УДК 519.6

О.М. Литвин[1], І.С. Томанова[2]

[1,2] Українська Інженерно-Педагогічна Академія, м. Харків, Україна

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВЯЗАННЯ БІГАРМОНІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИПУКЛОГО БАГАТОКУТНИКА ЗА ДОПОМОГОЮ СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ НА ТРИКУТНІЙ СІТЦІ ВУЗЛІВ

В роботі наведені явні формули для знаходження всіх двадцяти одного параметру інтерполяційного поліному п'ятого степеня. Розглянуто використання явних формул для сплайнів 5-го степеня на трикутній сітці вузлів для розв'язання бігармонічної задачі для жорстко защемленої багатокутної випуклої пластини з рівномірним навантаженням. Наведено алгоритм побудови сплайнів п'ятого степеня для розв'язання бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини. Проведено серію обчислювальних експериментів для розбиття області дослідження на вісім та тридцять два трикутника. Результати проведених обчислювальних експериментів порівнюються з аналогічними результатами, отриманими за допомогою використання R-функцій, описаних в роботах Рвачова В.Л.

СПЛАЙНИ 5-ГО СТЕПЕНЯ, БІГАРМОНІЧНА ЗАДАЧА, ПЛАСТИНА СКЛАДНОЇ ФОРМИ, РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНЕ НАВАНТАЖЕННЯ, R-ФУНКЦІЇ, ВИПУКЛИЙ БАГАТОКУТНИК

Вступ

Сплайни п'ятого степеня на трикутній сітці дають точну оцінку, але їх складно обчислювати, за рахунок того що для кожного трикутного елемента треба знаходити 21 коефіцієнт. У роботі [1] за допомогою явних формул, були побудовані сплайни 5-го степеня, які роблять обчислення значно простіше.

Теорія R-функції використовується при розв'язанні широкого класу задач, наприклад теорії пружності, теорії теплопровідності, машинній графіці та інших областях. R-функції описують границі складної області у вигляді єдиного аналітичного виразу. Застосування такого підходу вимагає значних обчислювальних витрат.

В основі структурних формул, що описують область, лежать побудовані за допомогою R-операцій функції. Які можуть мати складну структуру, а для обчислення інтегралів від них по області нестандартної форми необхідно використовувати квадратурні формули з високим порядком точності.

У даній роботі основною метою є розробка та дослідження схеми метода скінченних елементів (МСЕ) для розв'язання задач про згин жорстко защемленої пластини у вигляді випуклого багатокутника з використанням явних формул для сплайнів п'ятого степеня запропонованих в роботі [1]. Проведено аналіз отриманого результату обчислювального експерименту і порівняння з відомими результатами знайденими з використаннями R-функцій.

1. Аналіз останніх публікацій

В роботах [1, 2] було розглянуто метод побудови інтерполяційного поліном 5-го степеня

$$P_5(x,y)=\sum_{0\le|\beta|\le 5} a_\beta x^{\beta_1} y^{\beta_2},\ |\beta|=\beta_1+\beta_2,\ \beta=(\beta_1,\beta_2)$$

та доведено вимоги

$$D^\alpha f(A_1)=D^\alpha P_5(A_1),$$

$$i=\overline{1,3},\ 0\le|\alpha|\le 2,$$

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}},\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}}=\left.\frac{\partial P_5}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}},\ (i,j)\in\{(1,2),(2,3),(3,1)\},$$

де υ_{ij} — нормаль до сторони, що з'єднує вершини A_i та A_j, точка $M_{ij}=\left(\frac{x_i+x_j}{2},\frac{y_i+y_j}{2}\right)=(x_{ij},y_{ij})$ — середина цієї сторони. Ці умови є достатніми для знаходження вказаних 21 коефіцієнта α_β, $0\le|\beta|\le 5$.

