Модель реализована в лингвистическом процессоре (транслятор ЯВ на ПОЯ) для вопросно-ответной системы, описанной в [4]. Программа написана на языке $PL/1$ и занимает порядка 120 К байт.

Список литературы: 1. *Поспелов Д. А., Пушкин В. Н.* Мышление и автоматы.— М.: Сов. радио, 1972.— 224 с. 2. *Гладкий А. В.* Формальные грамматики и языки.— М.: Наука, 1973.— 386 с. 3. *Ярушек В. Е.* О формализованной модели для планирования действий управляемых объектов в динамической среде.— См. статью в настоящем сборнике. 4. *Рось А. А., Судаков Б. Н.* Языковое обеспечение вопросно-ответных систем.— Проблемы бионики, 1980, вып. 24, с. 16—22.

Поступила в редколлегию 25.02.81.

УДК 681.327.12

С. Ф. КАЦАЛАП, канд. техн. наук

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ОБЪЕКТОВ

При построении распознающих устройств, сортировальных автоматов, промышленных роботов важное место занимает разработка систем, способных, подобно зрительному анализатору, обнаруживать объекты, подвергнутые действию группы аффинных преобразований (сдвиг, поворот, изменение масштаба, линейные растяжения и др.). Среди известных систем значительный интерес вызывают системы, использующие дифференциальные методы обработки сигналов, позволяющие обнаруживать объект, который частично заслоняется другими предметами. Однако существующие дифференциальные методы построения такого рода систем разработаны только для некоторых аффинных преобразований плоского объекта. Поэтому нашей целью является обобщение ранее полученных результатов для полной группы аффинных преобразований.

Семейство кривых, отличающихся параметрами a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 полной группы афинных преобразований, в общем виде может быть представлено уравнением

$$a_1x + a_2y + a_3 = f(b_1x + b_2y + b_3), \tag{1}$$

где f — определяет геометрическую форму искомого плоского объекта. Необходимо найти дифференциальное уравнение, общим решением которого является выражение (1), где параметры преобразования — произвольные константы.

Введем обозначения: $u = a_1x + a_2y + a_3$; $v = b_1x + b_2y + b_3$ **(2)**.

Дифференцируя (2) дважды, имеем $u'' = a_2y''$, $v'' = b_2y''$ **(3)**. Решая (3) относительно a_2 и b_2, дифференцируя полученное выражение, имеем $u'''y'' - u'y''' = 0$; $v''y'' - v''y''' = 0$, $y'' \neq 0$ **(4)**.

Для систем уравнений (4) найдем производные выражения (1) с учетом (2): $u' = f'(v)v'$, $u'' = f''(v)v'^2 + f'(v)v''$; $u''' = f'''(v) \times v'^3 + 3f''(v)v'v'' + f'(v)v'''$ **(5)**. Решая совместно (5) и (4), имеем $f'''(v)v'^2 y'' + 3f''(v)v''y'' - f''(v)v'y''' = 0$ **(6)**.

Для упрощения (6) введем обозначения

$$y_1 = \frac{y'''}{y''}, \ \frac{f'''(v)}{f''(v)} = f_1(v); \ f_1(v)v'^2 + 3v'' - v'y_1 = 0. \qquad (7)$$

Дифференцируя (7) с учетом, что $v''' = y_1v''$, имеем

$$f_1'(v)v'^3 + f_1(v)2v'v'' + 2v''y_1 - v'y_1' = 0. \qquad (8)$$

Решая совместно (7) и (8), исключаем v'':

$$\left[f_1'(v) - \frac{2}{3}f_1^2(v)\right]v'^2 + \frac{2}{3}y_1^2 - y_1' = 0. \qquad (9)$$

Для упрощения последующего анализа введем обозначения:

$$f_2(v) = f_1'(v) - \frac{2}{3}f_1^2(v), \ y_2 = -\frac{2}{3}y_1^2 + y_1', \ f_2(v)v'^2 - y_2 = 0. \qquad (10)$$

Дифференцируя (10), имеем $f_2'(v)v'^3 + f_2(v)2v'v'' - y_2' = 0$. (11)

Решая совместно (11), (10) и (8), исключаем v'' и v':

$$\frac{f_2'(v) - \frac{2}{3}f_2(v)f_1(v)}{f_2^{\frac{3}{2}}(v)} - \frac{y_2' - \frac{2}{3}y_1y_2}{y_2^{\frac{3}{2}}} = 0. \qquad (12)$$

Обозначая

$$\frac{f_2'(v) - \frac{2}{3}f_2(v)f_1(v)}{f_2^{\frac{3}{2}}(v)} = f_3(v), \ \frac{y_2' - \frac{2}{3}y_1y_2}{y_2^{\frac{3}{2}}} = y_3,$$

имеем $f_3(v) - y_3 = 0$ **(13)**. Дифференцируя (13), с учетом (10 получаем

$$\frac{f_3'(v)}{f_2^{\frac{1}{2}}(v)} - \frac{y_3'}{y_2^{\frac{1}{2}}} = 0. \qquad (14$$

Решая совместно (14) и (13), получаем искомое дифференциальное уравнение

$$\frac{f_3'[f_3^*(y_3)]}{f_2^{\frac{1}{2}}[f_3^2(y_3)]} - \frac{y_3'}{y_2^{\frac{1}{2}}} = 0, \qquad (15$$

где f_3^* — функция, обратная f_3 относительно аргумента.

