

УВЯЗОЧНЫЙ РАСЧЕТ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ЦВМ МЕТОДОМ СКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Э. Н. Рыбников

Харьков

Увязочный расчет сложных кольцевых гидравлических сетей достаточно сложен и трудоемок, поэтому в последнее время для его проведения используются цифровые вычислительные машины (ЦВМ). Программы увязочного расчета, предназначенные для различных ЦВМ, как правило, используют один из методов: Лобачева-Кросса, М. М. Андрияшева, Ньютона, Гаусса-Зейделя, модифицированный метод Ньютона, либо метод, представляющий модификацию одного из перечисленных методов. Это объясняется тем, что фактически увязочный расчет заключается в решении системы нелинейных уравнений, а математических методов решения таких систем имеется достаточное количество.

Используя обозначения, математическую модель потокораспределения, целенаправленное кодирование сети и другие результаты, приведенные в [1], рассмотрим задачу увязочного расчета гидравлической сети на ЦВМ при использовании метода скорейшего спуска (метода градиента).

Как указано в работе [1], увязочный расчет гидравлической сети заключается в решении системы l нелинейных уравнений

$$f_r = \text{sign } q_r S_r |q_r|^{n_r} + \text{sign } q_r S_r^M |q_r|^{n_r} + \\ + \sum_{i=s+1}^m k_{ri} [\text{sign } q_i S_i |q_i|^{n_i} + \text{sign } q_i S_i^M |q_i|^{n_i}] = 0 \quad (r = 1, \dots, l) \quad (1)$$

при $n-2$ линейных уравнениях связи

$$q_i = \sum_{r=1}^l k_{ri} q_r + \sum_{r=l+1}^s k_{ri} q_r \quad (i = s+1, \dots, m) \quad (2)$$

Предположим, что функции f_r ($r = 1, \dots, l$) действительны и непрерывно дифференцируемы в их общей области определения.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\bar{q}) = \frac{1}{n_r + 1} \sum_{r=1}^l (S_r |q_r|^{n_r+1} + S_r^M |q_r|^{n_r+1}) + \\ + \frac{1}{n_i + 1} \sum_{i=s+1}^m (S_i |q_i|^{n_i+1} + S_i^M |q_i|^{n_i+1}). \quad (3)$$

Очевидно, что каждое решение системы (1) с учетом (2) обращает ее в нуль, поскольку $\frac{\partial \Phi}{\partial q_r} = f_r$, и наоборот, значения q_i ($i = 1, \dots, l, s+1, \dots, m$), для которых функция $\Phi(\bar{q})$ равна нулю, являются корнями системы (1).

Предположим, что система (1) имеет лишь изолированное решение, которое представляет собой точку строгого минимума функции $\Phi(\bar{q})$. Таким образом, задача сводится к нахождению минимума функции $\Phi(\bar{q})$ в l -мерном пространстве $E_l = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$. Метод скорейшего спуска [2] заключается в том, что, задаваясь нулевым приближением корня системы (1) $\bar{q}_r^{(0)}$, двигаемся по нормали к поверхности уровня $\Phi(\bar{q}_r^{(0)})$ до тех пор, пока эта нормаль не касается в некоторой точке $\bar{q}_r^{(1)}$ какой-то другой поверхности уровня $\Phi(\bar{q}_r^{(1)})$. Затем от точки $\bar{q}_r^{(1)}$ снова двигаемся по нормали к поверхности уровня $\Phi(\bar{q}_r^{(1)})$ до тех пор, пока эта нормаль не коснется в некоторой точке $\bar{q}_r^{(2)}$ новой поверхности уровня $\Phi(\bar{q}_r^{(2)})$ и т. д. Так как $\Phi(\bar{q}_r^{(0)}) > \Phi(\bar{q}_r^{(1)}) > \dots$, то, двигаясь по такому пути, мы быстро приближаемся к точке с наименьшим значением Φ , которая соответствует искомому корню $\bar{q}_r$ системы (1). Обозначим через $\Delta\Phi(\bar{q}_r)$ градиент функции $\Phi(\bar{q}_r)$

$$\nabla \Phi(\bar{q}_r) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_l} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{vmatrix} = \bar{f}. \quad (4)$$