Похідна по внутрішній нормалі υ_{ij} визначається за формулою:

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}=\frac{sign(\Delta_{kij})}{|A_i,A_j|}\left[(y_i-y_j)\frac{\partial f}{\partial x}-(x_i-x_j)\frac{\partial f}{\partial y}\right],$$

$$|A_i,A_j|=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2},\ \Delta_{kij}=\begin{vmatrix} x_k & y_k & 1\\ x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\end{vmatrix}.$$

В роботі [1] доведено, що функція:

$$h_{k\beta}(x,y)=\frac{(x-x_k)^{\beta_1}(y-y_k)^{\beta_2}}{\beta_1!\beta_2!}\omega_{ij}^3(x,y)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\omega_{ij}^3(x,y)}\right\}_{(x_k,y_k)}^{(2-|\beta|)},$$

де

$$\omega_{ij}(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\end{vmatrix},$$

$$\{g(x,y)\}_{(x_k,y_k)}^{(m)}=\sum_{0\le|\gamma|\le m}\Big[(D^\gamma g)(x_k,y_k)\times$$

$$\times\frac{(x-x_k)^{\gamma_1}(y-y_k)^{\gamma_2}}{\gamma_1!\gamma_2!}\Big],$$

$$i,j,k\in\{1,2,3\},\ i\ne j\ne k,$$

має такі властивості

$$\left.D^\alpha h_{k\beta}\right|_{A_l}=\delta_{k,l}\delta_{\alpha,\beta};\ l,k\in\{1,2,3\},\ \delta_{\alpha,\beta}=\delta_{\alpha_1,\beta_1}\delta_{\alpha_2,\beta_2},$$

де δ_{ij} — символ Кронекера.

Також функція[1]:

$$H_{ij}(x,y)=\frac{\omega_{ik}^2(x,y)\omega_{jk}^2(x,y)\omega_{ij}(x,y)sign(\Delta_{kij})}{\omega_{ik}^2(x_{ij},y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij},y_{ij})\left|A_iA_j\right|},$$

має властивості

$$D^{\alpha}H_{ij}\Big|_{A_k}=0\ ,\ 0\le|\alpha|\le 2\ ,\ k\in\{1,2,3\}\ ,\ k\ne i,j\ .$$

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial \upsilon_{ij}}=1\ ,\ \frac{\partial H_{ij}}{\partial \upsilon_{ij}}\Bigg|_{M_{mn}}=0\ ,\ (i,j)\ne(m,n)\ ;\ (i,j),(m,n)\in Q$$

$$\omega_{ik}(x_i,y_i)=0\ ,\ \omega_{ik}(x_k,y_k)=0$$

$$\omega_{ik}(x,y)=\begin{vmatrix} x-x_k & y-y_k & 0\\ x_i-x_k & y_i-y_k & 0\\ x_k & y_k & 1\end{vmatrix}.$$

Для кожної функції $f(x,y)\in C^2(\overline{T_{ijk}})$ [1] оператор

$$S_5 f(x,y)=w(x,y)+\sum_{(i,j)\in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}-\frac{\partial w}{\partial \upsilon_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}}H_{ij}(x,y)$$

$$w(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2}D^{\beta}f(A_i)h_{i\beta}(x,y)$$

$$D^{\alpha}S_{\partial}f\Big|_{A_p}=D^{\alpha}f\Big|_{A_p}\ ,\ p\in\{1,2,3\},$$

$$0\le|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2\le 2$$

визначає поліном 5-го степеня із властивостями

$$\frac{\partial^{\beta}S_5 f}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}(A_{ij})=\frac{\partial^{\beta}f}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}(A_{ij})$$

2. Формулювання бігармонічної задачі

Задача про згин та коливання жорстко защемлених пластин полягає в інтегруванні бігармонічного рівняння. Постановка задачі[2]

$$D(\Delta\Delta W)=f(x,y)$$

при крайових умовах

$$W\big|_{\partial G}=0\ ,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}\bigg|_{\partial G}=0,\ \frac{\partial W}{\partial y}\bigg|_{\partial G}=0.$$

