УДК 519.21/23

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ МАРКОВСКИЕ СИСТЕМЫ С ДОМИНИРУЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

ГЕРАСИН С.Н.

Рассматривается вопрос о нахождении асимптотик решений системы уравнений Колмогорова для двух взаимодействующих марковских систем, связи между которыми значительно превышают соответствующие характеристики компонент.

Анализ различных производственных ситуаций часто приводит к рассмотрению стохастических систем, процессы в которых по своим свойствам мало отличаются от систем, описываемых марковскими процессами. При этом в таких системах зачастую можно выделить подсистемы, обладающие тем же свойством — процессы в них мало отличаются от марковских. Указанные подсистемы объединяются в единое целое посредством связей. Во многих случаях эти связи малы по сравнению с соответствующими характеристиками взаимодействующих систем. Однако довольно часто они превалируют над соответствующими характеристиками подсистем. Рассмотрению последнего случая посвящена данная статья.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется два марковских процесса с конечным числом состояний, поведение которых описывается системами прямых уравнений Колмогорова для вероятностей состояний [1]

$$P_1(t) = P_1(t)\Lambda_1,\ \ P_2(t) = P_2(t)\Lambda_2 .$$

Здесь $P_1(t), P_2(t)$ — вектор вероятностей состояний размерности n и m соответственно. Матрицы Λ_1 и Λ_2 принято называть квазистохастическими. Элементы λ_{ij} этих матриц определяются через переходные вероятности по формулам

$$\lambda_{ij} = \lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)}{h} \ge 0, i \ne j,\quad \lambda_{ii} = \lim_{h\to 0}\frac{P_{ii}(h)-1}{h} \le 0.$$

Кроме того, предполагается, что

$$\sum_{j\ne i}\lambda_{ij} = \lambda_i ,$$

т.е. сумма всех элементов каждой строки равна 0. Дополнительно будем считать, что рассматриваемые процессы эргодические. Это означает, что спектры матриц Λ_1 и Λ_2 обладают особенностями. Действительно, среди собственных значений матриц Λ_1 и Λ_2 имеется ноль, причем он имеет простую кратность, остальные собственные значения должны иметь отрицательные действительные части. Предположим, что матрицы Λ_1 и Λ_2 зависят от переменной t так, что в каждый фиксированный момент времени отвечающие им процессы остаются эргодическими. Системы

$$P_1(t) = P_1(t)\Lambda_1(t)\ , \tag{1}$$

$$P_2(t) = P_2(t)\Lambda_2(t)\ , \tag{2}$$

можно записать в едином виде следующим образом:

$$P(t) = A_1(t)P(t)\ , \tag{3}$$

где $P(t)$ — вектор размерности $(n+m)$ вида $P(t) = (P_1(t); P_2(t))$, а матрица $A_1(t)$ имеет блочно-диагональную структуру:

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_1^T(t) & 0 \\ 0 & \Lambda_2^T(t) \end{pmatrix},$$

T — символ транспонирования.

Заметим, что $A_1(t)$ не является матрицей эргодического процесса, поскольку имеет среди собственных значений ноль кратности два. Этот факт проверяется непосредственно. Допустим, что оба изучаемых процесса взаимодействуют между собой, причем связи между ними значительно больше, чем соответствующие связи взаимодействующих процессов. В этом случае моделью полученной взаимодействующей системы является

$$P(t) = \left(A_1(t) + \omega A_0(t)\right)P(t)\ , \tag{4}$$

где $A_0(t)$ — матрица, определяющая взаимодействие между процессами; ω — большой параметр. Система (4) также определяет некоторый эргодический процесс, следовательно, спектр матрицы $A_1(t) + \omega A_0(t)$ отличается от спектра матрицы $A_1(t)$: ноль является ее простым собственным значением.