Тогда

$$\bar{q}_r^{(k+1)} = \bar{q}_r^{(k)} - \lambda \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)}) = \bar{q}_r^{(k)} - \lambda \bar{f}_r^{(k)}. \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Подставив в (2) выражение (5), получим

$$f_r^{(k)} = \sum_{r=1}^l k_{ri} f_r^{(k)}.$$

Или окончательно $(k+1) = e$ приближение расходов по ветвям дерева запишется как

$$\bar{q}_i^{(k+1)} = \bar{q}_i^{(k)} - \lambda \sum_{r=1}^l k_{ri} \bar{f}_r^{(k)}. \quad (6)$$

Для определения множителя λ рассмотрим скалярную функцию

$$\Phi(\lambda) = \Phi[\bar{q}_r^{(k)} - \lambda \bar{f}_r^{(k)}], \quad (7)$$

которая дает изменение уровня функции Φ вдоль соответствующей нормали к поверхности уровня в точке $\bar{q}_r^{(k)}$. Множитель λ выбирается таким образом, чтобы $\Phi(\lambda)$ имела минимум. Запишем функции $\Phi(\bar{q}_r)$ и $\Phi(\lambda)$ в виде

$$\Phi = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^l (S_r + S_r^m) |q_r|^3 + \frac{1}{3} \sum_{i=s+1}^m (S_i + S_i^m) |q_i|^3; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) = & \frac{1}{3} \left[\sum_{r=1}^l (S_r + S_r^m) |q_r^{(k)} - \lambda f_r^{(k)}|^3 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=s+1}^m (S_i + S_i^m) |q_i^{(k)} - \lambda \sum_{r=1}^l k_{ri} f_r^{(k)}|^3 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Взяв частную производную $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$ и приравняв ее нулю, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \sum_{r=1}^l (S_r + S_r^m) |q_r^{(k)} - \lambda f_r^{(k)}| (q_r^{(k)} - \lambda f_r^{(k)}) (-f_r^{(k)}) +$$

$$+ \sum_{i=s+1}^m \left\{ (S_i + S_i^M) |q_i^{(k)}| - \lambda \sum_{r=1}^l K_{ri} f_r^{(k)} |q_i^{(k)}| - \lambda \sum_{r=1}^l K_{ri} f_r^{(k)} \right\} \times \\ \times \left(- \sum_{r=1}^l K_{ri} f_r^{(k)} \right) \Big\} = 0. \quad (10)$$

Поскольку увязочный расчет производится после технико-экономического расчета, можно считать, что выбранное потокораспределение при кодировании графа гидравлической сети полностью соответствует истинному, т. е. $q_r^{(k)} > 0$ и $q_i^{(k)} > 0$, а первое приближение расходов в связях сети $q_r^{(0)}$ ($r = 1, \dots, l$) также весьма близко к истинным значениям расходов в связях.

Согласно [2] λ является всегда положительным числом. Положив, кроме того, $|q_r^{(k)}| > |f_r^{(k)}|$ и $|q_i^{(k)}| > \left| \lambda \sum_{r=1}^l k_{ri} f_r^{(k)} \right|$, выражение (10) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \lambda} = A\lambda^2 - B\lambda + C = 0, \quad (11)$$

где

$$A = \sum_{r=1}^l (S_r + S_r^M) (f_r^{(k)})^3 + \sum_{i=s+1}^m \left\{ (S_i + S_i^M) \left(\sum_{r=1}^l K_{ri} f_r^{(k)} \right)^3 \right\}; \quad (12)$$

$$B = 2 \sum_{r=1}^l \{ (S_r + S_r^M) (f_r^{(k)})^2 q_r^{(k)} \} + 2 \sum_{i=s+1}^m \left\{ (S_i + S_i^M) q_i^{(k)} \left(\sum_{r=1}^l K_{ri} f_r^{(k)} \right)^2 \right\}; \quad (13)$$

$$C = \sum_{r=1}^l (S_r + S_r^M) |q_r^{(k)}| q_r^{(k)} f_r^{(k)} - \sum_{i=s+1}^m \left\{ (S_i + S_i^M) |q_i^{(k)}| q_i^{(k)} \sum_{r=1}^l k_{ri} f_r^{(k)} \right\}. \quad (14)$$

Таким образом, множитель λ вычисляется путем решения квадратного уравнения (11)

$$\lambda = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (15)$$

Наименьший положительный корень дает нам значение λ .