Для обчислювального експерименту оберемо багатокутну область (рис. 1), яка за допомогою R-функцій записується у вигляді:

$$\psi(x,y)=f_1\wedge f_2\wedge f_3\wedge f_4\wedge f_5\ .$$

Рис. 1. Загальний вигляд пластини

В роботах [3, 4] була представлена структура розв'язку такої задачі у вигляді:

$$W=\psi^2\Phi\ .$$

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y})\approx\sum_{i=1}^{n}a_i\Phi_i(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

$\Phi_i(\mathrm{x},\mathrm{y})$ — координатні функції, які задовольняють крайовим умовам, a_i — невизначені коефіцієнти, які знаходяться з умови мінімуму відповідного функціоналу [4]:

$$I=\iint_{\Omega}((\Delta W)^2-2Wf(x,y))dxdy$$

Функції $f_i,(i=1,2,3,4,5)$ визначаються наступними аналітичними виразами:

$$f_1=\frac{-x(y_2-y_1)+y(x_2-x_1)-y_1x_2+x_1y_2}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}\ge 0\ ,$$

$$f_2=\frac{-x(y_3-y_2)+y(x_3-x_2)-y_2x_3+x_2y_3}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}\ge 0\ ,$$

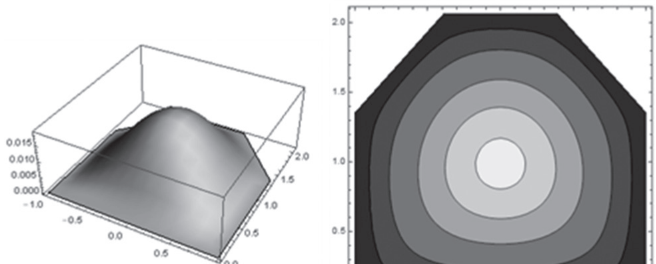
$$f_3=\frac{-x(y_4-y_3)+y(x_4-x_3)-y_3x_4+x_3y_4}{\sqrt{(y_4-y_3)^2+(x_4-x_3)^2}}\ge 0\ ,$$

$$f_4=y\ge 0\ ,\ f_5=\frac{1-x^2}{2}\ge 0\ .$$

Розв'язок такої задачі з використанням R-функцій було отримано в роботі [4].

Максимальне значення наближеного розв'язку досягається в точці (0,1) та дорівнює 0,01875.

На рис. 2 наведено загальний вигляд та лінії рівня такого розв'язку.



а *б*

Рис. 2. Розв'язок бігармонічної задачі за допомогою R-функцій (а — графік розв'язку, б — лінії рівня)

3. Алгоритм побудови сплайнів 5-го степеня для розв'язання бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини

Наведемо алгоритм побудови сплайнів 5-го степеня для розв'язання бігармонічної задачі жорстко защемленої пластини на області G:

1. Розбиваємо область G на систему не вироджених трикутників, які задаються набором з трьох точок вигляду: (x_i,y_i), $i=\overline{1,M}$, які є вершинами трикутників розбиття області G. Трикутник T_{ijk}, $i,j,k\in\{1,2,...,M\}$, $i\ne j\ne k$.

В результаті такого розбиття задана область G буде розбита на N трикутників.

2. Введемо лінійну нумерацію параметрів. Невідомі параметри $c_k = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$, які відповідають функціям базисних поліномів 5го степеня ввівши $h_{0,0}, h_{1,0}, h_{0,1}, h_{2,0}, h_{1,1}, h_{0,2}$ відповідно, для кожної з вершин трикутників. Причому для вершин трикутників, які знаходяться в вершинах області G цей вектор матиме вигляд $(0,0,0,0,c_5,0)$, для вершин, які знаходяться на границях області G, паралельних осі $Ox - (0,0,0,0,c_5,c_6)$, а для вершин, які знаходяться на границях області G, паралельних осі $Oy - (0,0,0,c_4,c_5,0)$ в силу граничних умов. Для інших вершин цей вектор матиме загальний вигляд $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$.