Разделим обе части уравнения (4) на ω, в результате получим уравнение с малым параметром $\varepsilon = \omega^{-1}$ при производной

$$\varepsilon P(t) = \left(A_0(t) + A_1(t)\varepsilon\right)P(t)\ . \tag{5}$$

Методы решения систем типа (5) изложены в работах [2–4]. Найдём линейно-независимую систему решений (5) в предположении, что спектр матрицы $A_0(t)$ прост. Опишем процесс нахождения ВКБ — асимптотик решения системы (5). Пусть $b_0(t)$ — простое собственное значение матрицы $A_0(t)$, а $V_0(t)$ — отвечающий ему собственный вектор. Решение системы (5) будем искать в следующем виде:

$$P(t,\varepsilon) = \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t} b_0(s)ds\right)\sum_{i=0}^{\infty} C_i(t)\varepsilon^i\ , \tag{6}$$

здесь $C_i(t)$ — неизвестные вектор-функции размерности $(n+m)$. Решение системы (5) определяется видом этих вектор-функций. Подставим выражение (6) в уравнение (5) и соберем слагаемые при соответствующих степенях малого параметра. В результате получим следующий набор равенств (в целях упрощения записи зависимость от времени будем опускать):

$$\varepsilon^0\ \left(A_0 - b_0 I\right)C_0 = 0\ , \tag{7}$$

$$\varepsilon^1\ \left(A_0 - b_0 I\right)C_0 = C_0^1 - A_1 C_0\ , \tag{8}$$

. . . .

$$\varepsilon^{n+1}\left(A_0 - b_0 I\right)C_{n+1} = C_n^1 - A_1 C_n\ . \tag{9}$$

Пусть $V_0(t)$ — собственный вектор матрицы $A_0(t)$, отвечающий собственному значению $b_0(t)$. Тогда из равенства (7) следует, что $C_0 = \varphi_0 \nu_0$, где $\varphi_0(t)$ — скалярная функция, подлежащая определению. Поскольку C_0 входит и в (8), то для разрешимости (8) необходимо и достаточно, чтобы правая часть (8) была ортогональна вектору $V_0^*(t)$, который является собственным вектором сопряженной матрицы $A^*(t)$ и отвечает собственному значению $b_0(t)$:

$$C_0 - A_1 C_0 \perp V_0^*, \qquad (10)$$

$$(A^* - b_0 I)V_0^* = 0.$$

Из (10) получаем

$$(\varphi_0' \nu_0 + \varphi_0 \nu_0' - A_1 \varphi_0 \nu_0, V_0^*) = 0.$$

Учитывая биортогональность V_0 и V_0^*, имеем

$$\varphi_0' + \varphi_0(\nu_0' - A_1 \nu_0, V_0^*) = 0. \qquad (11)$$

Решая уравнение (11), найдём $\varphi_0(t)$, а вместе с тем и $C_0(t)$, удовлетворяющие уравнениям (7), (8). Действуя по индукции, будем считать векторы $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ известными. Получим теперь алгоритм для нахождения вектора C_n.

Из уравнения

$$(A_0 - b_0 I)C_n = C_{n-1} - A_1 C_{n-1} \qquad (12)$$

найдем C_n, обозначим его $C_n{}^0$ и заметим, что $C_n{}^0$, вообще говоря, не удовлетворяет (9). Будем искать C_n в виде

$$C_n = C_n{}^0 + \varphi_n \nu_0. \qquad (13)$$

Вставим (13) в уравнение (8) и потребуем ортогональности правой части (8) вектору $\nu_n{}^*$:

$$C_n{}' - A_1 C_n \perp \nu_0^*,$$

$$(C_n^{o\,\prime} + \varphi_n{}' \nu_0 + \varphi_n \nu_0{}' - A_1 C_n^0 - A_1 \varphi_n \nu_0, \quad \nu_0{}^*) = 0, \qquad (14)$$

$$(C_n^{o\,\prime} + A_1 C_n{}^0, \nu_0{}^*) + \varphi_n{}' + \varphi_n(\nu_0{}' - A_1 \nu_0, \nu_0{}^*) = 0.$$

Последнее слагаемое в (14) равно нулю ввиду условия (10). Таким образом, уравнение для определения φ_n, а значит и C_n имеет вид

$$\varphi_n{}' = \varphi_n(A_1 C_n{}^0 - C_n^{0\,\prime}, \nu_0^*), \qquad (15)$$

здесь $C_n{}^0$ определяется индуктивно.

Описанный выше процесс нахождения асимптотики можно связать со всеми простыми собственными значениями матрицы A_0. Тогда решения

$$P_k(t, \varepsilon) = l^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t b_k(s)ds}(C_0 + C_1\varepsilon + \ldots),$$

$$k = \overline{0, n+m-1}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (4).

Опишем теперь процесс построения асимптотик для решений системы (1), соответствующих собственному значению, кратность которого в области изменения t сохраняется и больше единицы.

