УДК 519.6

ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ СУМ ФУР'Є, ФЕЙЄРА ТА СПЛАЙНІВ

Уколова К.В.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Литвин О.Г.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна
тел. (057) 702-14-36, email: kateryna.ukolova@nure.ua

This work is focused on the reconstruction of discontinuous functions of two variables based on their known projection data obtained from a CT scanner. Three solution methods are implemented and compared. When the Fourier or Fejér finite sum methods are used directly, the Gibbs phenomenon occurs. The method based on discontinuous splines allows to eliminate it when used in combination with the methods mentioned above. To demonstrate this, a computational experiment was conducted, and the results confirm the effectiveness of the method.

Вважаємо, що функція $f(x,y)$ є розривною з відомими лініями розриву. Відомі проекційні дані γ_k вздовж прямих L_k:

$$\int\limits_{L_k} f(x,y)dl = \gamma_k,\ k = 1,...,Q.$$

Треба відновити цю функцію. Методи для розв'язання такої проблеми наведено в роботах [1,2]. Відмічаємо наступні моменти:

1. При реалізації методу скінченних сум Фур'є розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\tilde{f}(x,y) = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},\ F_{k,l} = \iint\limits_{D} f(x,y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dxdy.$$

2. При реалізації методу скінченних сум Фейєра розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\tilde{f}(x,y) = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right)\left(1 - \frac{|l|}{N+1}\right) F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},$$

$$F_{k,l} = \iint\limits_{D} f(x,y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dxdy.$$

3. При реалізації методу, заснованого на використанні розривних сплайнів в комбінації з методами, зазначеними в пунктах 1, 2, виділяється нерозривна складова $\varphi(x,y)$ функції $f(x,y)$. Ця функція відновлюється за допомогою методів, розглянутих в цих пунктах:

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - Sp(x,y).$$

Тут $Sp(x,y)$ – розривна сплайн-функція, яка наближує задану функцію і має на вказаних лініях такі ж розриви першого роду, як і наближувана функція. Використовуємо метод побудови розривного сплайна, викладений у роботі [1].

Відновлюємо функцію $\varphi(x,y)$ за допомогою методу скінченних сум Фур'є або Фейєра, наведеного у роботі [2]. Враховуючи, що ця функція не має розривів, її можна наближувати за допомогою відповідних сум без явища Гіббса. Це функція $\tilde{\varphi}_N(x,y)$. Тут N – порядок суми Фур'є.

$$\tilde{\varphi}_N(x,y) = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},\ F_{k,l} = \iint_D \varphi(x,y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dxdy .$$

Далі використовуємо для аналізу наближення функції $f(x,y)$ суму побудованого вище сплайна та наближення функції $\varphi(x,y)$ сумами Фур'є або Фейєра, тобто $\tilde{f}(x,y) = Sp(x,y) + \tilde{\varphi}_N(x,y)$.

Розглянуто приклад відновлення розривної функції для випадку однієї лінії розриву, що є границею квадрата. Результати обчислення похибок наведено в табл. 1. У рядках I, II отримані результати з впливом явища Гіббса, у рядках III, IV отримані результати без впливу явища Гіббса.

Таблиця 1 – Порівняння точності методів Фур'є та Фейєра

Метод N=24	Абсолютна похибка	Відносна похибки	Середньоквадратична похибка
I. Фур'є	6,339	0,634	0,660
II. Фейєра	6,232	0,623	0,839
III. Фур'є+сплайн	0,036	0,0036	0,0039
IV. Фейєра+сплайн	0,034	0,0034	0,0062

Порівняння похибок, наведених у табл. 1, показує переваги досліджуваного методу (пункт 3) для розривних функцій.

Список використаних джерел:

1. Lytvyn, O.M., Lytvyn O.G., Lytvyn O.O., & Mezhuyev, V.I. (2020). The Method of Reconstructing Discontinuous Functions Using Projections Data and Finite Fourier Sums. *The IX International Scientific and Practical Conference «Information Control Systems & Technologies (ICST-2020)*, *24–26 of September 2020, Odesa*, 661–673.

2. Литвин, О.М. (2000) Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії. *Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харк. держ. політех. ун-ту*, 125, 27–35.