3. Продовжуємо лінійну нумерацію для невідомих параметрів, які відповідають функціям базисних поліномів 5-го степеня при нормалях до середин сторін трикутників. Згідно з граничною умовою, якщо точка $M_{ij} \in \partial G$, то константу в цій точці покладемо рівній нулю.

В результаті пунктів 2 та 3 отримаємо набір з K невідомих параметрів.

4. Використавши поліноми отримані на трикутнику можна записати кусково-поліноміальну функцію, яка на кожному із трикутників розбиття матиме наступний вигляд:

$$S^{ijk}{}_5(x,y) = w(x,y) + \sum_{i=1}^{3} \left(c_i - \frac{\partial w}{\partial \upsilon} \right)\Bigg|_{M_{ij}} \cdot H_{i,\beta}(x,y),$$

де $w(x,y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{0 \le |\beta| \le 2} c_{i,\beta} \cdot h_{i,\beta}(x,y)$.

5. Використовуємо отримані сплайни для знаходження інтегралів вигляду:

$$I_k = \int_{T_{ijk}} \left[\left(\frac{\partial^2 S_k(x,y)}{\partial x^2} \right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 S_k(x,y)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S_k(x,y)}{\partial y^2} \right)^2 - 2f(x,y) S_k(x,y) \right] dxdy$$

6. Запишемо функціонал $I = I(c)$ вигляду:

$$I = \sum_{k=1}^{N} I_k$$

7. Мінімізуємо отриманий функціонал I за змінними c. За допомогою необхідної умови екстремуму, знаходимо оптимальні значення констант, розв'язавши наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0,\ i = \overline{1,K}$$

8. Підставляємо отримані значення у сплайн і отримуємо наближений розв'язок бігармонічного рівняння для жорстко защемленої пластини на області G відповідний заданому розбиттю на трикутники.

4. Приклад розв'язання крайової задачі про згин пластини

Розв'язуємо задачу про згин жорстко защемленої багатокутної пластини. Результати всіх прикладів були отримані за допомогою системи комп'ютерної математики.

Приклад 1. Розбиття області на вісім трикутників.

Ділимо область G на вісім трикутників за схемою, наведеною на рис. 3.

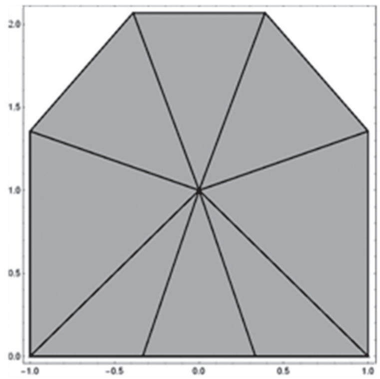


Рис. 3. Розбиття області на 8 трикутників

Згідно наведеного вище алгоритму розміщуємо невідомі параметри для сплайну. Для розбиття, наведеного на рис. 3, кількість невідомих параметрів дорівнюватиме 16.

Знаходимо поліном на кожному трикутнику. Інтегруємо отримані поліноми по кожному із трикутників та сумуємо отримані інтеграли.

Невідомі параметри знаходимо з умови мінімуму функціоналу I. Для цього розв'язуємо систему рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0,\ i = \overline{1,16}.$$

В результаті отримаємо наступний набір параметрів:

$$c_1 = 0.00584571,\ c_2 = 0.153344,\ c_3 = 0.0175757,$$

$$c_4 = -0.0738014,\ c_5 = -0.000285686,$$

$$c_6 = -0.129018,\ c_7 = 0.15346,\ c_8 = -0.00560892,$$

$$c_9 = -0.00176131,\ c_{10} = -0.0000245468,$$

$$c_{11} = -0.00180365,\ c_{12} = -0.0000271036,$$

$$c_{13} = 0.0031394,\ c_{14} = -0.00205704,$$

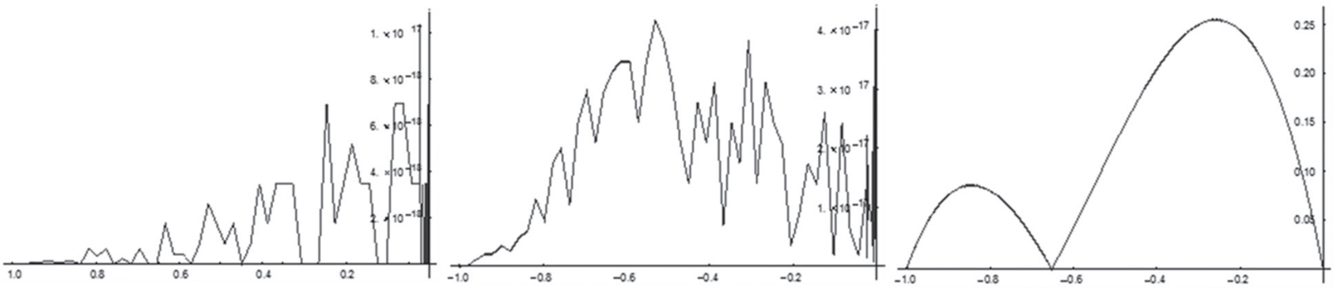
$$c_{15} = -0.00210907,\ c_{16} = 0.00310447,$$

Підставляємо отримані константи в поліноми.

Перевірка показала, що сплайн є неперервним разом із своїми нормальними похідними першого порядку.

На рис. 4 наведені графіки різниць між першим та другим трикутником.

Різниця між ними мала порядок $O(10^{-17})$ для різниці функцій, $O(10^{-17})$ для різниці перших



а *б* *в*

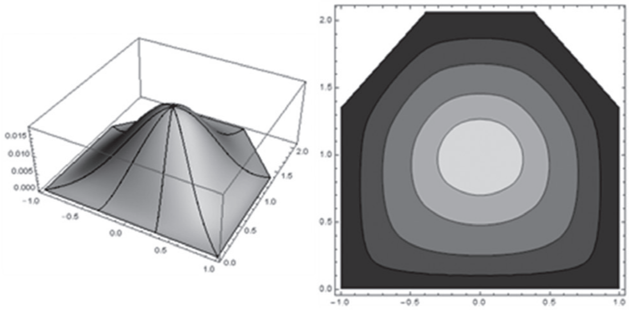
Рис. 4. Перевірка неперервності сплайнів на границі між трикутниками:
а — модуль різниці між значеннями сплайнів, *б* — модуль різниці між першими похідними по нормалі від сплайнів, *в* — модуль різниці між другими похідними по нормалі від сплайнів

похідних по нормалі, що дозоляє нам стверджувати, що теоретичне твердження про належність сплайнів до класу $C^1(G)$ виконується для побудованого наближеного розв'язку.

Максимальне значення наближеного розв'язку досягається в точці (0,1) та дорівнює 0,01757.

Різниця між наближеними розв'язками, отриманими за допомогою R-функцій та за допомогою сплайнів п'ятого степеня, становить 0.00118.

Графік наближеного розв'язку у вигляді сплайну представлений на рис. 5.



а *б*

Рис. 5. Графік наближеного розв'язку бігармонічної задачі за допомогою сплайнів 5-го степеня при розбитті на 8 трикутників
(*а* – графік розв'язку, *б* – лінії рівня)

Приклад 2. Розбиття області на тридцять два трикутника.

Ділимо область G на тридцять два трикутника за схемою, наведеною на рис. 6.

