СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.2.089

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АПЕРИОДИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ МЕТОДОМ ПРОНИ

ЗАХАРОВ И.П., СЕРГИЕНКО М.П.

Описывается методика идентификации переходных характеристик апериодических измерительных преобразователей, заключающаяся в их дискретном измерении с последующим оцениванием параметров методом Прони. Рассматриваются погрешности метода и определяются условия их минимизации.

Одной из *актуальных* задач современного приборостроения является метрологическое обеспечение динамических измерений, поскольку радиоэлектронные системы различного назначения часто приходится использовать в динамических режимах [1]. При этом необходимо учитывать полные динамические характеристики входящих в их состав измерительных преобразователей (ИП). При определении динамических характеристик ИП предпочтение отдают тем из них, которые измеряются с наибольшей точностью [2]. Этому требованию в ряде случаев соответствует переходная характеристика (ПХ), особенно когда формирование импульсного воздействия является единственно возможным. Одним из важнейших этапов нахождения ПХ ИП является идентификация. Задачи идентификации ПХ решены для ИП, моделируемых апериодическим звеном первого порядка [3-6], поскольку проведение идентификации ПХ ИП более высокого порядка затрудняется необходимостью решения системы нелинейных уравнений. *Целью* данной работы является нахождение метода, позволяющего производить идентификацию ПХ ИП, моделируемых звеньями произвольного порядка. Задачи исследования – анализ погрешностей этого метода и разработка алгоритмов их минимизации.

Нормированная по статическому коэффициенту преобразования ПХ $h(t)$ апериодического ИП в общем случае может быть представлена в виде

$$h(t)=\begin{cases}0, t<0;\\ 1-\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_i}\right), t\ge 0,\end{cases} \qquad (1)$$

где τ_i – постоянные времени звеньев модели; A_i – постоянные коэффициенты, $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=1$.

При дискретном измерении характеристика (1) имеет вид системы уравнений:

$$h(j\Delta t)=\begin{cases}0, t<0;\\ 1-\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\exp\left(-\dfrac{j\Delta t}{\tau_i}\right), t\ge 0,\end{cases} \qquad (2)$$

здесь Δt – период дискретизации; $j=0,1,2,\ldots,k$.

Решение задачи идентификации ПХ (2) может быть осуществлено методом Прони [7].

После замены

$$1-h(j\Delta t)=C_j, \qquad (3)$$

$$\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right)=X_i \qquad (4)$$

система (2) преобразуется к виду

$$C_j=\sum_{i=1}^{n}A_iX_i^j. \qquad (5)$$

Для определения параметров A_i и X_i методом Прони необходимо:

1) измерить ПХ в $k=2n$ точках через интервал дискретизации Δt и рассчитать параметры C_j согласно выражению (3);

2) записать $n\times n$ матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}C_n & C_{n-1} & \ldots & C_1\\ C_{n+1} & C_n & \ldots & C_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{2n-1} & C_{2n-2} & \ldots & C_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}C_{n+1}\\ C_{n+2}\\ \vdots\\ C_{2n}\end{pmatrix}, \qquad (6)$$

из которого вычислить вспомогательные параметры a_m ($m=1,2,\ldots,n$) по формуле

$$a_m=\frac{D_m}{D}, \qquad (7)$$

где $D=\begin{vmatrix}C_n & C_{n-1} & \ldots & C_1\\ C_{n-1} & C_n & \ldots & C_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{2n-1} & C_{2n-2} & \ldots & C_n\end{vmatrix}$ – главный определитель системы (6), D_m – определитель, образующийся путем замены m-го столбца главного определителя столбцом свободных членов;

3) рассчитать X_i как корни характеристического уравнения

$$\Phi(X)=\sum_{m=0}^{n}a_mX^{n-m}, \qquad (8)$$

в котором $a_0=1$;

4) рассчитать по формуле (3) постоянные времени

$$\tau_i = \frac{\Delta t}{\ln X_i}; \qquad (9)$$

5) определить коэффициенты A_i путем подстановки найденных значений X_i в первые n уравнений системы (5).

