Phi(x, y) = 1$, т. е. $\Phi\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i\right) = 1$. Для любого x из $L_2[0, 1]$ набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ существует и единственен, это непосредственно вытекает из определения функционалов $\alpha_i(x)$. Предикат Φ, кроме того, непрерывен, это непосредственно следует из непрерывности функционалов $\alpha_i(x)$.

4. n-Мерность. Положим $\Phi(x, y) = D(x, y)$, где $x, y \in L_2[0, 1]$. Предикат не n-мерен, поскольку для каждого x существует лишь единственный y, удовлетворяющий условию $\Phi(x, y) = 1$, а совокупность всех y-ков совпадает со всем пространством $L_2[0, 1]$. Вместе с тем предикат Φ симметричен, транзитивен и аддитивен. Свойство же непрерывности было определено нами только для n-мерных предикатов, поэтому вопрос о выполнимости или невыполнимости этого свойства в данном случае утрачивает смысл.

5. Непрерывность. Положим $\Phi(x, y) = D(\alpha(x), \alpha(y))$, где $x, y \in L_2[0, 1]$, $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$;

$$\alpha_i(x) = \int_0^1 P(x(t))\, e_i(t)\, dt + \beta_i(Qx) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

P — ортопроектор на какое-нибудь n-мерное подпространство L из $L_2[0, 1]$; $\{e_i(t)\}_{i=1}^{n}$ — ортонормированный базис в L; Q — ортопроектор на ортогональное дополнение $L^{\perp}$ к L; $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — набор каких-либо аддитивных не непрерывных функционалов, заданных на $L^{\perp}$. Так как $L^{\perp}$ — гильбертово пространство, то такие функционалы всегда существуют. Функционалы $\alpha_i(x)$, в силу своего определения, не непрерывны, следовательно, не непрерывен и предикат Φ.

Вместе с тем предикат Φ симметричен и транзитивен. Он также аддитивен, что непосредственно вытекает из аддитивности функционалов $\alpha_i(x)$. Докажем n-мерность предиката Φ. Пусть $x \in L_2[0, 1]$. Положим $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i$. Тогда

$$\alpha_k(y) = \alpha_k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i\right) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i\right) e_k(t)\, dt =$$

$$= \alpha_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Таким образом, для любого x

$$\Phi\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, e_i\right) = 1.$$

Набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ единственен в силу определени функционалов $\alpha_i(x)$. Таким образом, предикат Φ n-мерен.

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Аксиоматическое постро ение модели цветового зрения. — Проблемы бионики, 1970, вып. 4, с. 9—12 2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.—520 с.

Поступила в редколлегию 23.11.8