Алгоритм решения задачи гидравлического увязочного расчета по методу скорейшего спуска выглядит так:

1. Задаемся начальным приближением расходов в связях сети

$$q_r^{(0)} (r = 1, \dots, l).$$

2. По формуле (2) вычисляем расходы в ветвях дерева сети

$$q_i^{(0)} (i = s + 1, \dots, m).$$

3. Вычисляем значения скоростей потоков по участкам сети

$$V_j (j = 1, \dots, l, s + 1, \dots, m).$$

4. В зависимости от скорости потока V_j вычисляем гидравлические сопротивления участков сети по формулам Ф. А. Шевелева.

5. Вычисляем значения $f_r^{(0)}$ ($r = 1, \dots, l$) и сравниваем их с заданной точностью решения ϵ . Если $|f_r^{(0)}| - \epsilon \leq 0$ для всех r , то задача решена, если $|f_r^{(0)}| - \epsilon > 0$, хотя бы для одного r , то переходим к пункту 6.

6. По формулам (12), (13) и (14) находим коэффициенты A , B и C .

7. По формуле (15) вычисляем значение множителя λ .

8. Определяем уточненные значения расходов в связях сети по формуле (5) и переходим к пункту 1 на повторный цикл вычислений. Итера-

ционный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решения ϵ .

Необходимо отметить, что изложенный выше метод гидравлического увязочного расчета применим при увязке сети, когда начальные приближения расходов в связях весьма близки к их истинным значениям, а выбранные направления участков совпадают с направлением потоков. При дискретном моделировании процессов потокораспределения в гидравлических сетях начальные приближения и направления расходов в связях могут значительно отличаться от их истинных значений и поэтому данный метод не применим. Для того, чтобы использовать метод скорейшего спуска (метод градиента) для увязки сети, когда начальные приближения расходов назначаются произвольным образом, а при кодировании направления потоков могут не совпадать с истинными их направлениями, необходимо применить другой метод приближенного нахождения множителей λ . Для этого предположим, что λ — малая величина, квадратом и высшими степенями которой можно пренебречь. Тогда

$$\Phi(\lambda) = \sum_{r=1}^l \{ f_r(\bar{q}_r^{(k)}) - \lambda \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)}) \}^2. \quad (16)$$

Разлагая функции f_r ($r = 1, \dots, l$) по степеням λ с точностью до линейных членов, получим

$$\Phi(\lambda) = \sum_{r=1}^l \left[f_r(\bar{q}_r^{(k)}) - \lambda \frac{\partial f_r(\bar{q}_r^{(k)})}{\partial \bar{q}_r} \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)}) \right]^2, \quad (17)$$

где

$$\frac{\partial f_r}{\partial \bar{q}_r} = \left[\frac{\partial f_r}{\partial q_1}, \frac{\partial f_r}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f_r}{\partial q_l} \right]. \quad (18)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -2 \sum_{r=1}^l \left[f_r(\bar{q}_r^{(k)}) - \frac{\lambda \partial f_r(\bar{q}_r^{(k)})}{\partial \bar{q}_r} \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)}) \right] \times \\ \times \frac{\partial f_r(\bar{q}_r^{(k)})}{\partial \bar{q}_r} \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)}) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{\sum_{r=1}^l f_r(\bar{q}_r^{(k)}) \frac{\partial f_r(\bar{q}_r^{(k)})}{\partial \bar{q}_r} \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)})}{\sum_{r=1}^l \left[\frac{\partial f_r(\bar{q}_r^{(k)})}{\partial \bar{q}_r} \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)}) \right]^2} = \\ = \frac{f_r(\bar{q}_r^{(k)}) \cdot W(\bar{q}_r^{(k)}) \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)})}{W(\bar{q}_r^{(k)}) \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)}) \cdot W(\bar{q}_r^{(k)}) \nabla \Phi(\bar{q}_r^{(k)})}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$W(\bar{q}_r) = \frac{\partial f_r}{\partial \bar{q}_r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial q_1} & \frac{\partial f_l}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial q_l} \end{bmatrix} \text{ — матрица Якоби вектор функции (4).}$$