Оценим целесообразность применения данного метода для идентификации ПХ ИП на примерах апериодических измерительных преобразователей, описываемых моделями первого и второго порядка в предположении, что на измеряемый входной сигнал накладывается аддитивный шум (например, тепловой шум ИП, шум квантования АЦП) со среднеквадратическим отклонением (СКО) σ_C.

1. Модель первого порядка

В этом случае ИП имеет передаточную функцию

$$H(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1}$$

и соответственно ПХ

$$h(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}, t \ge 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Согласно методу Прони для нахождения параметров ПХ необходимы результаты двух измерений C_1 и C_2. Тогда $a_1 = -\frac{C_2}{C_1}$ (выражение (7)), $X_1 = -a_1 = \frac{C_2}{C_1}$ (выражение(8)), а постоянная времени определяется из выражения (9): $\tau_1 = -\frac{\Delta t}{\ln X_1} = -\frac{\Delta t}{\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)}$. Из формулы (10) видно, что коэффициент A_1 должен равняться единице.

Рассмотрим зависимость СКО определения постоянной времени τ_1 (σ_{τ_1}) от СКО определения C_1 и C_2 ($\sigma_{C_1} = \sigma_{C_2} = \sigma_C$).

СКО постоянной времени τ_1 находится в соответствии с формулой

$$\sigma_{\tau_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial C_1}\right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial C_2}\right)^2 \sigma_C^2},$$

представляющей собой выражение СКО косвенных измерений [8].

После дифференцирования и упрощения получаем отношение относительного СКО $\tilde{\sigma}_{\tau_1} = \frac{\sigma_{\tau_1}}{\tau_1}$ определения τ_1 к СКО определения C_1 и C_2:

$$\frac{\tilde{\sigma}_{\tau_1}}{\sigma_C} = \frac{\Delta t}{\tau_1 \ln^2\left(\frac{C_2}{C_1}\right)} \sqrt{\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2}}.$$

Если C_1 и C_2 записать посредством выражений (3) и (10), то можно найти зависимости $\frac{\tilde{\sigma}_{\tau_1}}{\sigma_C}$ от $\frac{\Delta t}{\tau_1}$ (рис. 1).

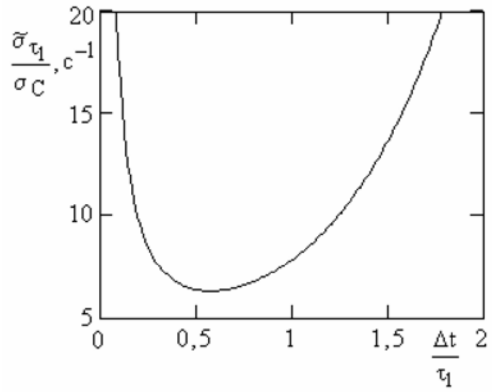


Рис.1. Зависимость $\frac{\tilde{\sigma}_{\tau_1}}{\sigma_C}$ от $\frac{\Delta t}{\tau_1}$

Кривая, приведенная на рис.1, имеет минимум в точке $\frac{\Delta t}{\tau_1} = 0{,}569$, который равен $\left[\frac{\tilde{\sigma}_{\tau_1}}{\sigma_C}\right]_{min} = 6{,}302$, т. е. по предварительно определенному значению τ_1 можно найти оптимальное значение периода дискретизации, при котором отношение $\frac{\tilde{\sigma}_{\tau_1}}{\sigma_C}$ будет минимальным.

Отсюда следует, что измерения нужно проводить несколько раз, каждый раз уточняя значение периода дискретизации.

2. Модель второго порядка

Передаточная функция такой модели в общем случае имеет вид

$$H(s) = \frac{\tau_3 s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)},$$

а ПХ соответственно

$$h(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ 1 - A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}, t \ge 0, \end{cases} \qquad (11)$$

при этом $A_1 + A_2 = 1$, т.е. $A_1 = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_2}$, $A_1 = \frac{\tau_2 - \tau_3}{\tau_2 - \tau_1}$.

