Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування апарату теорії нечітких множин для розв’язання задачі про максимальний потік
(тема)

Виконав:
здобувач _2_ року навчання, групи _САУм-23-1
Спичак П.О.
(прізвище, ініціали)
Спеціальність
124 Системний аналіз
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Системний аналіз і управління
(повна назва освітньої програми)
Керівник доц. Матвієнко О.І.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ ____________ Сидоров М.В.
(підпис) (прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра прикладної математики
Рівень вищої освіти другий (магістерський)
Спеціальність 124 Системний аналіз
(код і повна назва)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма Системний аналіз і управління
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ ____________
(підпис)
“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Спичак Поліні Олександрівні
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування апарату теорії нечітких множин для розв’язання задачі про максимальний потік

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1278 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель із нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій для задачі про максимальний потік у транспортній мережі

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
   1. Системний аналіз предметної області
   2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
   3. Програмна реалізація
   4. Результати обчислювального експерименту
   5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп’ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Системний аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2024 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 грудня – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання _25_ листопада 2024 р.

Здобувач ____________________________________
(підпис)

Керівник роботи __________________ доц. Матвієнко О.І.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 86 с., 6 табл., 10 рис., 1 дод., 12 джерела.

МАКСИМАЛЬНИЙ ПОТІК, НЕЧІТКІ МНОЖИНИ, АЛГОРИТМ ЕДМОНДСА-КАРПА, МЕТОД ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА, ДЕТЕРМІНАЦІЯ, ТРАНСПОРТНА МЕРЕЖА.

Об’єкт дослідження – транспортна мережа міста Харків, яка описується у вигляді орієнтованого графа з нечітко заданими пропускними здатностями каналів (вулиць, доріг, магістралей).

Мета роботи – розроблення та експериментальне підтвердження методів розв’язання задачі про максимальний потік у транспортній мережі з нечітко заданими пропускними здатностями. Зокрема, планується порівняти ефективність алгоритмів Едмондса-Карпа та Форда-Фалкерсона з урахуванням нечіткого характеру вхідних даних.

Методи дослідження:

а) алгоритми пошуку максимального потоку (Едмондса-Карпа та Форда-Фалкерсона) для визначення ефективності знаходження сумарного потоку у мережі;

б) методи детермінації для переходу від нечітких значень до конкретних (чітких) оцінок пропускної здатності.

Під час виконання дослідження було застосовано апарат теорії нечітких множин для відображення невизначеностей у пропускній здатності комунікаційних каналів транспортної мережі міста Харків. Зокрема, кожне транспортне ребро мережі описувалося трикутним нечітким числом, що дає змогу моделювати діапазон можливих пропускних здатностей.

На підставі обраної моделі було досліджено та реалізовано два алгоритми для обчислення максимального потоку: метод Едмондса-Карпа й метод Форда-Фалкерсона. Унікальність та новизна дослідження полягає в поєднанні класичних алгоритмів теорії графів зі способом подання вхідних даних у вигляді нечітких чисел. Це дозволяє оцінювати оптимальні маршрути потоків у великому транспортному графі із суттєвою невизначеністю початкових параметрів.

У ході числових експериментів було продемонстровано, що при різних сценаріях нечіткості (різних рівнях α та інтервалах пропускних здатностей) обидва алгоритми виявляють єдиний максимально досяжний потік, проте метод Едмондса-Карпа зазвичай досягає результату меншим числом ітерацій та дає більш передбачувані показники часу виконання.

Результати роботи можуть бути використані для:

а) міського планування та оптимізації дорожньої інфраструктури Харкова, зокрема під час ухвалення рішень про пріоритетність розширення/реконструкції окремих вулиць;

б) розподілу транспортних ресурсів або пасажиропотоків під час години пік, коли реальна пропускна здатність вулиць не є заздалегідь точно відомою (через ремонтні роботи, затори, тощо).

Основна сфера застосування – оптимізація міських транспортних систем в умовах неповної чи неточної інформації про інтенсивність руху. Також цей підхід може бути поширено на телекомунікаційні мережі, логістичні ланцюжки постачання та інші складні системи з невизначеностями.

Запропоноване дослідження є важливим кроком на шляху до підвищення точності та практичної придатності алгоритмів максимального потоку в реальних умовах. Застосування нечітких множин дозволяє враховувати варіації й можливі відхилення у пропускній здатності, що сприяє виробленню більш надійних та гнучких рішень у міському транспортному господарстві.

Таким чином, використання апарату теорії нечітких множин для моделювання пропускної здатності вулиць міста Харкова та обчислення максимального потоку двома алгоритмами дає нові можливості для системного аналізу складних транспортних процесів. Застосовані методи та отримані результати підтвердили дієвість такого поєднання та визначили шляхи для подальшого вдосконалення моделей і програмних засобів.

ABSTRACT

Introductory note: 86 pages, 6 tables, 10 figures, 1 appendixes, 12 sources.

MAXIMUM FLOW, FUZZY SETS, EDMONDS-KARP ALGORITHM, FORD-FULKERSON METHOD, DETERMINATION, TRANSPORTATION NETWORK.

Object of research – the transportation network of the city of Kharkiv, represented as a directed graph with fuzzy-defined channel capacities (streets, roads, highways).

Purpose of work – to develop and experimentally validate methods for solving the maximum flow problem in a transportation network with fuzzy-defined channel capacities. Specifically, the study aims to compare the efficiency of the Edmonds-Karp and Ford-Fulkerson algorithms, considering the fuzzy nature of the input data.

Methods of research:

a) maximum flow search algorithms (Edmonds–Karp and Ford–Fulkerson) to evaluate the efficiency of determining total flow in the network;

b) determinization methods to transition from fuzzy values to specific (crisp) estimates of channel capacities.

The research employs the apparatus of fuzzy set theory to model uncertainties in the channel capacities of Kharkiv transportation network. Each transportation edge is described by a triangular fuzzy number, enabling the modeling of a range of possible capacities.

Based on the chosen model, two algorithms were developed and implemented for computing maximum flow: the Edmonds-Karp method and the Ford-Fulkerson method. The uniqueness and novelty of the study lie in combining classical graph theory algorithms with fuzzy number-based input representation. This approach allows for the evaluation of optimal flow routes in a large-scale transportation graph with significant initial parameter uncertainty.

Numerical experiments demonstrated that under various fuzziness scenarios (different α-levels and capacity intervals), both algorithms identified a single maximum achievable flow. However, the Edmonds-Karp method generally achieved results with fewer iterations and more predictable execution time.

Results of the study can be applied to:

a) urban planning and optimization of Kharkiv's road infrastructure, particularly in decision-making regarding the prioritization of street expansion or reconstruction;

b) allocation of transportation resources or passenger flows during peak hours when actual street capacities are not precisely known (due to roadworks, traffic jams, etc.).

Main application area – optimization of urban transportation systems under conditions of incomplete or imprecise information about traffic intensity. This approach can also be extended to telecommunication networks, supply chain logistics, and other complex systems with uncertainties.

The proposed study is an important step toward enhancing the accuracy and practical applicability of maximum flow algorithms in real-world scenarios. The use of fuzzy sets accounts for variations and potential deviations in channel capacity, enabling more reliable and flexible decision-making in urban transportation management.

Thus, the application of fuzzy set theory to model street capacities in Kharkiv and compute maximum flow using two algorithms opens new opportunities for systemic analysis of complex transportation processes. The methods employed and the results obtained confirm the effectiveness of this approach and outline pathways for further improvement of models and software tools.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Задача про максимальний потік у мережі є одним із ключових завдань теорії графів та знаходить широке застосування в аналізі та оптимізації транспортних, комунікаційних та логістичних систем. Разом із цим у реальних умовах пропускні спроможності (наприклад, вулиць, магістралей чи дорожніх відрізків) часто не можуть бути визначені точно. Зокрема, у місті Харків наявні чинники, що впливають на фактичну пропускну здатність транспортної мережі: дорожні ремонти, погодні умови, добові коливання трафіку, різна інтенсивність руху, аварії тощо. Таким чином, класична постановка задачі про максимальний потік із детермінованими пропускними здатностями не відображає реальної невизначеності транспортної інфраструктури міста.

Врахування невизначеності (неточності) під час оцінювання пропускних здатностей вулиць або доріг актуалізує застосування теорії нечітких множин, яка дозволяє формалізувати та обробляти неточні чи неповні дані. Тому дослідження методів обчислення максимального потоку в нечітко заданих умовах стає особливо важливим для планування, проєктування та оптимізації транспортних мереж великих міст, зокрема Харкова.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є дослідження та експериментальне оцінювання методів визначення максимального потоку в транспортній мережі з нечітко заданими пропускними здатностями (зокрема, вулиць і доріг міста Харкова). Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану «задачі про максимальний потік в умовах невизначеності»;

– розробити чи адаптувати алгоритмічні процедури (Едмондса-Карпа та Форда-Фалкерсона) з урахуванням детермінації нечітких параметрів;

– запропонувати модель (підхід) до формування та обробки вхідних даних про транспортну мережу Харкова з нечітко визначеними пропускними здатностями;

– реалізувати програмний експеримент (у вигляді прототипу або дослідного зразка), який дозволить порівняти ефективність та точність обраних методів.

Об’єктом дослідження є процеси обчислення та аналізу пропускних здатностей транспортних мереж на прикладі міста Харків, де фактичний потік транспорту визначається численними змінними умовами.

Предметом дослідження є алгоритми та методи знаходження максимально можливого потоку в умовах нечітко заданих (невизначених) пропускних здатностей транспортної мережі, включно зі способами детермінізації та порівняльним аналізом методів Едмондса-Карпа і Форда-Фалкерсона.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються апарат теорії нечітких множин – для формалізації та опису невизначеності вхідних даних про пропускні здатності; методи детермінізації (наприклад, α-рівні) – задля переходу від нечітких оцінок до «чітких» значень пропускних спроможностей; алгоритм Едмондса-Карпа та метод Форда-Фалкерсона – для обчислення максимально можливого потоку в моделі транспортної мережі.

