

АЛГОРИТМ СРАВНЕНИЯ СКОБОЧНЫХ ФОРМ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

В. С. Блудов

Харьков

Применение функций алгебры логики к синтезу релейных и электронных схем требует проведения таких преобразований исходной формы этих функций, которые давали бы возможность синтезировать схему с минимальным количеством элементов или же с заданной степенью надежности. Преобразования эти достаточно сложны даже для узких классов функций алгебры логики и более того, как показано в работах [1] и [2], не существует общего алгоритма для всех функций алгебры логики, который приводил бы к решению задачи построения схемы с наименьшим количеством элементов.

Особенно большие трудности возникают при факторизации, т. е. при расстановке скобок с целью уменьшения числа повторений переменных в дизъюнктивной нормальной форме представления функций алгебры логики. Процесс факторизации может быть ускорен, если применить алгоритм сравнения скобочных форм.

Суть его состоит в следующем. Предположим, что задано множество переменных алгебры логики

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

и из этих переменных образованы две скобочные формы

$$F_A = (\vee x_{i_1})(\vee x_{i_2}) \dots (\vee x_{i_k}) \quad (2)$$

$$i_1 \in I_{A1}, \quad i_2 \in I_{A2}, \quad i_k \in I_{Ak},$$

$$F_B = (\vee x_{i_1})(\vee x_{i_2}) \dots (\vee x_{i_k}) \quad (2')$$

$$i_1 \in I_{B1}, \quad i_2 \in I_{B2}, \dots, \quad i_k \in I_{Bk},$$

где $I_{A1}, I_{A2}, \dots, I_{Ak} \subset I$, $I_{B1}, I_{B2}, \dots, I_{Bk} \subset I$ — подмножества множества I индексов переменных.

Задача сравнения этих форм заключается в определении всех элементарных конъюнкций, которые войдут как в первую (2), так и во вторую (2') скобочную форму после раскрытия скобок и выполнения всех действий.

Тривиальным алгоритмом, решающим эту задачу, будет алгоритм перебора всех конъюнкций, получаемых после раскрытия скобок в обеих формах. Но такое решение пригодно лишь для совсем небольшого числа переменных (не более десяти), при большем количестве переменных резко возрастает количество операций перебора. При числе переменных, например, больше 12—15 выполнение этого алгоритма становится практически невозможным.

Предлагаемый в настоящей статье алгоритм отличается от тривиального тем, что позволяет полностью исключить перебор при сравнении скобочных форм и вести сравнение их для большого числа переменных (до 200 и более).

Для элементарных дизъюнкций, входящих в скобочные формы (2) и (2'), введем следующие обозначения:

$$A_1 = (\vee x_{i_1}), \dots, A_k = (\vee x_{i_k}) \quad (3)$$

$$i_1 \in I_{A_1} \quad i_k \in I_{A_k}$$

$$B_1 = (\vee x_{i_1}), \dots, B_k = (\vee x_{i_k}) \quad (3')$$

$$i_1 \in I_{B_1} \quad i_k \in I_{B_k}$$

Назовем пересечением элементарных дизъюнкций A и B дизъюнкцию C , которая определяется соотношением

$$C = A \cap B$$

и содержит только те переменные, которые входят как в первую, так и во вторую дизъюнкцию. Например, пусть

$$A = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4,$$

$$B = x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6,$$

тогда

$$A \cap B = x_3 \vee x_4.$$

Образует из дизъюнкций (3) и (3') диагональные матрицы порядка

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{matrix} \right\| \quad (4), \quad \left\| \begin{matrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_k \end{matrix} \right\| \quad (4')$$

Введем теперь пересечение двух диагональных матриц. Это пересечение назовем матрицей, элементы которой образуются по следующему правилу:

$$C_{ij} = A_i \cap B_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, k).$$

Следовательно, пересечение матриц (4) и (4') равно

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{matrix} \right\| \cap \left\| \begin{matrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_k \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_1 \cap B_1 & A_1 \cap B_2 & \dots & A_1 \cap B_k \\ A_2 \cap B_1 & A_2 \cap B_2 & \dots & A_2 \cap B_k \\ & & \ddots & \\ A_k \cap B_1 & A_k \cap B_2 & \dots & A_k \cap B_k \end{matrix} \right\| \quad (5)$$

Возьмем произвольную квадратную матрицу порядка k с элементами из поля $\{0, 1\}$ и образуем из её элементов функцию

$$F = \vee a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ki_k}, \quad a_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (6)$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_k)$$

где дизъюнкция берется по всем перестановкам вторых индексов.

Функция (6) в работе [3] названа булевым определителем, но это название, с нашей точки зрения, неудачно, так как может вызвать в некоторых случаях путаницу. Более удачным термином будет «булев перманент», по аналогии с перманентом матрицы, элементы которой

являются элементами поля комплексных чисел [4]. Перманент матрицы комплексных чисел определяется соотношением

$$\text{per} \begin{vmatrix} z_{11} & \dots & z_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{k1} & \dots & z_{kk} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} z_{1i_1} z_{2i_2} \dots z_{ki_k}, \quad (7)$$

где сумма берется по всем перестановкам вторых индексов.

Нетрудно убедиться, что булевы перманенты матриц (4) и (4') равны самим скобочным формам (2) и (2').

Теперь, пользуясь определением булева перманента и перманента произвольной матрицы (7), сформулируем две теоремы, которые дают решение поставленной выше задачи.