При аппроксимации ПХ такой моделью для расчета по методу Прони необходимо измерить ее в четырех точках через равные промежутки времени Δt и получить четыре значения C_1, C_2, C_3 и C_4. Далее рассчитывают необходимые параметры:

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} -C_3 & C_1 \\ -C_4 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_2 & C_1 \\ C_3 & C_2 \end{vmatrix}}, \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} C_2 & -C_3 \\ C_1 & -C_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_2 & C_1 \\ C_3 & C_2 \end{vmatrix}}$$

(выражение(7)); X_1 и X_2 определяют как корни характеристического уравнения $X^2 + a_1X + a_2 = 0$. Постоянные времени рассчитывают по формуле (9). Коэффициенты A_1 и A_2 определяют из системы (5)

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & X_2 \\ C_2 & X_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{vmatrix}}, \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} X_1 & C_1 \\ X_1^2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1^2 & X_2^2 \end{vmatrix}}. \qquad (12)$$

Постоянную времени τ_3 находят по формуле $\tau_3 = A_1\tau_2 + A_2\tau_1$.

Определим СКО, с которыми находятся все перечисленные параметры, в зависимости от СКО измерения ПХ. Как и в предыдущем примере, будем полагать $\sigma_{C_1} = \sigma_{C_2} = \sigma_{C_3} = \sigma_{C_4} = \sigma_C$.

Постоянные времени τ_1 и τ_2 определяют как $\tau_{1,2} = -\dfrac{\Delta t}{\ln X_{1,2}}$, следовательно, отношения относительных СКО их нахождения к СКО измерения ПХ (т.е. σ_C) соответственно будут равны

$$\frac{\tilde{\sigma}_{\tau_{1,2}}}{\sigma_C} = \frac{1}{\tau_{1,2}} \frac{\partial \tau_{1,2}}{\partial X_{1,2}} \frac{\sigma_{X_{1,2}}}{\sigma_C}, \qquad (13)$$

где

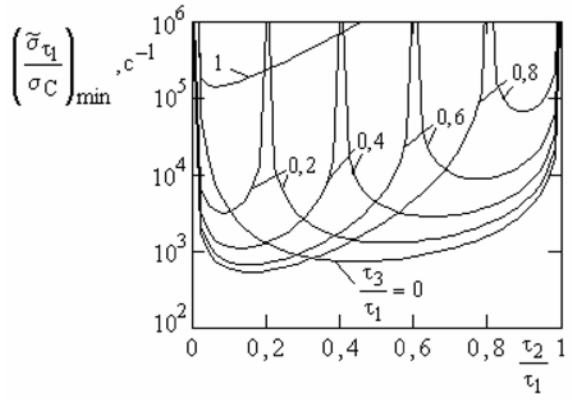
$$\frac{\sigma_{X_{1,2}}}{\sigma_C} = \sqrt{\left(\frac{\partial X_{1,2}}{\partial a_1}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{a_1}}{\sigma_C}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_{1,2}}{\partial a_2}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{a_2}}{\sigma_C}\right)^2},$$

$$\frac{\sigma_{a_{1,2}}}{\sigma_C} = \sqrt{\left(\frac{\partial a_{1,2}}{\partial C_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_{1,2}}{\partial C_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_{1,2}}{\partial C_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_{1,2}}{\partial C_4}\right)^2}.$$