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на 28-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 16-18 квітня 2024 р.) [1].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі про максимальний потік

Об’єкт аналізу – «задача про максимальний потік в умовах невизначеності».

Предмет аналізу – «оптимізація транспортних мереж».

Точка зору: дослідник.

Ціль: системний аналіз проблеми математичного моделювання та оптимізації транспортних мереж.

Модель типу «чорний ящик» (рис. 1.1) дозволяє аналізувати поведінку системи без детального розуміння її внутрішньої структури. Така модель зосереджується на взаємозв’язках між вхідними даними та результатом, що є особливо корисним, коли доступ до точних даних обмежений або є невизначеність в параметрах системи.

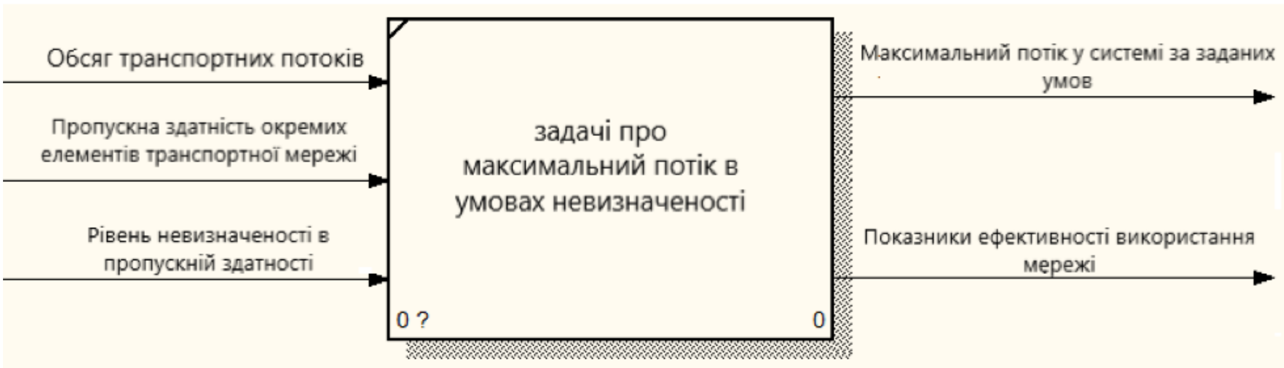

Рисунок 1.1 – Модель типу «чорний ящик»

Зробимо морфологічний опис системи на основі зовнішнього середовища, що приведено на рис. 1.2.

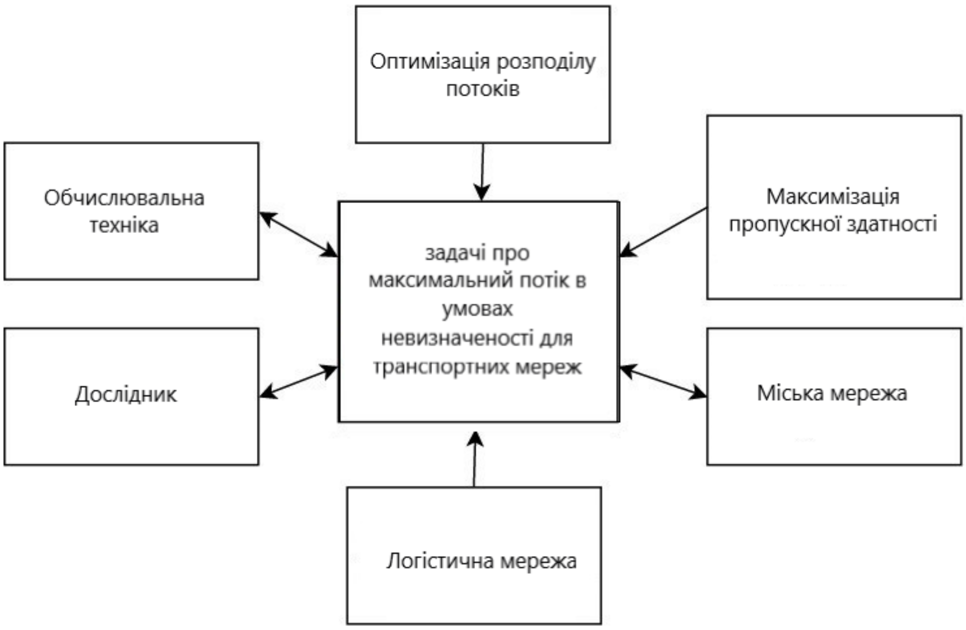

Рисунок 1.2 – Модель зовнішнього середовища системи

Модель зовнішнього середовища допомагає приймати рішення в реальному часі для управління транспортними потоками та забезпечення оптимального потоку за умов невизначеності.

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі про максимальний потік

Метод аналізу ієрархій (МАІ), розроблений Томасом Сааті, є потужним інструментом для ухвалення рішень у випадках, коли потрібно вибрати найкращий метод розв’язання задачі з кількох можливих альтернатив. У випадку із задачею про максимальний потік у сфері транспортних перевезень МАІ допоможе структурувати вибір методу, спираючись на критерії, важливі для досягнення найкращого результату.

Будемо розглядати наступні критерії:

– критерій 1: кількість ітерацій;

– критерій 2: швидкість збіжності;

– критерій 3: час виконання однієї ітерації;

– критерій 4: обсяг оперативної пам’яті.

Можливі альтернативи:

– альтернатива 1: Метод Форда-Фалкерсона;

– альтернатива 2: Алгоритм Едмондса-Карпа;

– альтернатива 3: Алгоритм Дініца.

Будемо використовувати шкалу парних порівнянь Т. Сааті для отримання кількісних оцінок.

Згідно з цією шкалою нас не цікавитиме відсутність фізичних чи об’єктивних одиниць виміру.

Фізичні та об’єктивні одиниці виміру не важливі.

Особливість методу полягає в тому, що він безрозмірний, це полегшує приведення параметрів до однакових одиниць виміру.

Використовуючи метод Сааті при проведенні парних порівнянь ми визначаємо який з елементів є найважливішим і найвірогіднішим.

Будемо використовувати метод Сааті для побудови ієрархічної структури, вид якої наведено на рис. 1.3.

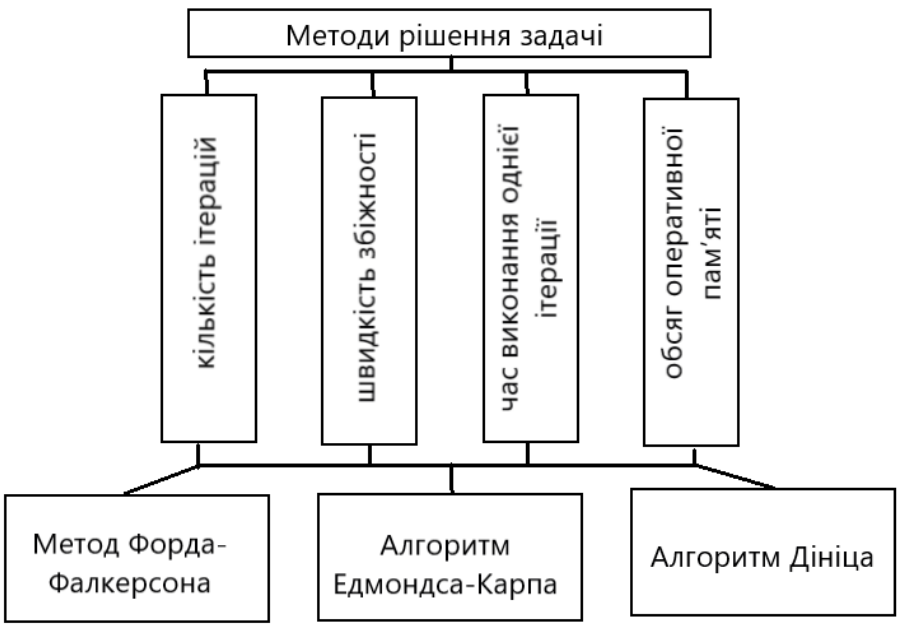

Рисунок 1.3 – Ієрархічна структура проблеми вибору

Формується матриця попарних порівнянь (табл. 1.1) для всіх елементів першого рівня ієрархії, тобто матриця попарних порівнянь важливості критеріїв.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

	К1	К2	К3	К4
К1	1	$\frac{1}{3}$	3	5
К2	3	1	5	7
К3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	1	3
К4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	1

Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв міститься у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Розрахунок вектору локальних приоритетів критеріїв

	К1	К2	К3	К4	Середнє геометричне за строками	Вектор пріоритетів
К1	1	$\frac{1}{3}$	3	5	$x_1=\sqrt[4]{1\cdot\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 5}=1,4953$	$p_1^k=\frac{x_1}{\Sigma}=0,2634$
К2	3	1	5	7	$x_2=\sqrt[4]{3\cdot 1\cdot 5\cdot 7}=3,2011$	$p_2^k=\frac{x_2}{\Sigma}=0,5638$
К3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	1	3	$x_3=\sqrt[4]{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot 1\cdot 3}=0,6687$	$p_3^k=\frac{x_3}{\Sigma}=0,1178$
К4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	1	$x_4=\sqrt[4]{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1}=0,3124$	$p_4^k=\frac{x_4}{\Sigma}=0,055$
					$\sum=x_1+x_2+x_3+x_4=5,6775$	

Обчислюється індекс узгодженності, як сума елементів матриці за стовпцями.

$$y_1 = 4,533,\ \ y_2 = 1,6761,\ \ y_3 = 9,333,\ \ y_4 = 16$$

Тоді:

$$\lambda_{\max}^{k} \approx 4,1184$$

та індекс узгодженості:

$$CI^{k} = 0,0395\,.$$

Оскільки матриця попарних порівнянь критеріїв є матрицею четвертого порядку, то $RI^{K} = 0,9$, і відношення узгодженості:

$$CR^{K} = \frac{CI^{K}}{RI^{K}} = 0,0439\ .$$

Оскільки відношення узгодженості є близьким до $0,1$, то вважатимемо, що матриця парних порівнянь критеріїв побудована правильно.