Элементы матрицы Якоби вычисляются по формулам

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial q_k}\right)_{r=k} = n_r (S_r + S_r^M) |q_r|^{n_r-1} + \sum_{i=s+1}^m n_i k_{ri}^2 (S_i + S_i^M) |q_i|^{n_i-1}. \quad (21)$$

(r, k = 1, ..., l)

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial q_k}\right)_{r \neq k} = \sum_{i=s+1}^m n_i k_{ri} k_{ki} (S_i + S_i^M) |q_i|^{n_i-1}. \quad (r, k = 1, ..., l) \quad (22)$$

Поскольку

$$\Phi = \sum_{r=1}^l [f_r(\bar{q}_r)]^2,$$

имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_r} = 2 \sum_{r=1}^l f_r(\bar{q}_r) \frac{\partial f_r(\bar{q}_r)}{\partial q_r}. \quad (23)$$

Отсюда

$$\nabla \Phi(\bar{q}_r) = 2 \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^l \frac{\partial f_r(\bar{q}_r)}{\partial q_1} f_r(\bar{q}_r) \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^l \frac{\partial f_r(\bar{q}_r)}{\partial q_l} f_r(\bar{q}_r) \end{bmatrix} = 2W'(\bar{q}_r) f_r(\bar{q}_r). \quad (24)$$

Окончательно будем иметь

$$\mu_k = 2\lambda_k = \frac{(\bar{f}_r^{(k)}, W_k W_k' \bar{f}_r^{(k)})}{(W_k W_k' \bar{f}_r^{(k)}, W_k W_k' \bar{f}_r^{(k)})}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}_r^{(k)} &= f_r(\bar{q}_r^{(k)}); & W_k &= W(\bar{q}_r^{(k)}); \\ \bar{q}_r^{k+1} &= \bar{q}_r^{(k)} - \mu_k W_k' \bar{f}_r^{(k)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Алгоритм решения задачи гидравлического увязочного расчета при использовании метода скорейшего спуска, изложенного выше, выглядит следующим образом:

1. Производим вычисления на k -й итерации согласно пунктам 1—5, изложенным выше.

2. Определяем матрицу Якоби W_k на k -й итерации. Элементы матрицы находим по формулам (21), (22).

3. Определяем $W_k' \bar{f}_r^{(k)}$ и $W_k W_k' \bar{f}_r^{(k)}$.

4. По формуле (25) вычисляем значение μ_k .

5. По формуле (26) находим уточненные расходы $\bar{q}_r^{(k+1)}$ на k -й итерации и переходим к 1-му пункту вычислений. Итерационный процесс длится до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность вычислений ϵ .

Приведенные алгоритмы были реализованы на ЦВМ «Урал-2». Несмотря на то что скорость сходимости как первого метода, так и второго несколько меньше, чем метода Ньютона, они позволяют увязывать сети с числом независимых циклов более 60, что по методу Ньютона весьма затруднительно.

Метод скорейшего спуска может применяться не только для увязочного расчета, но при использовании математической модели [1] и для технико-экономических расчетов гидравлических сетей.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Евдокимов, Э. Н. Рыбников, А. И. Валенда. Гидравлический расчет водопроводных сетей на ЦВМ. Научно-техническая информация. Межотраслевые вопросы строительства. Отечественный опыт. ЦИНИС, № 11, М., 1967.
 2. Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Физматгиз, 1963.
-