Очевидно, что обратная функция существует в том случае если $y_3 \neq k$, $k = \mathrm{const}$. Исходя из этого неравенства, найдем функции, для которых соответствующее дифференциальное уравнение не существует:

$$y_3 = \frac{y_2' - \frac{2}{3} y_1 y_2}{y_2^{\frac{3}{2}}} = k. \tag{16}$$

Подставляя вместо y_2 соответствующие значения из соотношений (10), после несложных преобразований имеем

$$-2y_1 y_1' + y_1'' + \frac{4}{9} y_1^3 = k\left(-\frac{2}{3} y_1^2 + y_1'\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{17}$$

Используя замену переменных $y_1 = z^{-1}$, получаем

$$2z' + 2z'^2 - zz'' + \frac{4}{9} = k\left(-\frac{2}{3} - z'\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{18}$$

Порядок дифференциального уравнения можно снизить, полагая $z' = u(z)$:

$$2u(z) + 2u^2(z) - zu'(z)\,u(z) + \frac{4}{9} = k\left[-\frac{2}{3} - u(z)\right]^{\frac{3}{2}}. \tag{19}$$

Интегрируя (13), имеем

$$z = k_1 \frac{u + \frac{2}{3}}{\sqrt{-2u - \frac{2}{3} - k\sqrt{-u - \frac{2}{3}}}}\, e^{\frac{3k}{\sqrt{\frac{16}{3} - k^2}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{-u - \frac{3}{2}} - k}{\sqrt{\frac{16}{3} - k^2}}},$$

$$\frac{16}{3} - k^2 > 0;$$

$$z = k_1 \frac{u + \frac{2}{3}}{\sqrt{-2u - \frac{2}{3} - k\sqrt{-u - \frac{2}{3}}}} \times$$

$$\times \left(\frac{4\sqrt{-u - \frac{2}{3}} - k - \sqrt{k^2 - \frac{16}{3}}}{4\sqrt{-u - \frac{2}{3}} - k + \sqrt{k^2 - \frac{16}{3}}} \right)^{\frac{3k}{2\sqrt{k^2 - \frac{16}{3}}}}, \quad k^2 - \frac{16}{3} > 0;$$

$$z = \frac{k_1\left(u + \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{-u - \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}}\, e^{\frac{3}{\left(u + \frac{2}{3}\right)\sqrt{3} + 1}}, \quad k = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}. \tag{20}$$

Решение (14) можно найти в параметрическом виде. Полагая $-u-\frac{2}{3}=t^2$, находим

$$z=\frac{k_1t^2}{\sqrt{2t^2+\frac{2}{3}-kt}}e^{\frac{3k}{\sqrt{\frac{16}{3}-k^2}}\operatorname{arctg}\frac{4t-k}{\sqrt{\frac{16}{3}-k^2}}}, \quad \frac{16}{3}-k^2>0;$$

$$z=\frac{k_1t^2}{\sqrt{2t^2+\frac{2}{3}-kt}}\left(\frac{4t-k-\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}{4t-k+\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}\right)^{\frac{3k}{2\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}}, \quad k^2-\frac{16}{3}>0;$$

$$z=\frac{k_1t^2}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}e^{-\frac{3}{t\sqrt{3}-1}}, \quad k=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}. \tag{21}$$

Учитывая, что $\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}$, находим x:

$$x+k_2=-2k_1\int\frac{te^{\frac{3k}{\sqrt{\frac{16}{3}-k^2}}\operatorname{arctg}\frac{4t-k}{\sqrt{\frac{16}{3}-k^2}}}}{\left(2t^2+\frac{2}{3}-kt\right)^{\frac{3}{2}}}dt, \quad \frac{16}{3}-k^2>0;$$

$$x+k_2=-16k_1\int\frac{t}{\left(4t-k+\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}\right)^2\sqrt{2t^2+\frac{2}{3}-tk}}\times$$

$$\times\left(\frac{4t-k-\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}{4t-k+\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}\right)^{\frac{3k}{2\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}-1}dt, \quad k^2-\frac{16}{3}>0;$$

$$x+k^2=-k_1\int\frac{e^{-\frac{3}{t\sqrt{3}-1}t}}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}dt, \quad k=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}. \tag{22}$$