Вектор локальних пріоритетів критеріїв відносно проблеми вибору дорівнює

$$\vec{p}^{\,k} = \left(0,2634;0,5638;0,1178;0,055\right)^{T}.$$

Далі формуємо матриці попарних порівнянь альтернатив за кожним критерієм.

Результаті порівнянь у шкалі Т. Сааті наведено у табл. 1.3 – 1.7.

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К1

К1	А1	А2	А3
А1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
А2	6	1	3
А3	9	$\frac{1}{3}$	1

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К2

К2	А1	А2	А3
А1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
А2	3	1	5
А3	7	$\frac{1}{5}$	1

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К3

К3	А1	А2	А3
А1	1	5	7
А2	$\frac{1}{5}$	1	7
А3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

Таблиця 1.6 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К4

К4	А1	А2	А3
А1	1	6	6
А2	$\frac{1}{6}$	1	5
А3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	1

Для кожної матриці розраховуємо вектори локальних пріоритетів:

$$\vec{p}_1^A = \begin{pmatrix} 0,0985 \\ 0,5500 \\ 0,3514 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_2^A = \begin{pmatrix} 0,1326 \\ 0,5586 \\ 0,3088 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_3^A = \begin{pmatrix} 0,6240 \\ 0,2791 \\ 0,0970 \end{pmatrix}, \ \vec{p}_4^A = \begin{pmatrix} 0,6561 \\ 0,2492 \\ 0,0947 \end{pmatrix}.$$

Так як матриці попарних порівнянь третього порядку, то $RI^A = 0,58$. Обчислимо індекси та відношення узгодженостей для матриць парних порівнянь альтернатив за кожним із критеріїв.

$$CI_{K1}^A = 0,0527, \ CI_{K2}^A = 0,0503, \ CI_{K3}^A = 0,0423, \ CI_{K4}^A = 0,0527, \tag{1.1}$$

$$CR_{K1}^A = 0,1908, \ CR_{K2}^A = 0,1867, \ CR_{K3}^A = 0,1729, \ CR_{K4}^A = 0,0908. \tag{1.2}$$

З формул 1.1 і 1.2 видно, що індекс узгодженності близький до $0,1$, то результат узгодженний з думками експерта.

Наведемо вектор глобальних приорітетів альтернатив:

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,0985 & 0,1326 & 0,6240 & 0,6561 \\ 0,5500 & 0,5270 & 0,2791 & 0,2492 \\ 0,3514 & 0,3088 & 0,0970 & 0,0947 \end{pmatrix},$$

$$\vec{p} = P^A \vec{p}^K .$$

Вектор глобальних приорітетів має вигляд:

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,0985 & 0,1326 & 0,6240 & 0,6561 \\ 0,5500 & 0,5270 & 0,2791 & 0,2492 \\ 0,3514 & 0,3088 & 0,0970 & 0,0947 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2634 \\ 0,5638 \\ 0,1178 \\ 0,055 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2103 \\ 0,4886 \\ 0,2833 \end{pmatrix}.$$

Розрахунки індексів та відношень узгодженості для всії ієрархій наведено у наступних формулах:

$$CI = CI^k = \left(\vec{p}^k, \overrightarrow{CI}^A \right) = 0,1896 ,$$

$$RI = RI^K + RI^A = 0,90 + 0,58 = 1,47 ,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0,129 .$$

Це вважається доброю узгодженностю.

Оскільки вектор глобальних приорітетів належить другій альтернативі, то для розв’язання нашої задачі найкращим є алгоритм Едмондса-Карпа.

1.3 Формальна та змістовна постановка задачі

1.3.1 Задача про максимальний потік

Задача про максимальний потік – класична задача оптимізації теорії графів, яка полягає у пошуку максимального обсягу потоку, який може бути відправлений через мережу труб, каналів або інших шляхів з урахуванням обмежень пропускної спроможності. Задача може бути використана для моделювання широкого спектру реальних ситуацій у транспортних системах, мережах зв'язку та розподілу ресурсів і т.д.

У задачі про максимальний потік ми маємо спрямований граф на якому виділяють дві вершини, одна з них є джерелом, її номер вважаємо рівним 1, позначимо її буквою s; інша – стоком, її номер – n, її позначимо літерою t.

Мета полягає в тому, щоб знайти максимальний обсяг потоку, який може бути відправлений з s до t, дотримуючись при цьому обмеження пропускної здатності на ребрах [2], [3], [4].

Потоком із джерела в стік в мережі називатимемо множину невід'ємних чисел x_{ij}, які відповідають таким умовам:

$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = 0, \ i \neq 1, k \neq n, \\ \sum_j x_{1j} = \sum_k x_{kn} = v, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\nu \geq 0, \tag{1.4}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}. \tag{1.5}$$

Число v є величиною потоку. Число x_{ij} є потоком по комунікації (i, j). Зазначимо, що для задачі , що розглядається, x_{ij} – це обсяги перевезень по кожній комунікації в одиницю часу; b_{ij} – пропускна здатність комунікації (i, j).

Зауважимо, що дугою (i, j) потік може протікати тільки в одному напрямку від i до j, тому $x_{ij} \geq 0$, а $x_{ji} = 0$; ребром (i, j) потік може протікати в обох напрямках, якщо він протікає від i до j, то $x_{ij} > 0$, якщо він протікає від j до i, то $x_{ji} > 0$.

Згідно умов (1.3), (1.4) – в кожну вершину, крім джерела та стоку, приходить рівно стільки ж потоку, скільки з неї виходить (у проміжних пунктах вантажі не споживаються і не виникають).

Згідно умови (1.5) – потік по комунікації (i, j) не може бути менше нуля і більше її пропускної здатності.

Задача визначення потоку з максимальною величиною є задачею лінійного програмування, в якій цільова функція визначається наступним чином:

$$v = \sum_j x_{sj} ,$$

де s – джерело спрямованого графу.

Сума обчислюється за всіма зв’язками, що виходять з джерела.

Проте враховуючи особливості цієї задачі для її розв’язання були розроблені значно ефективніші методи, ніж симплекс-метод. Далі ми розглянемо алгоритм, що базується на теоремі Форда-Фалкерсона про максимальний потік і мінімальний розріз.

Зауважимо, що у випадку змішаної мережі (шлях складається як з орієнтованих, так і неорієнтованих зв’язків, причому орієнтовані використовуються згідно з напрямом їх орієнтації), максимальна величина потоку дорівнює мінімальній пропускній здатності серед усіх зв’язків на цьому шляху. Таким чином, зв’язок з найменшою пропускною здатністю стає «вузьким місцем» у мережі. Узагальнимо це поняття для довільних мереж, запровадивши поняття розрізу.

Розріз мережі визначається як множина зв’язків, що мають один кінець у підмножині X множини всіх вершин V, а інший – у множині $\bar{X} = V \setminus X$. Видалення всіх зв’язків, що належать розрізу, роз’єднує мережу на дві або більше частин, які не мають зв’язків між собою.

Розріз $(X, \bar{X})$ називається розділяючим джерело і стік (вершини *s* і *t*), якщо, $s \in X, t \in \bar{X}$.

Пропускною здатністю (величиною) розрізу $(X, \bar{X})$ називається величина

$$C(X, \bar{X}) = \sum_{(i,j)} b_{ij},$$

де сума береться за всіма дугами (i, j), що ведуть з X в $\bar{X}$, і по всіх ребрах (i, j), що з'єднують вершини з X з вершинами з $\bar{X}$.

Розріз $(X, \bar{X})$, що розділяє джерело і стік і має мінімальну величину, є узагальненим «вузьким місцем» у випадку довільної мережі.

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі максимального потоку, який безпосередньо випливає з наступної теореми.

Теорема Форда-Фалкерсона про максимальний потік і мінімальний розріз**.** У будь-якій мережі величина максимального потоку з джерела в стік дорівнює пропускній здатності мінімального розрізу, що розділяє джерело і стік [2], [5], [6].

1.3.2 Задача про максимальний потік із нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій

Розглянемо задачу про максимальний потік у транспортній мережі, де пропускні здатності комунікацій задані нечіткими величинами. Для визначення оптимальності скористаємося підходами, розробленими Заде і Беллманом [7], [8].

Наведемо точне формулювання задачі. Нехай задано мережу комунікацій (кінцевий, зв'язаний, змішаний граф, у якому кожне ребро відповідає певному числу) з n вершинами (пунктами) і m комунікаціями.

Припустимо, що вершини пронумеровані від 1 до n і що кожна вершина позначається своїм номером.

Як прийнято в теорії графів, комунікацію (ребро), що з'єднує вершину i з вершиною j, будемо позначати як (i, j). Припустимо, що множина комунікацій впорядкована, а пропускна здатність кожної комунікації (i,j) задана нечітким числом $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$ із функцією приналежності $\mu_{ij}(d)$:

$$\mu_{ij}(d) = \begin{cases} f_{ij}^1(d), d \in [a_{ij}, b_{ij}], \\ f_{ij}^2(d), d \in [b_{ij}, c_{ij}], \\ 0, d \le a_{ij} \vee d \ge c_{ij}, \end{cases}$$

визначеною на універсальній множині можливих значень $[0,+\infty)$.

