УДК 621.372.413÷621.385.69

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ КОАКСИАЛЬНОГО ТИПА С НЕЛИНЕЙНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ. II[1]

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Обсуждаются результаты решения внутренней граничной задачи электродинамики об электромагнитном поле в цилиндрическом резонаторе, частично заполненном нелинейным диэлектриком. Рассматриваются область применимости полученного решения, устойчивость решения и процесса.

1. Введение

Современные технологии изготовления материалов для применения в разнообразных радиофизических устройствах дают возможность синтезировать среды, чувствительные к напряжениям внешних источников. Например, такими средами являются широкоизвестные сегнетоэлектрики. Если на сегнетоэлектрик подать внешнее напряжение, которое изменяется во времени соответствующим образом, то диэлектрическая проницаемость этого материала будет также функцией времени, т.е. этот материал в данной ситуации становится нестационарным. При использовании сегнетоэлектриков в радиофизических устройствах открываются широкие возможности для электрического (т.е. очень быстрого) изменения собственной частоты колебаний, создания полосных частотных фильтров и т.д. Исследование резонаторов с нестационарными и нелинейными средами сталкивается с большими трудностями математического происхождения, если исследовать их при помощи стандартных разложений Фурье. Метод эволюционных уравнений [1] позволяет получить аналитические решения системы уравнений Максвелла, которые являются более простыми для изучения.

В классической электродинамике связь между плотностью конвекционного тока и напряженностью электрического поля чаще всего определяется соотношением $\vec{J}_\sigma = \sigma\vec{E}$. Такое материальное соотношение имеет смысл, когда напряженность поля мала. В действительности правая часть его является лишь первым членом разложения тока как функции напряженности поля по степеням $\vec{E}$. Естественно, когда абсолютное значение $\vec{E}$ мало, то члены разложения степени больше единицы можно не учитывать. В противном случае это пренебрежение может привести к принципиальным ошибкам.

2. Постановка задачи

Рассмотрим случай, когда в разложении плотности тока по степеням напряженности поля $\vec{E}$ нельзя пренебрегать членами до третьего включительно. Известно, что такие разложения плотности тока содержат только нечетные степени. Итак, в таком приближении плотность тока как функцию напряженности электрического поля можно записать следующим образом:

$$\vec{J}_\sigma\left(\vec{E},\vec{H}\right) = -\sigma\vec{E}(\vec{r},t) + \sigma_3\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right|^2\vec{E}(\vec{r},t),\ \sigma,\sigma_3 \equiv const > 0.$$

При этом учитываем другие материальные уравнения:

$$\vec{P}\left(\vec{E}\right) = \alpha_1\vec{E}(\vec{r},t), \quad \alpha_1 \equiv const,$$

$$\vec{J}_e(\vec{r},t) = \vec{J}_h(\vec{r},t) = 0, \quad \vec{M}\left(\vec{H}\right) = 0.$$

Для временных коэффициентов $e(t)$ і $h(t)$ получены аналитические представления через элементарные функции [3]:

$$e(t) = \frac{4\sqrt{\pi\sigma}}{\sqrt{3\sigma_3\zeta_n}\sqrt{1 + C_1\exp(-\xi_1 t)}}\sin\omega_0 t, \qquad (1)$$

$$ickh(t) = -\sqrt{\frac{\pi\sigma}{3\sigma_3\zeta}}\frac{1}{\sqrt{1 + C_1\exp(-\xi_1 t)}} \times$$

$$\times\left[\frac{16}{3}\pi\sigma\sin ckt + 4(1+\alpha_1\rho)ck\cos ckt + \right.$$

$$\left. + \frac{8\pi\sigma C_1\sin ckt\exp(-\xi_1 t)}{1 + C_1\exp(-\xi_1 t)}\right],$$

где $\xi_1 = \frac{4\pi\sigma}{1+\alpha_1\rho}$; c − скорость света; k − собственные значения, которые определяются из дисперсионного уравнения [2-4]; числовые коэффициенты ζ и ρ физически определяют преобразования вихревого мода пустого резонатора самого в себя в твердотельном диэлектрике, который заполняет область II [4](они являются некоторыми функциями геометрических параметров резонатора); постоянная интегрирования C_1 определяется из начальных условий. Проведем исследование полученного решения (1).

3. Область применимости и устойчивость решения

Подставляя (1) в дифференциальное уравнение (8) [4], получаем условие

$$\frac{80\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{3\zeta_n}\ (1+\alpha_1\rho_n)^{1/2}}\frac{\sigma\sqrt{\sigma}}{ck_n\sqrt{\sigma_3}} << 1,$$

которое определяет область применения полученного решения (1).

Устойчивость полученного решения определяется как устойчивость уравнения Ван-дер-Поля, которое в целях дальнейшего исследования заменяется на эквивалентную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2(t); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1(t) + \mu\left(1 - x_1^2(t)\right)x_2(t), \end{cases} \qquad (2)$$

где $\mu = \frac{4\pi\sigma\omega_0}{(ck_n)^2}$. Устойчивость решения этой системы определяется в сравнении с устойчивостью решения соответствующей линейной системы [5]. Очевидно, $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ − решение системы. Известно, что $\mu > 0$. Дальнейшие исследования доказывают неустойчивость решения. На фазовой плоскости особая

[1] − Продолжение. Начало см. в №4(05), 1998, с.22-24.