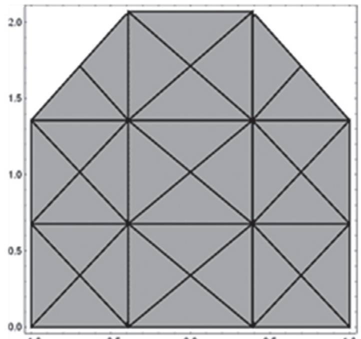
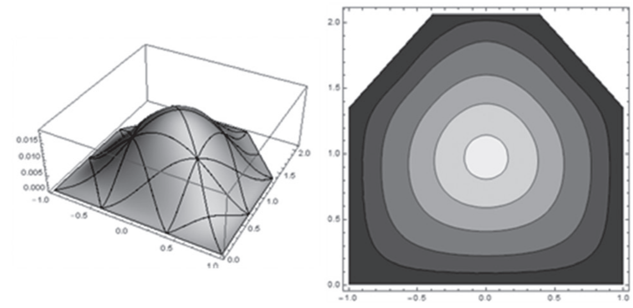


Рис. 6. Розбиття області на 32 трикутника

Максимальне значення наближеного розв'язку досягається в точці (0,1) та дорівнює 0,01859. Максимальна різниця між наближеним розв'язком, отриманим в роботі В.Л. Рвачова, та наближеним розв'язком-сплайном становить 0,000118.

Графік наближеного розв'язку у вигляді сплайну наведений на рис. 7.

Порівнюючи розв'язки знайдено максимальне значення похибки взявши крок 0,01 по всій області. Максимальна різниця між наближеним розв'язком, отриманим за допомогою R-функцій В.Л. Рвачова та отриманим наближеним розв'язком-сплайном становить 0,001185.



а *б*

Рис. 7. Графік наближеного розв'язку бігармонічної задачі за допомогою сплайнів 5-го степеня при розбитті на 32 трикутників
(*а* – графік розв'язку, *б* – лінії рівня)

Результати проведених обчислювальних експериментів та їх порівняння із розв'язком, отриманим за допомогою R-функцій В.Л. Рвачова наведені у табл. 1.

Висновки

В роботі запропоновано схема розв'язання бігармонічної задачі для багатокутної випуклої пластини у випадку граничних умов, які відповідають умовам жорсткого защемлення пластини у вигляді сплайна 5го степеня, який забезпечує належність наближеного розв'язку класу $C^1(G)$.

Сплайни п'ятого степеня дають більш точну оцінку, але вони рідше застосовуються у зв'язку зі складністю обчислення. Вперше було запропоновані формули для побудови полінома п'ятого степеня у роботі [1]. Це дало можливість застосувати поліноми для бігармонічної задачі, які не застосовувалися раніше.

Таблиця 1

Результати проведення обчислювального експерименту

Кількість елементів	Кількість невідомих коефіцієнтів	Значення в центрі наближеного розв'язку за допомогою R-функцій	Значення в центрі наближеного розв'язку	Максимальна похибка $\max\limits_{(x,y)\in G}\lvert S_R(x,y)-S_5(x,y)\rvert$
8	16	0,01875	0.01757	0.00118
32	115		0.01859	0.000118

Був проведений експеримент, який порівнює наближений розв'язок, отриманий за допомогою R-функцій із поліномами, які були отримані за допомогою явних формул для сплайнів п'ятого степеня [1] на багатокутній області. В якості наближеного розв'язку з яким порівнювали отриманні дані був взятий розв'язок з роботи [3]. Область була розбита на вісім та тридцять два трикутника. При збільшенні трикутників розбиття спостерігається зменшення похибки.

Список літератури:

1. *Сергиенко, И.В.* Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике / И.В Сергиенко, О.Н.Литвин, О.О. Литвин, О.И. Денисова. – Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Том 50, № 5. – С. 17–33. **2.** *Zlamal, M.* Matematical aspect of the finite element method / M. Zlamal, A. Zenesek, V. Kolar, J. Kratochvil // Technical physical and mathematical principles of the finite element method. – 1971. – P.15–39. **3.** *Рвачев В.Л.,* Курпа Л.В, Склепус Н.Г, Учишвили Л.А. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы – Киев: Наук. думка, 1973. – 121 с. **4.** *Рвачев В.Л.* R-функции в задачах теории пластин / В.Л Рвачев, Л.В. Курпа. – Киев: Наук. думка, 1987. – 176 с.

Надійшла до редколегії 14.03.2017.