УДК 517.9:535

И. А. ВЯЗЬМИТИНОВ, С. С. ВЯЗЬМИТИНОВА,
В. А. РЕЗУНЕНКО, канд. физ.-мат. наук

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДИПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

В центр идеально проводящей сферы радиуса a с круговым отверстием, измеряемым полярным углом Θ_0, поместим начало декартовой и сферической систем координат. На оси oz симметрии сферы на расстоянии b от начала координат разместим электростатический диполь, момент p которого направим параллельно оси ox. Найдем потенциал диполя при наличии сферы с отверстием. Для решения задачи применим модификацию методов [1; 2], заключающуюся в новом подходе к обращению матричного оператора задачи и отысканию возникающих констант.

Потенциал φ_0 источника и потенциалы φ_1, φ_2 вторичных полей представим рядами Фурье:

$$\varphi_0 = \frac{P^{(1)}}{4\pi}\cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} F(n) P_n^1(\cos\Theta)\frac{1}{b}\begin{bmatrix} \frac{1}{r}\left(\frac{b}{r}\right)^n, & b<r, \\ \frac{1}{b}\left(\frac{r}{b}\right)^n, & b>r; \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\varphi_1 = \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n^1(\cos\Theta) r^n, \quad r<a; \quad (2)$$

$$\varphi_2 = \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n^1(\cos\Theta)\frac{1}{r^{n+1}}, \quad (3)$$

где $P^{(1)} = |\vec{P}|$; $F(n) = 1$ для диполя, размещенного выше начала координат и $F(n) = (-1)^{n-1}$ для диполя, размещенного ниже начала координат; $P_n^1(\cos\Theta)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода первого порядка степени n от аргумента $\cos\Theta$. В целях отыскания коэффициентов B_n потенциала φ_2 (3) из граничных условий устанавливаем систему функциональных уравнений для диполя, размещенного вне сферы с отверстием ($b>a$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) D_n P_n^{(1)}(\cos\Theta) = 0, \quad 0 \leqslant \Theta < \Theta_0; \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{D_n + e_n^{(1)}\} P_n^1(\cos\Theta) = 0, \quad \Theta_0 < \Theta \leqslant \pi,$$

где

$$D_n = \frac{B_n}{a_n}, \quad e_n^{(1)} = \frac{P^{(1)}}{4\pi} F(n)\frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{b}\right)^n; \; n \geqslant 1. \quad (5)$$

Решение системы (4) будем искать в гильбертовом пространстве числовых последовательностей, определяемом условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2 n^2 < \infty, \tag{6}$$

обеспечивающим требуемое поведение поля в окрестности ребра [3]. Проинтегрируем почленно каждое уравнение в (4) и, используя соотношение

$$P_n^1(\cos\Theta) = \frac{d}{d\Omega} P_n(\cos\Theta),$$

получим систему функциональных уравнений по полиномам Лежандра $P_n(\cos\Theta)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) D_n P_n(\cos\Theta) = c_1, \quad 0 \leqslant \Theta < \Theta_0; \tag{7а}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{D_n + e_n^{(1)}\} P_n(\cos\Theta) = c_2, \quad \Theta_0 < \Theta \leqslant \pi. \tag{7б}$$

В (7а), (7б) константы c_1, c_2 интегрирования подлежат определению. Воспользовавшись известным равенством

$$-(2n+1) P_n(\cos\Theta)\sin\Theta = P'_{n+1}(\cos\Theta) - P'_{n-1}(\cos\Theta),$$

где штрих обозначает дифференцирование по Θ, и проинтегрировав почленно уравнение (7а), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n |P_{n+1}(\cos\Theta) - P_{n-1}(\cos\Theta)| = c_1\cos\Theta + c_3, \quad 0 \leqslant \Theta < \Theta_0. \tag{8}$$

В уравнения (7б) и (8) подставим вместо $P_n(\cos\Theta)$ их интегральные представления Мелера—Дирихле

$$P_n(\cos\Theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\Theta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\Theta)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{(\cos\Theta - \cos\varphi)^{1/2}},$$

учтя, что $1 = P_0(\cos\Theta)$, $\cos\Theta = P_1(\cos\Theta)$.