Итак, $b(t)$ — собственное число кратности $l > 1$. Решение системы (5), соответствующее этому собственному значению, будем искать в том же виде (6). Тогда уравнения (7) и (9) примут вид

$$(A_0 - bI)C_0 = 0, \qquad (16)$$

$$(A_0 - bI)C_{n+1} = C_n - A_1 C_n, \qquad (17)$$

для нахождения векторов $C_n(t)$ следует решать систему (17). Как и ранее, будем искать C_n так, чтобы система (17) была разрешима. Сначала опишем процесс нахождения вектора C_0.

Пусть

$$C_0 = \sum_{i=1}^{p} d_i \nu_i, \qquad (18)$$

где $\nu_i(t)$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $b(t)$, а $d_i(t)$ — неизвестные скалярные функции.

Для того чтобы система (17) имела решения при $n = 0$, достаточно потребовать выполнения условия

$$((C_0 - A_1 C_0), \nu_i^*) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \qquad (19)$$

Здесь $\nu_i^*(x)$ — собственные векторы матрицы A_0^*, отвечающие собственному значению $\bar{b}(x)$ и биортогональные векторам $\nu_i(x)$:

$$(\nu_i, \nu_j{}^*) = \delta_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

Для определения неизвестных функций $d_i(t)$ подставим (18) в (19). В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$d_i{}' = \sum_{j=1}^{l} d_i((\nu_j{}' - A_1 \nu_j), \nu_l), \quad i = 1, 2, \ldots, l. \qquad (20)$$

Пусть $(d_{1i}, d_{2i}, \ldots, d_{li}) \quad (i = 1, 2, \ldots, l)$ линейно-независимые решения системы (20). Им соответствуют l линейно-независимых векторов $C_{0i}(t), \ldots, C_{0l}(t)$. В отличие от уравнения (11) система (20) не интегрируется в квадратурах, поэтому ее следует решать числено одним из известных методов, например, Рунге—Кутта. Заметим, что система (20) не содержит малого параметра и ее порядок меньше, чем порядок исходной системы, в противном случае матрица системы (1) скалярна.

Процесс нахождения функции $C_0, C_1, \ldots, C_n$ осуществляется по индукции. Допустим, что функции $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ найдены. Тогда из (17) можно найти C_n и учесть, что для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно выполнения условия

$$((C_n{}' - A_1 C_n), \nu_j{}^*) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, l). \qquad (21)$$

Вектор C_n будем искать в виде

$$C_n = Z_n + \sum_{i=1}^{1} \varphi_i C_{0i}, \qquad (22)$$

где $\varphi_i(t)$ — неизвестные скалярные функции, а $Z_n(t)$ — частное решение системы (19). Вставим (22) в уравнение (21), в результате получим

$$((Z_n' - A_1 Z_n), \nu_j^*) +$$
$$+(\sum_{i=1}^{1} \varphi_i' C_{0i}, \nu_j^*) + \sum_{i=1}^{1} \varphi_i (C_{0i} - A_1 C_{0i}, \nu_j^*) = 0 .$$

Но последнее слагаемое ввиду (21) равно нулю. Учитывая биортогональность C_{0i} и ν_j^*, получаем

$$\varphi_i' = (A_1 Z_n - Z_n', \nu_j^*) . \qquad (23)$$

Система (23) сводит нахождение векторов $C_1,...,C_n$ к интегрированию. Таким образом, если на всём временном интервале матрица A_0 сохраняет постоянную кратность своих собственных значений, то такие асимптотические разложения можно построить для всех собственных значений.

Выводы. Построение ВКБ — асимптотик решений системы уравнений Колмогорова для взаимодействующих марковских процессов позволяют исследовать поведение вероятностей состояний $P_j(t)$ и переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ в любые моменты времени, т.е. до выхода на стационарный режим. Кроме того, описанный подход позволяет делать качественные выводы о поведении решений при изменении связей между системами.

Литература: 1. *Баруча—Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 512 с. 2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1968. 464 с. 3. *Герасин С.Н.* Расчет вероятностей состояний при взаимодействии марковских процессов// Дифференциальные уравнения и прикладные задачи, Тула, 1995. С. 123—127. 4. *Дикарев В.А.* О приведении к простейшему виду системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной // Дифференциальные уравнения, 1977. Т.13, №8. С. 1384—1389.

Поступила в редколлегию 30.11.1998

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Яковлев С.В.

Герасин Сергей Николаевич, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, стохастический анализ, теория процессов Маркова. Адрес:Украина, 310166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40—93—72.

e—mail: hm@kture.ua.