Нехай множина допустимих планів також є нечіткою множиною $\widehat{V}$, заданою на універсальній множині можливих значень

$$V = \left\{ v \in R^m \mid v_k \ge 0, k = 1,2,...,m \right\}.$$

Координати в просторі R^m відповідають комунікаціям: перша координата відповідає комунікації (i_1, j_1), друга – (i_2, j_2) і так далі. Уздовж координатних осей відкладені значення пропускних здатностей, а також заплановані обсяги перевезень. Зокрема, u_k – це значення пропускної здатності комунікації (i_k, j_k) та v_k – запланований обсяг перевезень по ній; таким чином, вектор $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ представляє план перевезень для всієї мережі.

Позначимо через $v^*(u)$ максимальний потік у мережі для заданих значень пропускних здатностей:

$$u = \left(u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \ldots, u_{i_m j_m} \right).$$

Тоді функція приналежності $\mu_{\widehat{V}}(v)$ нечіткої множини $\widehat{V}$ задана на універсальній множині V і розраховується за формулою:

$$\mu_{\hat{V}}(v) = \begin{cases} \max\limits_{\{u \in U | v = v^*(u)\}} \min\limits_{(i_k j_k) \in \Re} \mu_{i_k j_k}\left(u_{i_k j_k}\right), \\ 0, \textit{ в іншому випадку}, \end{cases}$$

тобто якщо v є максимальний потік при значеннях пропускних здатностей, рівних $u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \cdots, u_{i_m j_m}$, то його надійність дорівнює $\min\limits_{(i_k j_k) \in \Re} \mu_{i_k j_k}\left(u_{i_k j_k}\right)$. В іншому випадку вона дорівнює нулю.

Нечітко визначену мету в розглянутій задачі будемо формалізовувати нечіткою множиною $V_{\hat{C}}$ з функцією приналежності $\mu_{\hat{C}}(v), v \in V$.

Позначимо:

$S(v)$ – величина потоку при допустимому плані v;

$v^*(u)$ – максимальний потік при пропускних здатностях u;

$S(v^*(u))$ – величина максимального потоку при пропускних здатностях u;

S^{min} – величина максимального потоку у разі, коли пропускні здатності всіх комунікацій мінімальні, тобто рівні a_{ij};

S^{max} – величина максимального потоку у разі, коли пропускні здатності всіх комунікацій максимальні, тобто рівні c_{ij};

Зазначимо, що при заданому $u \in U$ для будь-якої комунікації із $\Re$ відома її пропускна здатність. Тому, застосовуючи, наприклад, алгоритм Форда-Фалкерсона, ми можемо обчислити $S(v^*(u))$.

Як функцію приналежності $\mu_{\hat{C}}$ допустимих планів для нечіткої мети розглянемо показник близькості поточного плану v до найбільшого за величиною максимального потоку, який ми пропонуємо характеризувати близькістю величини $S(v)$ до величини $S^{\max}$. Покладемо

$$\mu_{\hat{C}}(v) = \frac{S(v) - S^{\min}}{S^{\max} - S^{\min}}.$$

Нечітким розв'язанням задачі вважатимемо нечітку множину $\hat{D}$ з функцією приналежності $\mu_{\hat{D}}(v)$, що є перетином нечіткої множини допустимих планів і нечіткої мети:

$$\mu_{\hat{D}}(v) = \min\left\{\mu_{\hat{V}}(v), \mu_{\hat{C}}(v)\right\}. \quad (1.6)$$

Як рішення пропонується план v^0, для якого:

$$\mu_{\hat{D}}\left(v^0\right) = \max_{v \in V} \mu_{\hat{D}}(v) = \max_{v \in V} \min\left\{\mu_{\hat{V}}(v), \mu_{\hat{C}}(v)\right\}.$$

1.4 Постановка задач дослідження

Метою дослідження є реалізація і дослідження математичної моделі для знаходження максимального потоку в транспортній мережі з нечітко заданими пропускними здатностями комунікаційних каналів. Це дасть змогу враховувати фактори невизначеності у реальних транспортних системах і розробити методи, що дозволять оптимізувати потоки в умовах нечітких даних.

Задачі дослідження:

– системний аналіз задачі про максимальний потік;

– аналіз існуючих методів розв'язання задачі про максимальний потік і визначення їхніх обмежень у випадку нечітко заданих пропускних здатностей;

– формулювання математичної моделі задачі про максимальний потік з використанням нечіткої логіки для опису пропускних здатностей каналів;

– розробка алгоритму для обчислення максимально можливого потоку в умовах нечітко заданих пропускних здатностей, з використанням методів нечіткої оптимізації;

– експериментальне дослідження розробленого алгоритму на тестових транспортних мережах та порівняння його ефективності з класичними алгоритмами максимального потоку;

– аналіз впливу параметрів нечіткості на результати розв'язання задачі та розробка рекомендацій щодо застосування моделі для різних типів транспортних мереж;

– формулювання висновків роботи та аналіз можливих застосувань.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Метод Форда-Фалкерсона для розв'язання задачі про максимальний потік

Розглянемо мережу, що визначається графом G, яка має єдине джерело s, єдиний стік t та визначену на множині U функцію пропускної спроможності ϕ_{ij}. Нехай інтенсивність джерела $ds = d$. За теоремою існування потоку на мережі інтенсивність стоку має бути рівною $ds = -d$. Допустимий потік для розглядуваної мережі визначається співвідношеннями:

$$\sum_{j:(s,j)\in U} x_{sj} = d,$$

$$\sum_{j:(i,j)\in U} x_{sj} - \sum_{k:(k,i)\in U} x_{ki} = 0, i \neq s, i \neq t,$$

$$\sum_{k:(k,t)\in U} x_{kt} = -d,$$

$$0 \le x_{ij} \le \phi_{ij}, (i,j) \in U.$$

Задача про максимальний потік полягає у знаходженні максимального значення інтенсивності d, при якому в розглядуваній мережі існує потік.

Опис алгоритму Форда-Фалкерсона.

Крок 1. (Процес розставлення позначок). На цьому кроці кожна з вершин належить до одного з трьох типів:

– непозначена,

– позначена і непроглянута,

– позначена і проглянута.

Спочатку всі вершини непозначені.

Позначимо вершину s позначкою $\mu(s) = (+s, \theta_s = \infty)$, де θ_s – максимальний можливий потік, що можна пропустити через вершину.

Дана формула описує можливіть послати потік з вершини s у саму себе необмеженої величини.

Тепер вершина s позначена і непроглянута.

Нехай j – позначена і непроглянута вершина, $\mu(j) = (+i, \theta_j)$ або $\mu(j) = (-i, \theta j)$ – її позначка.

Розглядаємо ще непозначені вершини $k : (j,k) \in U$ і $x_{jk} < \phi_{jk}$. Кожній з таких вершин приписуємо позначку

$$\mu(k) = (+j, \theta_k), \text{ де } \theta_k = min\{\theta_j, \phi_{jk} - x_{jk}\}.$$

Розглядаємо ще непозначені вершини k: $(k, j) \in U$, і $x_{kj} > 0$. Кожна з таких вершин одержує позначку $\mu(k) = (-j, \theta_k)$, де $\theta_k = min\{\theta_j, x_{kj}\}$.

Всі вершини k, які одержали позначки, тепер позначені і непроглянуті, а вершина j – позначена і проглянута.

Продовжуємо приписувати позначки непозначеним вершинам до тих пір, поки або вершина t виявиться позначеною, або не можна буде позначити жодної вершини і вершина t виявиться непозначеною.

У другому випадку існуючий потік x – максимальний, а множина позначених вершин C^* визначає мінімальний розріз мережі.

У першому випадку існуючий потік x на кроці 2 можна збільшити.

Крок 2. (Збільшення потоку). Нехай $\mu(t) = (+k, \theta_t)$, або $\mu(t) = (-k, \theta_t)$ – позначка вершини t.

Це означає, що існуючий потік з s в t можна збільшити на величину θ_t. Для цього в першому випадку замінюємо x_{kt} на $x_{kt} + \theta_t$, у другому – x_{tk} замінюємо на $x_{tk} - \theta_t$.

Переходимо до вершини k і виконуємо аналогічні операції, змінюючи величину потоку на ту ж величину θ_t. Продовжуємо ці дії, поки не досягнемо вершини s. Після цього ліквідовуємо позначки всіх вершин і переходимо до кроку 1.

Цей алгоритм завжди знаходить максимальний потік у мережі за скінченну кількість кроків. Проте, його ефективність залежить від властивостей мережі, зокрема від кількості вершин і ребер, а також від розміру максимального потоку. У найгіршому випадку складність алгоритму може досягати $O\left(E^2\right)$, де E – кількість ребер в мережі.

2.2 Метод Едмонса-Карпа для розв’язання задачі про максимальний потік

Алгоритм Едмондса-Карпа – це реалізація методу Форда-Фалкерсона, яка використовує BFS (пошук в ширину) для пошуку шляхів, що збільшуються.

Складність може бути зумовлена незалежно від максимального потоку.

Час роботи алгоритму Едмондса-Карпа є покращеним в порівнянні із алгоритмом Форда-Фалкерсона, та становить $O(VE^2)$, де V – кількість вершин, а E – кількість ребер графу, навіть для ірраціональних потужностей. Це покращення є важливим, оскільки воно робить час роботи алгоритму Едмондса-Карпа незалежним від максимального потоку мережі.

Опис алгоритму Едмондса-Карпа.

Крок 1. Нехай початковий потік для всіх ребер є рівним нулю:

$$f(u,v) = 0, \forall (u,v) \in E .$$

Будуємо залишкову мережу G_f, де кожне ребро (u,v) має залишкову пропускну здатність

$$r(u,v) = c(u,v) - f(u,v) ,$$

де $c(u,v)$ – пропускна здатність ребра (u,v).

Крок 2. (Пошук шляху збільшення). Використовуючи пошук в ширину (BFS) для знаходження шляху збільшення P від s до t у залишковій мережі G_f.

Шляхи збільшення існують лише в тих випадках, коли $r(u,v) > 0$ для всіх ребер (u,v) вздовж шляху P.