Подставляя в (15) вместо z соответствующее выражение (7) и интегрируя с учетом (16), имеем

$$y+k_5=-2k_1\int\frac{2k_1k_3+k_4t}{\left(2t^2+\frac{2}{3}-kt\right)^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{3k}{\sqrt{\frac{16}{3}-k^2}}\operatorname{arctg}\frac{4t-k}{\sqrt{\frac{16}{3}-k^2}}}dt,$$

$$\frac{16}{3}-k^2>0;\quad y+k_5=-16k_1\int\frac{k_4t+2k_1k_3}{\left(4t-k+\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}\right)^2\sqrt{2t^2+\frac{2}{3}-tk}}\times$$

$$\times\left(\frac{4t-k-\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}{4t-k+\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}\right)^{\frac{3k}{2\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}-1}dt,\quad k^2-\frac{16}{3}>0;$$

$$y+k_5=-k_1\int\frac{(k_3+k_4t)\,e^{-\frac{3}{t\sqrt{3}-1}}}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}dt,\quad k=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}. \qquad (23)$$

Соотношения (16) и (17) можно интегрировать, используя подстановку для первых равенств $\operatorname{arctg}\dfrac{4t-k}{\sqrt{\frac{16}{3}-k^2}}=z$, для вторых равенств $\dfrac{4t-k-\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}{4t-k-\sqrt{k^2-\frac{16}{3}}}=z$ и для третьих равенств $-\dfrac{3}{t\sqrt{3}-1}=z$.

После интегрирования и исключения из параметрических уравнений z с учетом переобозначения констант имеем

$$(c_1y+c_2x+c_3)^2+(y+c_4x+c_5)^2=c_6e^{-6c_1\operatorname{arctg}\frac{c_1y+c_2x+c_3}{y+c_4x+c_5}}; \qquad (24)$$

$$y+c_1x+c_2=c_3(y+c_4x+c_5)^{c_6}; \qquad (25)$$

$$y+c_1x+c_2=c_3e^{\frac{c_4x+c_5}{y+c_1x+c_2}}, \qquad (26)$$

Таким образом, для кривых (18) и (20) параметры аффинных преобразований не являются независимыми.

Найдем операторы для определения параметров аффинных преобразований. Исключая из выражений (3), (7), (10) v' и v'', имеем

$$f_1(v)\frac{y_2}{f_2(v)}+3b_2y''-\left[\frac{y_2}{f_2(v)}\right]^{\frac{1}{2}}y_1=0. \qquad (27)$$

Решая относительно b_2, получаем

$$b_2=\frac{\dfrac{(y_2)^{\frac{1}{2}}y_1}{f_2^{\frac{1}{2}}(v)}-\dfrac{f_1(v)}{f_2(v)}y_2}{3y''},\quad v=f_3^*(y_3). \qquad (28)$$

Аналогичным образом из выражений (3), (5), (7) определяем a_2:

$$a_2 = \frac{f''(v)}{f_2(v)}\frac{y_2}{y''} + \frac{f'(v)}{3f_2^{\frac{1}{2}}(v)}\frac{y_2^{\frac{1}{2}}y_1}{y''} - \frac{f_1(v)f'(v)}{3f_2(v)}\frac{y_2}{y''}. \qquad (29)$$

Дифференцируя выражения для v (2) с учетом (22) и (10), находим b_1:

$$b_1 = \frac{y_2^{\frac{1}{2}}}{f_2^{\frac{1}{2}}(v)}\left(1 - \frac{y_1y'}{3y''}\right) + \frac{f_1(v)}{f_2(v)}\frac{y_2y'}{3y''}. \qquad (30)$$

Определяем b_3, учитывая (24) и (22):

$$b_3 = v - \left[\frac{y_2^{\frac{1}{2}}}{f_2^{\frac{1}{2}}(v)}\left(1 - \frac{y_1y'}{3y''}\right) + \frac{f_1(v)}{f_2(v)}\frac{y_2y'}{3y''}\right]x -$$

$$-\left(\frac{1}{3f_2^{\frac{1}{2}}(v)}\frac{y_2^{\frac{1}{2}}y_1}{y''} - \frac{f_1(v)}{f_2(v)}\frac{y_2}{3y''}\right)y. \qquad (31)$$

Дифференцируя выражения для u (2) с учетом (5) и (10), находим

$$a_1 = \frac{f'(v)}{f_2^{\frac{1}{2}}(v)}y_2^{\frac{1}{2}} - \frac{f''(v)}{f_2(v)}\frac{y_2y'}{''} - \frac{f'(v)}{3f_2^{\frac{1}{2}}(v)}\frac{y_2^{\frac{1}{2}}y_1y'}{y''} + \frac{f_1(0)f'(v)}{3f_2(v)}\frac{y_2y'}{y''}. \qquad (32)$$

Определяем a_3, учитывая (26) и (23):

$$a_3 = f(v) - \frac{f'(v)y_2^{\frac{1}{2}}}{f_2^{\frac{1}{2}}(v)}\left(x - \frac{y_1y'x}{3y''} + \frac{y_1y}{3y''}\right) - \frac{f''(v)}{f_2(v)}\frac{y_2}{y''}(y - y'x) +$$

$$+\frac{f_1(v)f'(v)}{3f_2(v)}\frac{y_2}{y''}(y - y'x). \qquad (33)$$

Таким образом, в работе найдены операторы, которые позволяют сравнивать кривые, отличающиеся аффинной группой преобразований и определяют параметры этих преобразований.