Затем в (7б), (8) перенесем все слагаемые налево, меняя порядки суммирования и интегрирования в обоих уравнениях и объединяя все слагаемые под знаком одного интеграла, получаем вместо сумматорных уравнений интегральные уравнения типа Абеля [4]:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\varphi)\, d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\Theta)^{1/2}} = 0; \quad \int_{\Theta}^{\pi} \frac{g(\varphi)\, d\varphi}{(\cos\Theta - \cos\varphi)^{1/2}} = 0.$$

Эти уравнения имеют единственные нулевые решения:

$$f(\varphi) = 0, \ 0 \leqslant \varphi < \Theta_0; \quad g(\varphi) = 0, \ \Theta_0 < \varphi \leqslant \Pi. \tag{9}$$

Записывая явный вид $f(\varphi)$ и выполняя линейные преобразования вместо уравнения $f(\varphi)=0$ (9) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi \sin\varphi = -\frac{1}{2} c_1 \cos\frac{3}{2}\varphi - \frac{1}{2} c_3 \cos\frac{1}{2}\varphi,$$
$$0 \leqslant \varphi < \theta_0. \qquad (10)$$

Упростим уравнение (10). Для этого покажем, что константы c_1 и c_3 связаны соотношением $c_1+c_3=0$. Действительно, в силу принадлежности коэффициентов D_n (10) гильбертовому пространству l_2, ряд в (10) сходится на $[0, \Pi]$ и имеет непрерывную сумму. Поэтому устремим переменную φ в (10) к нулю и получим требуемое соотношение для c_1, c_3. Исключим константу c_3 из (10), подставив вместо c_3 равную ей константу $-c_1$. Приведя разность $\cos 3/2\varphi$ и $\cos 1/2\varphi$ к виду, удобному для логарифмирования, получим вместо (10) следующее уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_a \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi = c_1 \sin\frac{1}{2}\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi\Theta_0. \qquad (11)$$

Рассмотрим уравнение $g(\varphi)=0$ из (9). Преобразовав его аналогично уравнению для $f(\varphi)$, запишем это уравнение так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi = c_2 \sin\frac{1}{2}\varphi - \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)} \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\varphi,$$
$$\Theta_0 < \varphi \leqslant \pi. \qquad (12)$$

Ряды в (11), (12) допускают почленное дифференцирование. Выполнив дифференцирование, устанавливаем эквивалентную исходной системе (4) систему функциональных уравнений по элементарным функциям, которую представим следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2} c_1 \cos\frac{1}{2}\varphi, & 0 \leqslant \varphi < \Theta_0; \\ \frac{1}{2} c_2 \cos\frac{1}{2}\varphi - \sum\limits_{m=1}^{\infty} e_a^{(1)}\left(m+\frac{1}{2}\right)\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\varphi, & \Theta_0 < \varphi \leqslant \pi. \end{cases} \qquad (13)$$

В (13) слева и справа содержатся ряды Фурье в l_2 по ортогональной на $[0, \Pi]$ системе функций. Считая правую часть в (13) известной функцией, обратим левую часть и получим

$$D_n = \left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\left\{\frac{1}{2}\beta_{n,0}(c_1-c_2) - \right. \qquad (14)$$
$$\left. -\sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)}\left(m+\frac{1}{2}\right)[\pi\delta_{n,m}-\beta_{n,m}]\right\}, \quad n=1,2,3\ldots,$$

где

$$\beta_{n,m} = \frac{\sin(n-m)\Theta_0}{n-m} + \frac{\sin(n+m+1)\Theta_0}{n-m};$$

$$\left.\frac{\sin(n-m)\Theta_0}{n-m}\right|_{n-m} = \Theta_0; \quad (15)$$

$\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

Найдем константы c_1, c_2. Для этого построим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Умножая левые и правые части (13) на $\cos(\varphi/2)$ и интегрируя по аргументу φ на соответствующих интервалах изменения φ, получим первое уравнение системы. Второе уравнение системы выведем из (11), (12). Для этого умножим левые и правые части (11), (12) на $\sin(\varphi/2)$ и проинтегрируем по φ. Сложив левые и правые части проинтегрированных уравнений, получим второе уравнение системы. В итоге система приобретает вид

$$\begin{aligned} c_1\beta_{0,0} + c_2\,|\pi - \beta_{0,0}| &= -\sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)}(2m+1)\beta_{m,0}; \\ c_1\alpha_{0,0} + c_2\,|\pi - \alpha_{0,0}| &= -\sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)}\alpha_{m,0}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\sigma_{n,m} = \frac{\sin(n-m)\Theta_0}{n-m} - \frac{\sin(n+m+1)\Theta_0}{n+m+1}. \quad (17)$$

Из (16) следует, что при $\Theta_0 = 0$ или $\Theta_0 = \Pi$ константы c_1, c_2 равны нулю. Если $\Theta_0 \neq 0$, $\Theta_0 \neq \Pi$, то определитель матрицы системы (16) отличен от нуля и система имеет нетривиальное единственное решение. Найдя это решение, запишем для (14) разность констант c_1, c_2:

$$c_1 - c_2 = (2\sin\Theta_0)^{-1}\sum_{m-1}^{\infty} e_m^{(1)}\,[\alpha_{m.0} - (2m+1)\beta_{m.0}]. \quad (18)$$

Подставим (18) в (14), в итоге получим явное решение системы функциональных уравнений (4) по присоединенным функциям Лежандра $P_n^1(\cos\Theta)$:

$$D_n = [\psi(2n+1)]^{-1} \times \quad (19)$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)}\,\{t_{m.0}\beta_{n.0} - (2m+1)\,[\pi\delta_{n.m} - \beta_{n.m}]\},$$

где

$$t_{m.0} = \frac{\alpha_{m.0} - (2+1)\ \beta_{m.0}}{\sin\Theta_0};$$

$e_m^{(1)}$ введено в (5); $\beta_{m.0}$ — (15); $\alpha_{n.m}$ — (17).