Якщо шлях збільшення не знайдено, переходимо до кроку 4 (алгоритм завершено).

Крок 3. (Збільшення потоку вздовж шляху). Визначимо мінімальну залишкову пропускну здатність уздовж шляху P, яку назвемо пропускною здатністю шляху:

$$\Delta f = \min_{(u,v)\in P} r(u,v).$$

Збільшуємо потік уздовж знайденого шляху на величину Δf. Для кожного ребра $(u,v) \in P$

$$f(u,v) = f(u,v) + \Delta f .$$

Якщо (v,u) – зворотнє ребро, то $f(v,u) = f(v,u) - \Delta f$.

Оновлюємо залишкову мережу G_f:

– для кожного ребра (u,v) на шляху P:

$$r(u,v) = c(u,v) - f(u,v).$$

– для кожного зворотнього ребра (v,u):

$$r(v,u) = c(v,u) - f(v,u).$$

Крок 4. (Завершення). Коли шляхи збільшення більше не знайдені (тобто немає шляху від s до t в залишковій мережі), значення максимального потоку дорівнює сумі всіх потоків, що виходять із витоку.

2.3 Метод Дініца для розв’язання задачі про максимальний потік

Алгоритм Дініца – це ефективний алгоритм знаходження максимального потоку в графі. Його основна ідея полягає у поступовому покращенні потоку шляхом знаходження блокуючих потоків та зменшення довжини шляхів, по яких ці потоки протікають.

Опис алгоритму Дініца.

Крок 1. Нехай початковий потік для всіх ребер є рівним нулю

$$f(u,v) = 0, \forall (u,v) \in E.$$

Будуємо залишкову мережу G_f, де кожне ребро (u,v) має залишкову пропускну здатність

$$r(u,v) = c(u,v) - f(u,v),$$

де $c(u,v)$ – пропускна здатність ребра (u,v).

Крок 2. (Пошук шляху збільшення). Використовуючи пошук в ширину (BFS) починаючи з витоку s для побудови рівневої мережі. Кожній вершині присвоюється рівень, який дорівнює мінімальній кількості ребер від s до цієї вершини.

Якщо стік t є недосяжним з початку s, алгоритм завершено, і поточний потік є максимальним.

Інакше видаліть із залишкової мережі всі ребра, які не ведуть від вершини на поточному рівні до вершини на наступному рівні. Ребра, що залишилися, утворюють рівневу мережу.

Крок 3.(Пошук блокуючого потоку). У рівневій мережі знайдіть блокуючий потік за допомогою пошуку в глибину (DFS). Блокуючий потік – це такий потік, при якому на кожному шляху від s до t хоча б одне ребро повністю насичене (тобто його залишкова пропускна здатність стає рівною нулю).

Виконайте пошук шляху збільшення в рівневій мережі за допомогою DFS і збільшуйте потік уздовж шляху на мінімальну залишкову пропускну здатність на шляху:

$$\Delta f = \min_{(u,v)\in P} r(u,v).$$

Для кожного ребра (u,v) на шляху P

$$f(u,v) = f(u,v) + \Delta f,$$

та зворотнього ребра (v,u)

$$f(v,u) = f(v,u) - \Delta f.$$

Оновимо залишкову пропускну здатність для всіх ребер:

$$r(u,v) = c(u,v) - f(u,v).$$

Крок 4. Повторюємо кроки 2 і 3, доки рівень стоку t не стане недосяжним з початку s в черговій побудованій рівневій мережі.

Коли більше не можна побудувати рівневу мережу, значення потоку є максимальним потоком.

Час роботи алгоритму Дініца становить $O(V^{2E})$, де V – кількість вершин, а E – кількість ребер графу. Проте, застосування покращень, таких як удосконалення вибору шляхів або використання евристик для зменшення кількості шляхів, може значно скоротити час роботи алгоритму.

Алгоритм Дініца є досить ефективним та простим у реалізації. Він широко використовується для розв'язання задач маршрутизації в мережах зв'язку та оптимізації розкладу.

2.4 Альфа-рівневий підхід для розв'язання задачі про максимальний потік з нечіткими вихідними даними

Розглянемо один підхід до розв'язання задачі (1.6) із пункту 1.3.2 про максимальний потік з нечіткими пропускними здатностями комунікацій.

Опишемо алгоритм наближеного рішення задачі. Задаємо з певним кроком значення функцій приналежності пропускних здатностей та знаходимо відповідні значення пропускних можливостей комунікацій. Знаючи значення пропускних здатностей, знаходимо максимальний потік при таких пропускних здатностях, визначаємо значення функції приналежності нечіткої мети та, нарешті, значення функції приналежності нечіткого рішення.

Визначивши значення функції приналежності нечіткого рішення для всіх кроків алгоритму, вибираємо із цих значень максимальне. Відповідний максимальний потік і дає шукане наближене рішення розглянутої задачі.

Висновки за розділом 2

Розглянуті алгоритми (Форда-Фалкерсона, Едмонса-Карпа, Дініца) дають ефективні розв'язки для задачі про максимальний потік, а їхня різна складність робить вибір методу залежним від умов конкретної мережі. Альфа-рівневий підхід дозволяє використовувати ці методи й у випадку невизначених (нечітких) пропускних здатностей, переводячи задачу в низку «чітких» підзадач.

Такий спосіб дає змогу поєднати точність класичних алгоритмів та здатність враховувати різні сценарії (оптимістичні/песимістичні) пропускних можливостей у мережах із невизначеними даними.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Використання HTML та JavaScript задля дослідження транспортних мереж

HTML (HyperText Markup Language) – це мова розмітки, яка визначає структуру веб-сторінок. Основними завданнями є створення контейнерів для вмісту (наприклад, <canvas> для малювання) та інтеграція JavaScript для динамічної поведінки.

JavaScript – це мова програмування для створення інтерактивності на веб-сторінках. Основними можливостями є реалізація алгоритмів, управління елементами сторінки (наприклад, Canvas) та обробка подій (натискання кнопок, зміна параметрів).

Розглянемо характеристики, на базі яких було обрано даний метод дослідження кваліфікаційної роботи:

а) інтерактивність та візуалізація;

Canvas дозволяє створювати інтерактивні графіки для моделювання та демонстрації результатів алгоритму. Це зручно для:

1) відображення графа (вузли та ребра) в реальному часі;

2) візуалізації потоків через ребра з урахуванням нечітких пропускних здатностей;

3) динамічної демонстрації змін у графі під час виконання алгоритму.

б) гнучкість обчислень;

JavaScript дозволяє реалізувати складні алгоритми, такі як модифікації алгоритмів Форда-Фалкерсона чи Едмондса-Карпа, для знаходження максимального потоку. Застосування нечіткої логіки додає ще більшу цінність:

1) можливість оперувати нечіткими множинами для визначення пропускних здатностей;

2) використання бібліотек для нечіткої логіки (наприклад, Fuzzy.js).

в) кросплатформеність;

Рішення на основі HTML і JavaScript з Canvas працює у будь-якому сучасному браузері без необхідності встановлення додаткового ПЗ. Це спрощує доступ до інструменту користувачам.

г) моделювання та налаштування;

Використовуючи HTML-елементи (наприклад, слайдери, кнопки, форми), можна створити зручний інтерфейс для налаштування параметрів графа, нечітких множин і моделювання сценаріїв.

ґ) динамічне оновлення;

Canvas дозволяє оновлювати візуалізацію в реальному часі:

а) змінювати значення пропускних здатностей під час роботи алгоритму;

б) додавати анімацію потоків через ребра.

3.2 Алгоритм розв’язання задачі про максимальний потік в умовах невизначеності використовуючи алгоритми Едмондса-Карпа та Форда-Фалкерсона

Задача про максимальний потік належить до класу транспортних задач, у яких необхідно визначити найбільше можливе значення потоку з джерела (вузол s) до стоку (вузол t) у заданій мережі. Формально транспортна мережа визначається як орієнтований граф $G=(V,E)$, де V – множина вершин, E – множина дуг (ребер). Кожному ребру $(\mathrm{u,v})$ приписана пропускна здатність $c(u,v)\geq 0$.

У класичному випадку пропускні здатності $c(u,v)$ є чіткими (детермінованими) величинами, однак у багатьох реальних застосуваннях значення $c(u,v)$ або невідомі точно, або існує певний діапазон можливих значень. У такому разі припускають, що пропускна здатність має нечітку природу та може бути подана, наприклад, трикутним нечітким числом $\tilde{c}_{uv}=(a,b,c)$.

Мета задачі полягає в тому, щоб визначити найбільший загальний потік

F із s до t за умови, що для кожного ребра обсяг пропущеного потоку $f(u,v)$ не перевищує його пропускної здатності $\tilde{c}_{uv}$. Для перетворення нечітких значень у чіткі застосовують детермінацію (наприклад, через α-рівні), що дозволяє використовувати відомі класичні алгоритми.

3.2.1 Метод Едмондса-Карпа

Метод Едмондса-Карпа є реалізацією більш загального методу Форда-Фалкерсона, де для пошуку доповнювальних шляхів використовується алгоритм пошуку в ширину (BFS).

Алгоритм реалізації методу Едмондса-Карпа:

1) Детермінація нечітких пропускних здатностей.

Для кожного нечіткого числа $\tilde{c}_{uv} = (a,b,c)$ обчислюються $c_{\min}$ та $c_{\max}$ за вибраним α, після чого формується відповідне «чітке» значення $c_{uv}(\alpha)$. Наприклад, беруть середину відрізка $[c_{\min}, c_{\max}]$.

2) Побудова залишкової мережі.

У залишковій мережі кожному ребру (u,v) зі «чіткою» пропускною здатністю c_{uv} призначається «залишкова» здатність $c_{uv} - f_{uv}$, де f_{uv} – уже використовуваний потік.

3) Пошук доповнювального шляху за допомогою BFS.