Теорема 1. Булев перманент пересечения двух диагональных матриц, элементами которых являются элементарные дизъюнкции скобочных форм (2) и (2'), содержит после раскрытия скобок и выполнения всех действий только те элементарные конъюнкции, которые являются общими как для первой (2), так и для второй (2') скобочной формы.

Таким образом, эта теорема дает возможность определять общие конъюнкции, не вычисляя всех конъюнкций форм (2) и (2') и не производя их перебор.

Обозначим через $a (A_i \cap B_j) = a_{ij}$ число переменных, входящих в пересечение $A_i \cap B_j$, ($i, j = 1, 2, \dots, k$).

Используя это обозначение, можно по матрице пересечений (5) построить матрицу чисел a_{ij} , ($i, j = 1, 2, \dots, k$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Сформулируем следующую теорему, используя матрицу чисел (8).

Теорема 2. Число элементарных конъюнкций, определяемых матрицей пересечений (5), равно перманенту матрицы (8), полученной из матрицы (5) путем замены ее элементов — пересечений $A_i \cap B_j$ на числа переменных a_{ij} , входящих в эти пересечения.

Следовательно, обозначая через N_0 число общих для обеих форм (2) и (2') конъюнкций, можно написать, что

$$N_0 = \text{per} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Доказательство этих теорем приведено в приложении.

Покажем действие описанного алгоритма на примере. Предположим, что заданы следующие две скобочные формы:

$$\begin{aligned} A_1 &= x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4; & B_1 &= x_1 \vee x_5 \vee x_6; \\ A_2 &= x_5 \vee x_6 \vee x_7; & B_2 &= x_2 \vee x_8 \vee x_9 \vee x_{10}; \\ A_3 &= x_8 \vee x_9 \vee x_{10} \vee x_{11}; & B_3 &= x_3 \vee x_4 \vee x_7 \vee x_{11} \end{aligned}$$

Булев перманент матрицы пересечений элементарных дизъюнкций, входящих в эти формы, равен

$$\text{per} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \vee x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 \\ x_8 & x_9 \vee x_{10} & x_{11} \end{vmatrix} = x_1 x_6 x_{11} \vee x_2 x_7 x_8 \vee x_3 x_6 x_9 \vee x_3 x_5 x_{10} \vee \\ \vee x_4 x_5 x_9 \vee x_6 x_5 x_{10} \vee x_1 x_7 x_9 \vee x_1 x_7 x_{10} \vee x_2 x_5 x_{11} \vee x_3 x_8 x_9 \vee x_4 x_8 x_9.$$

Число элементарных конъюнкций (без их перечисления) получим, если вычислим перманент матрицы, полученной из матрицы пересечений заменой ее элементов на числа переменных, входящих в эти пересечения,

$$\text{per} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

Поскольку каждая скобочная форма данного примера содержит $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ элементарных конъюнкций, то число операций перебора для определения общих конъюнкций равно $48 \cdot 48 = 2304$.

Число операций перебора, полученное в этом примере, показывает, что даже в таком простом случае тривиальный алгоритм определения общих элементарных конъюнкций достаточно трудоемок.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Предположим, что все элементарные дизъюнкции скобочных форм (2) и (2') имеют точно по k переменных. Это предположение не нарушает общности. Если число переменных в какой-либо элементарной дизъюнкции больше k , то всегда можно выделить $k-1$ переменную, а все оставшиеся — объединить знаком дизъюнкции и ей поставить в соответствие новую переменную, которая и будет k -той переменной в рассмотренной дизъюнкции скобочной формы. Если переменных меньше, чем k , то необходимо дополнить эту дизъюнкцию фиктивными переменными.

Учитывая сделанные замечания, запишем две скобочные формы с одинаковым числом переменных в каждой элементарной дизъюнкции, применив упрощенный способ записи: при записи опустим знаки дизъюнкции, обозначения переменных и знаки произведения, будем перечислять только индексы переменных

$$\{1, 2, \dots, k\}, \{k+1, k+2, \dots, 2k\}, \dots, \{(k-1)(k+1), \dots, k^2\} \\ \{1, k+1, \dots, (k-1)(k+1)\}, \{2, k+2, \dots, (k-1)(k+2)\}, \dots, \\ \{k, 2k, \dots, k^2\}.$$

Нетрудно заметить, что общей конъюнкцией в этих формах является конъюнкция $\{1, k+2, \dots, k^2\}$. Выполняя все возможные перестановки элементарных дизъюнкций во второй скобочной форме, получим все общие конъюнкции. Очевидно, число этих конъюнкций будет равно $k!$. Булев перманент матрицы пересечений между элементарными дизъюнкциями этих двух скобочных форм образуется так же, как и описанное выделение общих элементарных конъюнкций.

Следовательно, булев перманент равен дизъюнкции всех общих элементарных конъюнкций скобочных форм (2) и (2'), что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2 следует из того, что число членов, получаемых после раскрытия скобок в (2), равно произведению чисел переменных, входящих в каждую элементарную дизъюнкцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Журавлев. О невозможности построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики в одном классе алгоритмов ДАН СССР, т. 132, № 3, 1960.
2. С. В. Яблонский. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 2. Физматгиз, 1959.
3. А. Г. Лунц. Приложение матричной булевой алгебры к анализу и синтезу релейно-контактных схем. ДАН СССР, т. 70, № 3, 1950.
4. Г. Дж. Райзер. Комбинаторная математика. Изд-во «Мир», 1966.