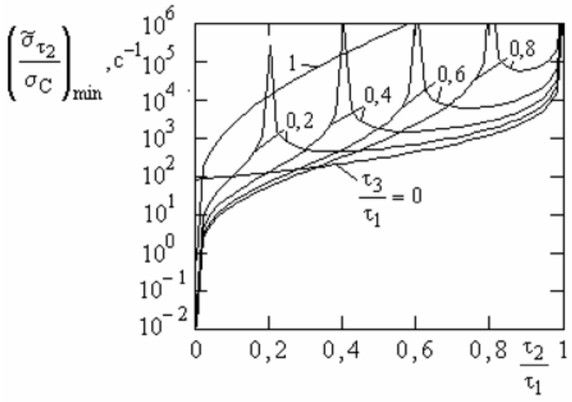
Зависимости отношений $\dfrac{\tilde{\sigma}_{\tau_1}}{\sigma_C}$ и $\dfrac{\tilde{\sigma}_{\tau_2}}{\sigma_C}$ для различных соотношений $\dfrac{\tau_2}{\tau_1}$ (при условии $\tau_1 > \tau_2$) и $\dfrac{\tau_3}{\tau_1}$ ($\tau_1 > \tau_3$) имеют минимумы аналогично зависимости, приведенной на рис.1. Зависимости минимумов отношений $\dfrac{\tilde{\sigma}_{\tau_1}}{\sigma_C}$ и $\dfrac{\tilde{\sigma}_{\tau_2}}{\sigma_C}$ от соотношения $\dfrac{\tau_2}{\tau_1}$ для различных соотношений $\dfrac{\tau_3}{\tau_1}$ приведены соответственно на рис. 2 (а и б).

Из рис. 2 видно, что погрешность значительно возрастает, когда какие-либо постоянные времени близки друг другу.

Оптимальные значения отношений $\dfrac{\Delta t}{\tau_1}$ для характеристик, приведенных на рис. 2 (а и б), даны в таблице (для τ_1 – верхнее значение, для τ_2 – нижнее).



а



б

Рис.2. Зависимости минимумов СКО погрешностей определения постоянных времени τ_1 (а) и τ_2 (б)

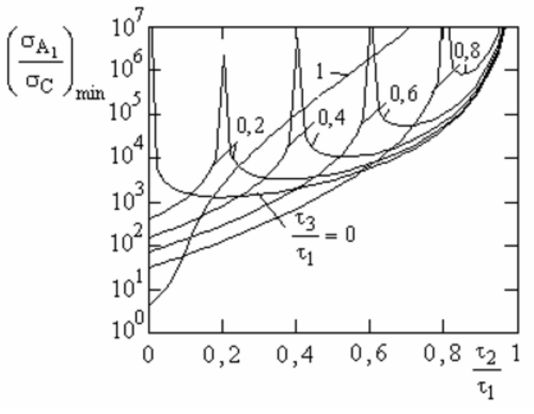
	τ_3 / τ_1					
τ_2 / τ_1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	0,000 0,000	0,000 0,000	0,000 0,000	0,000 0,000	0,000 0,000	0,001 0,000
0,1	0,190 0,135	0,192 0,137	0,195 0,139	0,199 0,142	0,211 0,151	0,384 0,350
0,2	0,351 0,267	0,354 0,270	0,360 0,274	0,369 0,282	0,391 0,301	0,546 0,539
0,3	0,487 0,392	0,492 0,397	0,500 0,404	0,514 0,417	0,543 0,446	0,676 0,666
0,4	0,603 0,510	0,610 0,517	0,620 0,527	0,637 0,544	0,671 0,580	0,786 0,768
0,5	0,703 0,619	0,711 0,627	0,723 0,639	0,742 0,660	0,778 0,700	0,878 0,855
0,6	0,788 0,718	0,797 0,728	0,810 0,742	0,831 0,764	0,868 0,806	0,957 0,931
0,7	0,861 0,807	0,871 0,818	0,885 0,833	0,906 0,856	0,943 0,896	1,023 0,997
0,8	0,924 0,887	0,934 0,898	0,949 0,913	0,970 0,936	1,006 0,974	1,077 1,056
0,9	0,977 0,959	0,988 0,970	1,002 0,985	1,024 1,007	1,058 1,042	1,121 1,109
1,0	1,020 1,015	1,030 1,030	1,040 1,045	1,070 1,060	1,100 1,100	1,150 1,157

По таблице аналогично, как это было показано в предыдущем примере, необходимо уточнять значения оптимального периода дискретизации Δt по рассчитанным значениям постоянных времени.