Этим завершено полное обращение матричного оператора задачи. Отметим, что в классических работах, например [5], матричные операторы родственных задач обращаются частично и решение задачи сводится к исследованию интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Ряд в (19) сходится достаточно быстро для любых значений параметров Θ_0, a, b $(a < b)$, что позволяет эффективно численно и аналитически исследовать любые характеристики структуры.

Для аналитических выкладок удобно использовать асимптотическую оценку искомых коэффициентов D_n (19) при $n \to \infty$:

$$D_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\Theta_0}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} C(a, b, \Theta_0) + o(n^{-2}). \tag{20}$$

В (20) множитель $C(a, b, \Theta_0)$ не зависит от n, является непрерывной функцией от Θ_0 и имеет вид

$$C(a, b, \Theta_0) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{(1)} \left[t_{m.0} \cos\frac{1}{2}\Theta_0 + (2m+1)\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\Theta_0\right].$$

Коэффициенты D_n, через которые выражены в (5) коэффициенты B_n потенциала φ_2, связаны простыми соотношениями с коэффициентами A_n потенциала φ_1 внутри сферы:

$$A_n = D_n a^{-o-1} + e_n^{(1)} a^{-n}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots . \tag{21}$$

Применяя (20), (21) для отыскания распределения поверхностной плотности заряда и опуская громоздкие преобразования, находим, что с точностью до непрерывной функции поверхностная плотность заряда пропорциональна величине $(\Theta - \Theta_0)^{\frac{-1}{2}}$, $\Theta > \Theta_0$. Отсюда следует, в частности, выполнение условия на ребре.

Рассмотрим задачу о диполе, размещенном внутри сферы с отверстием ($a > b$). Задавая потенциал источника и вторичные потенциалы согласно (1)—(3), получаем для отыскания коэффициентов $\tilde{D}_n$ из граничных условий систему функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \{(2n+1)\tilde{D}_n - (2n+1)e_n^{(0)}\} P_n^1(\cos\Theta) = 0, \quad 0 \leqslant \Theta < \Theta; \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_n P_n^1(\cos\Theta) = 0, \qquad \Theta_0 < \Theta \leqslant \pi, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\tilde{D}_n = \frac{B}{a^{n+1}}; \quad e_n^{(0)} = \frac{P(1)}{4\pi} F(n) \frac{1}{b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}. \tag{23}$$

Решение системы (22) ищем в пространстве $\tilde{l}_2$ (6).

Обращая матричный оператор задачи аналогично задаче о диполе вне сферы, получаем явное решение системы функциональных уравнений (22):

$$\tilde{D}_n = \left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(0)} \{t_{m.0}\beta_{n.0} + (2m+1)\beta_{n.m}\}. \tag{24}$$

Это решение так же эффективно для исследования задачи, как и в предыдущем случае.

Как и выше, между коэффициентами потенциалов внутри и вне сферы φ_2 имеет место линейное соотношение, аналогичное (21)

$$A_n = \tilde{D}_n a^{-n} - e_n^{(0)} a^{-d}, \; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (25)$$

Если диполь, в частности, размещен в центре сферы, то согласно (23), (24) находим коэффициенты D_n потенциала φ_2 (3) вне сферы с отверстием:

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{p^{(1)}}{4\pi} \cdot \frac{1}{2}\{t_{1.0}\beta_{n.0} + 3\beta_{n.1}\}.$$

При этом соотношение (25) приобретает вид

$$A_1 = \tilde{D}_1 a^{-1} - \frac{p^{(1)}}{4\pi} a^{-3}; \quad A_n = \tilde{D}_n a^{n-}, \; n \geqslant 2.$$

Метод обращения матричного оператора электростатической задачи, развитый в работе, успешно применим также и для решения соответствующих задач магнитостатики.

Список литературы: 1. *Радин А. М., Ревуненко В. А., Шестопалов В. П.* Излучение волн сферой с отверстием//Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1977. 17. № 2. С. 394—406. 2. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. К., 1983. 252 с. 3. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М., 1974. 327 с. 4. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения М., 1960. 299 с. 5. *Collins W. D.* On same dual series equations anl their application to electrostatic problems far spheroidal caps,— «Proc. Camb. Phil. Sac.». 1961. 57, P. 367—384.