Завдяки BFS, алгоритм знаходить шлях у залишковій мережі від s до t, який має вільну пропускну здатність. BFS гарантує, що знайдений шлях є «найкоротшим» за кількістю ребер.

4) Обчислення приросту потоку та оновлення.

Визначається мінімальна залишкова пропускна здатність уздовж знайденого шляху δ. Потім значення потоку на ребрах цього шляху збільшується на δ, а в зворотному напрямку – зменшується (для можливості подальшого коригування потоку).

5) Завершення алгоритму.

Якщо доповнювальний шлях не знайдено, роботу завершено. Значення потоку F у мережі є максимальним.

Алгоритм Едмондса-Карпа має поліноміальну оцінку складності $O(V \cdot E^2)$, що робить його привабливим для розв'язання задач середнього та великого розміру, особливо коли в мережі багато ребер

3.2.2 Метод Форда-Фалкерсона

Метод Форда-Фалкерсона – це більш загальна схема, що базується на тому самому принципі побудови залишкової мережі та пошуку доповнювальних шляхів. Однак у ньому не визначено конкретний алгоритм для пошуку такого шляху; найчастіше застосовують DFS або глибоко налаштований пошук.

1) Побудова залишкової мережі.

Аналогічно Едмондсу-Карпу визначається залишкова пропускна здатність $c_{uv} - f_{uv}$.

2) Пошук доповнювального шляху (довільний пошук).

Будь-яка процедура, яка знаходить шлях, може бути використана (DFS, жадібні підходи тощо). Через це можлива велика кількість ітерацій, якщо обраний пошук часто знаходить «невигідні» шляхи з мінімальним приростом.

3) Оновлення потоку.

Збільшуємо потік на знайденому шляху та повторюємо, поки існує можливість розширення потоку.

Слабким місцем методу Форда-Фалкерсона є те, що загальна кількість ітерацій у гіршому випадку може бути дуже великою, якщо на кожному кроці відбувається мінімальний приріст потоку.

3.3 Опис програми

3.3.1 Загальна структура та призначення модулів

Розроблена програмна система складається з наступних основних компонентів:

а) модуль завантаження та обробки мережі: зчитування вхідних JSON-даних про вузли та ребра, зокрема нечіткі параметри пропускної здатності;

б) модуль детермінації: функції, що обчислюють проміжні величини $c_{\min}, c_{\max}$ для кожного ребра та визначають «чітке» значення пропускної здатності з урахуванням α;

в) реалізація алгоритмів Едмондса-Карпа та Форда-Фалкерсона: процедурний або об'єктно-орієнтований код, у якому є функції для створення залишкової мережі, пошуку доповнювальних шляхів (BFS, DFS) та оновлення потоку;

г) Візуальний інтерфейс (UI): побудова графа на полотні (Canvas), відображення результатів кожного кроку, підсвічування доповнювального шляху, виведення статистики (кількості ітерацій, розміру максимального потоку тощо);

3.3.2 Формат вхідних даних

Вхідна мережа описується у файлі типу .json (рис. 3.1). Тут введено наступні позначення:

а) «nodes» – містить масив об'єктів із полями: «id», «x», «y», «label»;

б) «edges» – описує кожне ребро: u та v – номери вершин, «fuzzy» – трикутне нечітке число (a,b,c);

в) «directed» – індикатор орієнтованого/неорієнтованого зв'язку;

г) «source» і «sink» – відповідно джерело і стік.

```
function getDemoCityNetwork() {
    return {
      nodes: [
        {
          id: 1,
          x: 300,
          y: 300,
          label: "Історичний музей"
        }
        ...
      ],
      edges: [
        {
          u: 1,
          v: 2,
          fuzzy: [
            5,
            10,
            15
          ],
          directed: true
        },
        ...
      ],
      source: 1,
      sink: 30
    }
}
```

Рисунок 3.1 – Приклад опису мережі у форматі Json

3.3.3 Детермінація нечітких пропускних здатностей

Під час запуску програми користувач моє можливість встановити рівень значення α, $\alpha \in [0,1]$, де α – коефіцієнт детермінації.

Припустимо, що кожне нечітке число $\tilde{c}(u,v)$ задано трикутною функцією належності з параметрами (a,b,c). Для кожного ребра $\tilde{c} = (a,b,c)$ обчислюються:

$$c_{\min} = b - (b - a) \times \alpha, \quad c_{\max} = b + (c - b) \times \alpha. \tag{3.1}$$

Для простоти візьмемо середину відрізка як детерміновану пропускну здатність

$$c^{(\alpha)}(u,v) = \frac{c_{\min}^{\alpha}(u,v) + c_{\max}^{\alpha}(u,v)}{2}.$$

3.3.4 Алгоритмічна частина

Програма надає дві головні процедури:

а) алгоритм Едмондса-Карпа:

1) ініціюється локальний масив потоків «flowEK» та виконується BFS;

2) на кожному кроці записується «журнал кроків» (visited nodes, обраний шлях);

3) після неможливості знайти доповнювальний шлях алгоритм зупиняється, виводячи «maxFlowValueEK»;

б) алгоритм Форда-Фалкерсона:

1) ініціюється масив «flowFF», виконується DFS для знаходження довільного доповнювального шляху;

2) якщо шлях знайдено, збільшуємо потік і повторюємо;

3) після відсутності шляху отримуємо «maxFlowValueFF».

Програма дозволяє анімувати кожен крок: виділення («highlight») нового шляху, оновлення підписів на ребрах (наприклад, «EK: 5.0 / 10.0 | FF: 0.0»). Кожен метод має свої окремі структури зберігання результатів, щоб обчислення одного не обнуляло результати іншого.

3.3.4 Візуалізація та інтерфейс користувача

Canvas відображає кожну вершину як коло з координатами, поданими у форматі JSON.

Ребра малюються як лінії (для орієнтованих – зі стрілочкою).

Параметри потоку та пропускної здатності виводяться біля середин ребер;

реалізовано підсвічування ребер, що входять у доповнювальний шлях.

Користувач може налаштувати параметр α, завантажити інший JSON-файл, покроково або автоматично запускати алгоритми.

Висновки за розділом 3

Теоретичний базис задачі про максимальний потік із нечітко заданими пропускними здатностями полягає у застосуванні механізмів нечіткої логіки для врахування невизначеності та методів пошуку доповнювальних шляхів (Форд-Фалкерсон, Едмондс-Карп).

Розроблена програмна система дозволяє завантажувати мережу у форматі JSON, проводити детермінацію за різних рівнів α, візуалізувати алгоритмічні кроки та зберігати результати обчислень без взаємного перезапису.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Вхідні дані обчислювального експерименту

У роботі розглядається задача визначення максимально можливого потоку в транспортній мережі за умови, що пропускні здатності вулиць (або дорожніх відрізків) не є чіткими величинами, а задані у вигляді трикутних нечітких чисел**.** Такі умови виникають у реальному міському середовищі, коли точна пропускна спроможність певної ділянки дороги залежить від часу доби, погодних умов, аварій та інших факторів.

4.1.1 Постановка задачі

Необхідно знайти найбільший потік F із джерела ($s = 1$, «Вокзальна») до стоку ($t = 30$, «Аеропорт Харків»), маючи нечіткі оцінки пропускних можливостей на кожному відрізку (ребрі) транспортної мережі.

4.1.2 Вихідні дані

Для демонстрації вхідних даних обчислювального експерименту візьмемо мережу, задану у форматі JSON (фрагментальні дані, що умовно відповідають прикладу з попередньо написаним кодом) (рис. 4.1) :

У представленому переліку 30 пунктів (вузлів) містять реальні райони чи важливі транспортні локації міста Харків, серед яких: «Вокзальна» – умовний початок маршруту, «Олексіївка», «Центральний парк», «Лісопарк», «Площа Свободи», «Нові Будинки», «Аеропорт Харків» – кінцева точка (стік), та інші проміжні важливі зупинки та райони (рис. 4.2).

```
{
  "nodes": [
    { "id": 1, "x": 60,  "y": 350, "label": "Вокзальна" },
    { "id": 2, "x": 200, "y": 80,  "label": "Олексіївка" },
    ...
    { "id": 30, "x": 1300, "y": 500, "label": "Аеропорт Харків" }
  ],
  "edges": [
    { "u": 1,  "v": 2,  "fuzzy": [5,  10, 15],  "directed": true  },
    { "u": 2,  "v": 3,  "fuzzy": [8,  12, 18],  "directed": false },
    ...
    { "u": 26, "v": 30, "fuzzy": [7,  12, 18],  "directed": true  }
],
"source": 1,
"sink": 30
}
```


Рисунок 4.1 – Вхідні дані обчислювального експерименту

Це дає змогу змоделювати або анімувати рух гіпотетичного транспортного потоку з району вокзалу до аеропорту, враховуючи проміжні райони/станції, що репрезентовані вершинами мережі.

Кількість вузлів (n): 30 (відповідають ключовим зонам міста Харків).

Кількість ребер (m): близько 30–35 (в залежності від того, скільки зв’язків додано).

Джерело («source»): вершина $s=1$ (відповідає станції «Вокзальна»).

Сток («sink»): вершина $t=30$ (відповідає станції «Аеропорт Харків»).

Пропускна спроможність кожного ребра (u,v) визначається нечітко як трикутне число (a,b,c). Наприклад, розглянемо ребро $(1\to 2)$ для якого пропускна спроможність становить $fuzzy=(5,10,15)$, це означає, що:

– $a=5$ – мінімально можлива оцінка (за несприятливих умов);

– $b=10$ – найбільш вірогідна (базова) оцінка;

– $c=15$ – максимально можлива оцінка (за сприятливих умов).

З огляду досіджуваної транспортної мережі пропускна здатність (в умовних одиницях «тисяч автомобілів за годину») кожного ребра є трикутним нечітким числом на основі поєднання офіційних статистичних даних та експертних оцінок міських служб, дослідних замірів або наближених (модельних) значень (див. Додаток А).