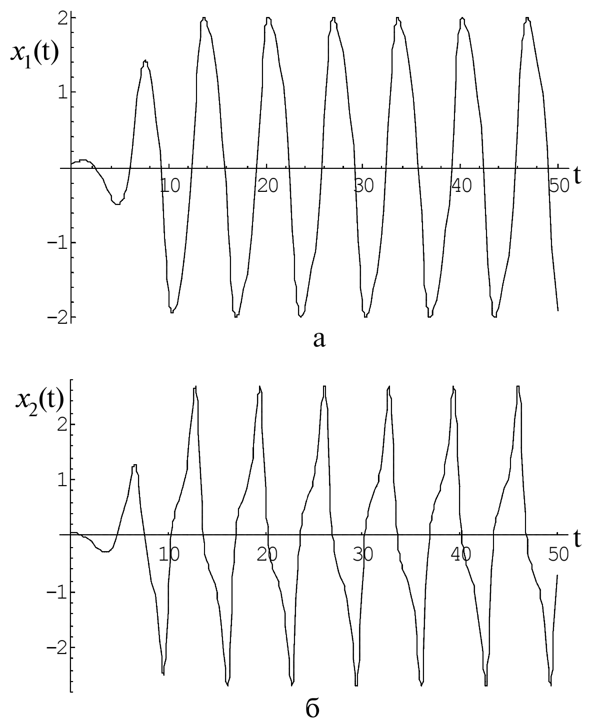

Рис. 1. Зависимость искомой функции от времени: а – x_1(t) ; б – x_2(t)

точка – неустойчивый фокус. Сам процесс является устойчивым.

Графическое решение этой системы для случая, когда $\mu = 1$, приведено на рис.1, а, б и на фазовой плоскости характеризуется особой точкой – неустойчивым фокусом. На рис.2 представлен переходной процесс и предельный цикл, который соответствует установившемуся режиму.

Для искомой амплитуды $A(t)$ получаем следующее выражение:

$$A = \frac{2}{\sqrt{1 + C_1 \exp(-\xi_1 t)}}.$$

Для случая, когда $\xi_1 = 0{,}085$, кривая установления амплитуды приведена на рис.3.

При разных начальных условиях можно получить семейство огибающих для амплитуд колебаний.

4. Заключение

Итак, в случае, когда связь между плотностью макроскопического тока и напряженностью электрического поля в среде в резонаторе нелинейная (с кубической нелинейностью), получена и решена соответствующая нелинейная система уравнений для временных коэффициентов. Решение исходной граничной задачи имеет вид произведения скалярных коэффициентов, зависящих от времени, и векторных базисных элементов, которые физически соответствуют собственным модам резонатора [3]. Векторные базисные элементы определены путем решения граничной задачи на собственные значения для лапласиана тем же самым способом, как и в классической электродинамике. Эволюционные уравнения для скалярных коэффициентов, зависящих от времени, получены путем проектирования уравнений Максвелла на базисные элементы. Полученная система эволюционных уравнений сводится к дифференциальному уравнению, описывающему нелинейные процессы в рассматриваемой системе. Для анализа движений в исследуемой нелинейной системе используется известный метод медленно меняющихся амплитуд. Временные коэффициенты для электромагнитного поля получены аналитически и выражены в терминах элементарных функций.

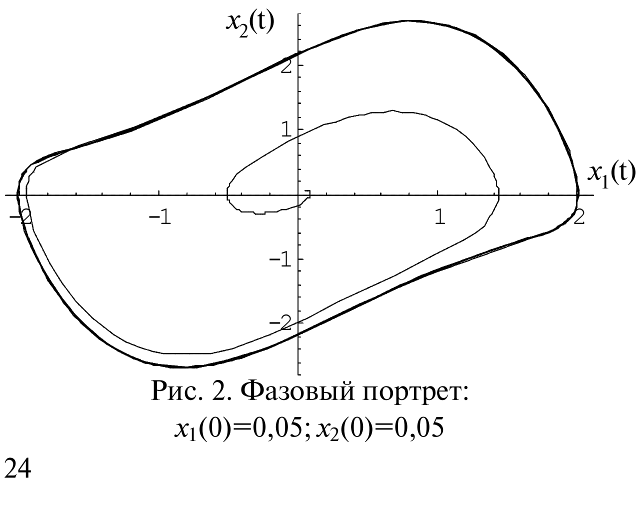

Рис. 2. Фазовый портрет: $x_1(0)=0{,}05$; $x_2(0)=0{,}05$

Доказано, что из общей системы уравнеий Максвелла, если решать ее методом модового базиса, в случае заполнения резонатора твердотельным нелинейным диэлектриком следует известное дифференциальное уравнение Ван-дер-Поля. Это свидетельствует о том, что электромагнитный резонатор с твердотельным нелинейным диэлектриком (например, сегнетоэлектриком) представляет собой автоколебательную систему, т. е. способен работать как генератор электромагнитных колебаний.

Литература. 1. *Третьяков О.А.* Метод модового базиса // Радиотехника и электроника. 1986. №6. С.1071-1082. 2. *Чумаченко С.В.* Уравнение собственных частот и добротность цилиндрического резонатора с двумя независимыми элементами настройки // Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 2(03). С. 6-8. 3. *Чумаченко С.В.* Электромагнитные колебания в резонаторе коаксиального типа с нелинейным диэлектриком// Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 4(05). С. 22-24. 4. *Чумаченко С.В.* Настроювальні криві для циліндричного резонатора з коаксіальним виступом// Радиоэлектроника и информатика. 1999. № 1(06). С. 12-13. 5. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1969. 400 с.

Поступила в редколлегию 21.05.99

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Мазманишвили А.С.

Чумаченко Светлана Викторовна, инженер кафедры АПВТ ХТУРЭ. Научные интересы: методы решения внутренних и внешних граничных задач со сложными граничными условиями, теория электромагнитных полей во временной области. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-26.

Рис. 3. Кривая зависимости амплитуды от времени