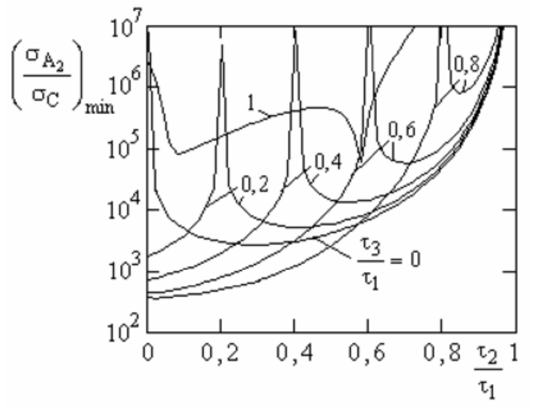
При сравнении данных из таблицы обнаруживается, что оптимальные значения Δt для более точного определения τ_1 и τ_2 различны. С другой стороны, из рис. 2 видно, что СКО определения τ_1 больше, чем τ_2, следовательно, целесообразно минимизировать погрешность определения τ_1 (т.е. использовать при измерениях период дискретизации, оптимальный для τ_1). Но для повышения точности определения постоянных времени рекомендуется использовать оптимальный для каждой из них период дискретизации.

СКО определения коэффициентов A_1 и A_2, которые находят с помощью формул (12), рассчитывают как СКО косвенных измерений путем дифференцирования этих формул по C_1, C_2, X_1, X_2 аналогично выражению (13).

Зависимости минимальных СКО определения коэффициентов A_1 и A_2 от соотношений $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ для разных соотношений $\frac{\tau_3}{\tau_1}$ рассчитывают с использованием периода дискретизации, оптимального для τ_1 (рис.3).



а



б

Рис.3. Зависимости минимумов СКО определения коэффициентов A_1 (а) и A_2 (б)

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1) в отличие от других методов определения параметров ПХ [1, 3-6], использование метода Прони позволяет осуществлять идентификацию ПХ апериодических ИП произвольного порядка. При этом необходимо, чтобы порядок ИП был известен. Время, затрачиваемое на идентификацию, зависит от требуемой точности результатов измерений;

2) при определении постоянных времени в соответствии с указанным алгоритмом для минимизации погрешности целесообразно период дискретизации выбирать в зависимости от соотношения постоянных времени;

3) постоянные времени рекомендуется определять путем постепенного приближения, уточняя оптимальные для них периоды дискретизации (для каждой постоянной времени свой оптимальный период дискретизации).

Перспективой развития данного метода является метод наименьших квадратов Прони.

Литература: 1. *Грановский В.А.* Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 220 с. **2.** *ГОСТ 8.009-84* ГСИ. Нормирование и использование метрологических характеристик средств измерений. М: Изд-во стандартов, 1988. 38 с. **3.** *Теумин И.И.* Справочник по переходным электрическим процессам. М.: Связьиздат, 1952. 410 с. **4.** *Захаров И.П.* Определение постоянной времени апериодических измерительных преобразователей// Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1988. № 1. С. 58-61. **5.** *Шумков Ю.С.* Оценка погрешности определения динамических характеристик линейных аналоговых устройств // Техническая электродинамика. 2001. № 6. С.72-76. **6.** *Бойков И.В.* Метод определения динамических характеристик при использовании реального испытательного сигнала// Измерительная техника. 1991. № 1. С. 9-10. **7.** *Марпл С.Л. (мл.)* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир. 1990. 584 с. **8.** *Захаров И.П.* Теоретическая метрология. Харьков, 2000. 172 с.

Поступила в редколлегию 17.10.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Павленко Ю.Ф.

Захаров Игорь Петрович, канд. техн. наук, доцент кафедры метрологии и измерительной техники ХНУРЭ. Научные интересы: измерительная идентификация. Адрес: Украина, 61066, Харьков, пр. Ленина,14, тел. 702-13-31.

Сергиенко Марина Петровна, инженер кафедры метрологии и измерительной техники ХНУРЭ. Научные интересы: динамические измерения. Адрес: Украина, 61066, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-13-31.