Для застосування алгоритмів максимального потоку (Едмондса-Карпа, Форда-Фалкерсона тощо) така нечітка величина детермінізується за допомогою параметра α.

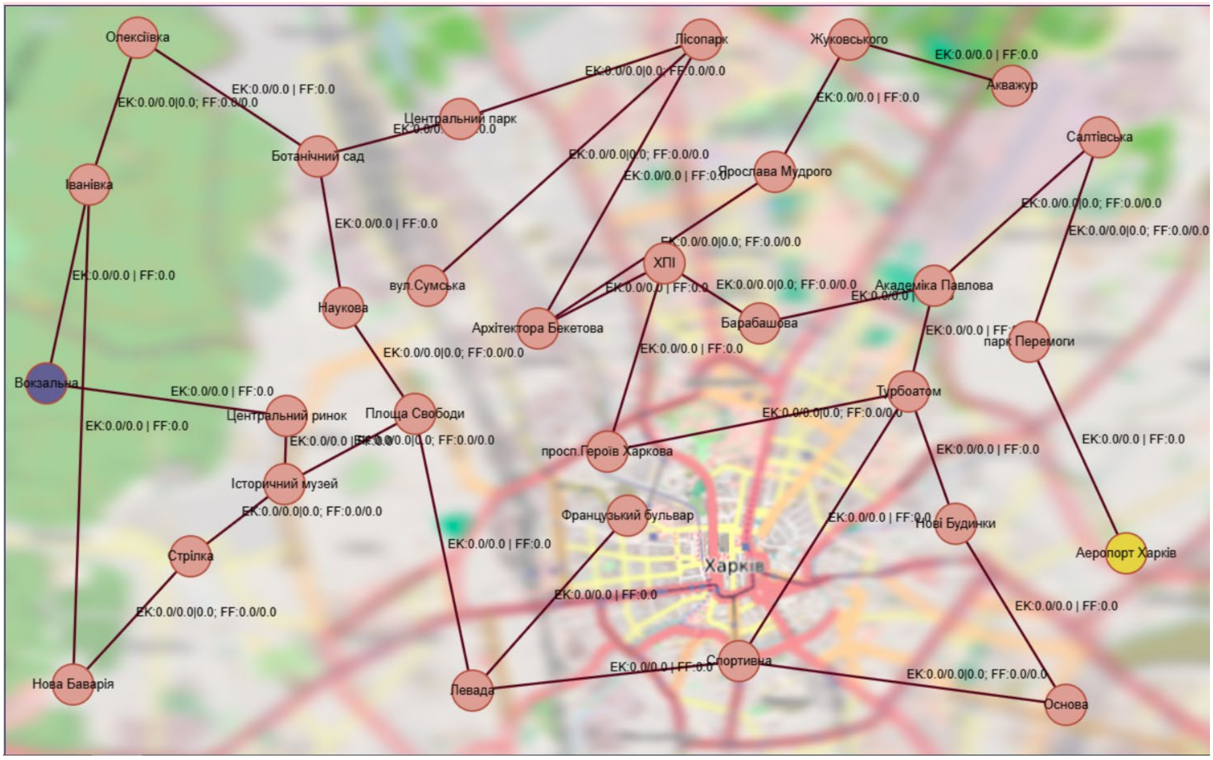

Рисунок 4.2 – Візуалізаія вхідних даних

При детермінації за заданим α (скажімо, $\alpha = 0.5$) згідно формули (3.1) отримаємо:

$$c_{\min} = 10 - (10-5)\cdot 0.5 = 10 - 2.5 = 7.5,\;\; c_{\max} = 10 + (15-10)\cdot 0.5 = 10 + 2.5 = 12.5,$$

$$c_{\det} = \frac{c_{\min} + c_{\max}}{2} = \frac{7.5 + 12.5}{2} = 10.$$

Таким чином, «чітке» значення пропускної здатності для ребра $(1 \to 2$ буде 10 (якщо використовується саме «середина» відрізка $[c_{min}, c_{max}]$).

Припустимо, ми виконуємо обчислення для $\alpha = 0.5$ для всіх ребер (усі нечіткі (a,b,c) перетворюються у чіткі c_{det}). Далі отримуємо орієнтовану мережу з визначеними пропускними спроможностями.

4.2 Обчислювальний експеримент використовуючи алгоритм Едмонса-Карпа

Крок 0. Ініціалізація.

Для кожного ребра (u,v) з детермінованою місткістю ініціалізуємо потік $f_{uv}=0$.

Створюємо «залишкову мережу», де залишкова здатність $r_{uv}=c_{uv}-f_{uv}=c_{uv}$ спершу дорівнює c_{uv}.

Крок 1. Пошук доповнювального шляху (BFS).

Використовуємо чергу («queue»), починаючи з $s=1$.

При обході в ширину перевіряємо, чи є вільна пропускна здатність $r_{uv}>0$.

Якщо вершина $t=30$ була досягнута, зберігаємо «батьківську» інформацію для кожного кроку («parent array»).

Припустимо, перший знайдений шлях (по ребрах) – це $1\to2\to3\to\ldots\to26\to30$. У кожному ребрі перевіряємо $r_{uv}=c_{uv}-f_{uv}$. Поки нульовий потік, $r_{uv}=c_{uv}$

Крок 2. Обчислення мінімальної залишкової здатності.

$$\delta=\min_{(u,v)\in P} r_{uv},$$

де P – знайдений доповнювальний шлях.

Якщо на ребрах (у нашому першому прикладі) найменша місткість уздовж $1\to2\to3\to\ldots\to30$ дорівнює 6, тоді $\delta=6$.

Крок 3. Оновлення потоку.

Для кожного ребра (u,v) на шляху P:

$$f_{uv}\leftarrow f_{uv}+\delta,\quad f_{vu}\leftarrow f_{vu}-\delta.$$

Таким чином, якщо $\delta = 6$, то на кожному ребрі шляху P додаємо 6 до потоку.

Крок 4. Повторення BFS.

Перебудовуємо залишкові здатності $r_{uv} = c_{uv} - f_{uv}$. Виконуємо новий BFS. Якщо знайдено новий шлях – знову обчислюємо δ та оновлюємо потік.

Кількість таких повторів становить ітерації алгоритму Едмондса-Карпа.

Процес триває, поки не знаходиться жоден новий шлях із додатним запасом пропускної здатності (рис. 4.3) .

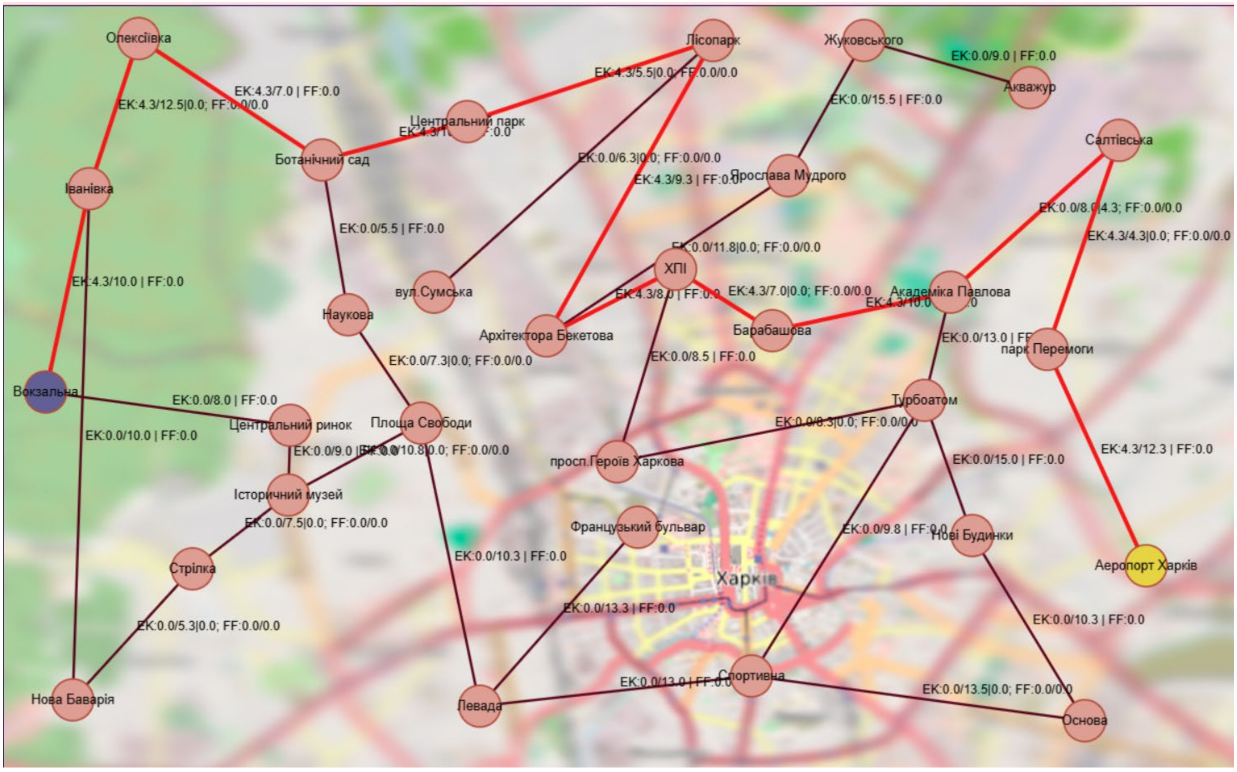

Рисунок 4.3 – Реалізація доповнювального шляху BFS

Результати для методу Едмондса–Карпа (при $\alpha = 0.5$) (рис. 4.4) :

– кількість ітерацій (BFS): Позначимо k_{EK}., У результаті нашому експерименті вийшло $k_{EK} = 7$;

– максимальний потік $F_{EK} = 8.50$.

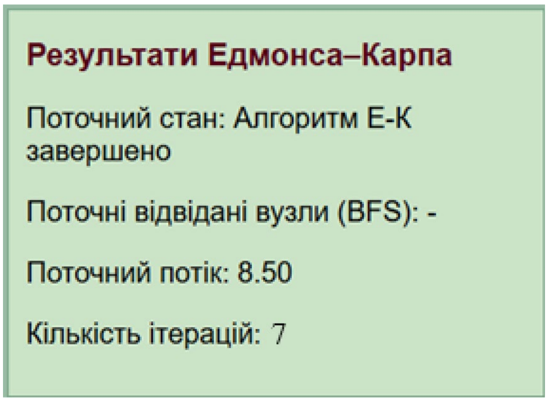

Рисунок 4.4 – Результат обчислювального експерименту для $\alpha = 0.5$

З точки зору оптимізації це означає, що за детермінованих (при $\alpha = 0.5$) пропускних здатностях, транспортна мережа забезпечує сумарний потік $F_{EK} = 8.50$ (умовних одиниць) від вузла до стоку. У контексті міської інфраструктури (наприклад, перевезень чи трафіку) це вказує на максимально можливу завантаженість із урахуванням «середнього» сценарію нечітких обмежень.

4.3 Обчислювальний експеримент використовуючи алгоритм Форда-Фалкерсона

Метод Форда-Фалкерсона виконує аналогічні кроки, що і для метода Едмонса-Карпа, але пошук доповнювального шляху зазвичай реалізується через DFS або довільний пошук.

Крок 0. Ініціалізація.

Для кожного ребра (u, v) встановлюємо потік $f_{uv} = 0$.

Формуємо початкову залишкову мережу $r_{uv} = c_{uv}$ (оскільки потік нульовий).

Якщо ребро (u, v) орієнтоване («directed»: true), то $r_{uv} = c_{uv}$, а $r_{uv} = 0$ на початку (оскільки зворотний напрямок не мав пропускної здатності в оригінальному графі).

Якщо ребро (u, v) неорієнтоване («directed»: false), то $r_{uv} = r_{vu} = c_{uv}$ (обидва напрямки мають однакову початкову пропускну здатність).

Крок 1. Пошук доповнювального шляху (DFS).

Застосовуємо пошук у глибину (DFS) від s.

Ініціалізуємо рекурсивну чи стекову процедуру, починаючи з вершини s.

Рекурсивно (або із застосуванням стеку) переходимо до суміжних вершин v, для яких залишкова пропускна здатність $r_{uv} > 0$.

Якщо вдається дістатися вершини t, записуємо ланцюжок ребер (від s до t), що утворює доповнювальний шлях P.

Припустимо, перший знайдений шлях (по ребрах) – це $1 \to 2 \to 5 \to \ldots \to 30$.

Крок 2. Обчислення приросту δ.

Знайшовши шлях P (послідовність ребер (u,v) у залишковій мережі), визначаємо:

$$\delta = \min_{(u,v)\in P} r_{uv},$$

де $r(u,v)$ – залишкова пропускна здатність на ребрі (u,v).

Якщо на ребрах (у нашому першому прикладі) найменша місткість уздовж $1 \to 2 \to 5 \to \ldots \to 30$ дорівнює 8, тоді $\delta = 8$.

Крок 3. Оновлення потоку.

Для кожного ребра (u,v) на шляху P:

$$f_{uv} \leftarrow f_{uv} + \delta, \quad f_{vu} \leftarrow f_{vu} - \delta.$$

Це означає, що в прямому напрямку (у тому ж, що йшов шлях P) додаємо δ до потоку, а в зворотному напрямку зменшуємо (щоби в майбутньому була можливість «відкотити» частину потоку, якщо стане вигідним скористатися альтернативним маршрутом).

Таким чином, якщо $\delta = 8$, то на кожному ребрі шляху P додаємо 8 до потоку.

Крок 4. Повторення DFS.

Якщо DFS знову знаходить шлях від s до t із додатною залишковою пропускною здатністю, виконуємо кроки 2–3 ітеративно, нарощуючи загальний потік (рис. 4.5).

Рисунок 4.5 – – Реалізація доповнювального шляху DFS

Результати для методу Форда-Фалкерсона (при $\alpha = 0.5$) (рис. 4.6) :

– кількість ітерацій (DFS): Позначимо k_{FF}., У результаті нашого експерименті вийшло $k_{FF} = 9$;

– максимальний потік $F_{FF} = 8.50$.

З точки зору оптимізації це означає, що за детермінованих (при $\alpha = 0.5$) пропускних здатностях, транспортна мережа забезпечує сумарний потік $F_{FF} = 8.50$ (умовних одиниць) від вузла до стоку. У контексті міської інфраструктури (наприклад, перевезень чи трафіку) це вказує на максимально можливу завантаженість із урахуванням «середнього» сценарію нечітких обмежень.

Рисунок 4.6 – Результат обчислювального експерименту для $\alpha = 0.5$

Висновки за розділом 4

Результати обчислювального експерименту свідчать, що обидва методи знаходять коректні значення максимального потоку, проте зазвичай метод Форда-Фалкерсона має потенційно більше ітерацій, оскільки DFS іноді додавє лише незначний приріст потоку.

У разі використання нечітких даних α-параметризована детермінація у поєднанні з Едмондсом-Карпом забезпечує більш передбачуваний час виконання.

Для великих мереж або частих змін α метод Едмондса-Карпа дає змогу швидше проводити повторні розрахунки, що робить його більш практичним для комплексних системних аналізів.

ВИСНОВКИ

У межах кваліфікаційної роботи на тему «Застосування апарату теорії нечітких множин для розв’язання задачі про максимальний потік» було досліджено методи Едмондса-Карпа та Форда-Фалкерсона з метою визначення оптимального алгоритму для задач максимального потоку з невизначеними (нечіткими) пропускними здатностями. Проведений системний аналіз підтвердив доцільність використання алгоритму Едмондса–Карпа як більш зручного та ефективного.

Результати роботи ґрунтуються на поєднанні класичних алгоритмів теорії графів із розширенням у вигляді використання нечітких множин для врахування невизначеностей. Це відповідає сучасним тенденціям у галузі системного аналізу та дослідженням, що спрямовані на обробку неточної інформації. Використана модель дозволяє адекватно оцінювати пропускні здатності вулиць і доріг у міських транспортних мережах та надає гнучкіший підхід до планування інфраструктури. Отримані результати узгоджуються із сучасним рівнем наукових і технічних знань у галузі обчислювальної математичної логіки, оптимізаційних методів і прикладних досліджень транспортних систем.

Запропонований підхід може бути безпосередньо застосований у транспортному плануванні міста Харкова та інших великих міст, де необхідно оцінювати й оптимізувати потоки дорожнього руху з урахуванням невизначених чи змінних пропускних показників.

Поза межами транспортної сфери, отримані результати можуть знайти застосування у телекомунікаційних мережах, логістиці та постачанні, де також наявні нелінійності та невизначеності пропускних можливостей каналів зв’язку чи складів.

Науково-практична цінність розробленого програмного забезпечення чи прототипу полягає у можливості швидко моделювати різні сценарії (зокрема змінювати α) та виявляти «вузькі місця» інфраструктури, що можуть бути найбільш проблемними в пікові періоди.

Науково-технічна значущість полягає у впровадженні відповідних алгоритмів у програмну систему, здатну візуалізувати та аналізувати транспортну мережу, даючи змогу зацікавленим сторонам (інженерам, аналітикам, управлінцям) приймати обґрунтовані рішення щодо планування та модернізації транспортної мережі.

Соціально-економічна значущість полягає у можливості підвищення ефективності транспортного руху, зменшення заторів і покращення якості життя у місті завдяки більш оптимальному розподілу трафіку та пріоритетності інвестицій у «вузькі» ділянки дороги.

Подальша робота може бути спрямована на поєднання нечітких оцінок з імовірнісними факторами або динамічними змінами в реальному часі, а також на застосування більш складних або пришвидшених алгоритмів.

Таким чином**,** результати кваліфікаційної роботи підтвердили ефективність і надійність використання апарату теорії нечітких множин для розв’язання задачі про максимальний потік із невизначеними вихідними параметрами. Унаслідок порівняльного аналізу встановлено, що метод Едмондса-Карпа демонструє більш стабільні й передбачувані показники при пошуку доповнювального шляху, що робить його особливо придатним для транспортних мереж великих міст у контексті нечітких умов.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Спичак П. О. Застосування апарату теорії нечітких множин для розв'язання задачі про максимальний потік. *28-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті»* : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 16-18 квітня 2024 р) Харків : ХНУРЕ, 2024.

2. Кривошеев А. З. Основы математического моделирования. Санкт-Петербург : ВАТТ, 1996. 272 с.

3.Филлипс Д. Методы анализа сетей. Москва : Мир, 1984. 496 с.

4. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. Москва : Мир, 1974. 519 с.

5. Емеличев В. А. Лекции по теории графов. Москва : Наука, 1990. 384 с.

6. Ford, L. R. Maximal Flow Through a Network. California, 1956. P. 399–404.

7. Zadeh L. A. Decision-making in a fuzzy environment. Management. California, 1970. P. 141 – 164.

8. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. Москва : Наука, 1981. 206 с.

9. Стьопкін А. В., Пластун Д. А. Алгоритм ФордаФалкерсона. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. Слов'янськ: ДДПУ, 2016. 168 с.

10. Флегонтов, А. В., Вилков, В. Б., Черных, А. К. Моделирование задач принятия решений при нечетких исходных данных. Лань, 2020. 329 с.

11. Басакер Р. Саати Т. Конечные графы и сети. Москва : Наука, 1974. 368 с.

12. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический поход. Москва : Мир, 1978. 430 с.