Шубін

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЗМІСТУ ТА МЕТОДІВ НАВЧАННЯ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Н.В. Білоус, З.В. Дудар, Н.С. Лєсна, І.Ю. Шубін

ОСНОВИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

Харків 1999

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЗМІСТУ ТА МЕТОДІВ НАВЧАННЯ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Н.В. Білоус, З.В. Дудар, Н.С. Лєсна, І.Ю. Шубін

ОСНОВИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

Рекомендовано Міністерством освіти України для студентів
усіх форм навчання напрямку «Комп'ютерні науки»

Харків 1999

УДК 519.1

Н.В. Білоус, З.В Дудар., Н.С. Лєсна, І.Ю. Шубін.Основи комбінаторного аналізу: Навч. посібник. — Харків: ХТУРЕ, 1999. — 96 с.

ISBN 5-7763-2714-8

Розглядаються основні поняття комбінаторного аналізу, зв'язок комбінаторики з іншими галузями дискретної математики, наведені приклади розв'язання типових задач за допомогою комбінаторних методів.

Посібник призначений для студентів напрямку "Комп'ютерні науки" усіх форм навчання, аспірантів, спеціалістів у галузі проектування програмного забезпечення та автоматизованих інформаційних систем.

Іл. 5. Бібліогр.: 7 назв.

Рецензенти: Шаронова Н.В., д-р. техн. наук, професор (ХТУРЕ)
Герасін С.М., канд. техн. наук, доцент (ХТУРЕ)

ISBN 5-7763-2714-8

ПЕРЕДМОВА

Комбінаторика, чи комбінаторний аналіз — галузь дискретної математики, що вивчає комбінації та перестановки предметів, взаємоположення часток кінцевих множин об'єктів довільного походження, а також нескінченних множин, що задовольняють деяким умовам кінцевості, виникла у XVII столітті. Але у самостійну наукову дисципліну комбінаторний аналіз сформувався лише у XX столітті. Комбінаторні методи застосовуються в теорії випадкових процесів, статистиці, математичному програмуванні, плануванні експериментів. Розглядаються задачі, в яких доводиться обирати ті чи інші предмети, розташовувати їх у певному порядку та знаходити серед різноманітних комбінацій найкращі. Комбінаторика тісно пов'язана з теоріями графів, кінцевих автоматів. Її здобутки використовуються при плануванні та аналізі наукових експериментів, у лінійному та динамічному програмуванні, у математичній економіці та інших галузях науки і техніки.

Вирізняють такі проблеми комбінаторного аналізу.

Задачі на перелік, у яких необхідно визначити кількість розміщень елементів кінцевої множини, які задовольняють різноманітним умовам. Для розв'язання вказаних задач розроблені методи, серед яких методи похідних функцій та переліку Пойа.

Задачі про існування та побудову. В задачах такого класу викликають інтереси, чи має місце конфігурація часток кінцевої множини з деякими властивостями. Якщо така конфігурація існує, то як її побудувати. При цьому важливу роль відіграють чисельні та алгебраїчні методи.

Задачі про вибір. Задачи такого типу досліджують умови, за яких можна виконати вибір підмножини чи деякої сукупності часток множини, щоб задовольнити деякі вимоги, котрі мають оптимальний характер. Для розв'язання задач про вибір окрім комбінаторних методів треба застосовувати алгебраїчний апарат.

У першій частині посібника розглянуто основні поняття комбінаторного аналізу, наведені класичні задачі комбінаторики, вказано зв'язок комбінаторики з іншими розділами дискретної математики, а також галузі застосування цього математичного апарату. У розділах 10 — 12 розглянута велика кількість типових задач. Усі задачі наведені з розв'язаннями та поясненнями комбінаторних методів.

Посібник призначений для студентів учбового напрямку "Комп'ютерні науки" усіх форм навчання, що вивчають дискретну математику, аспірантів, спеціалістів у галузі проектування програмного забезпечення і автоматизованих інформаційних систем.

1 ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТА ПРЕДМЕТ КОМБІНАТОРИКИ

1.1 Історія розвитку комбінаторики

Китайські рукописи XII — XIII ст. до н. е. все в світі описували як поєднання двох початків — чоловічого та жіночого. Вісім малюнків із трьох рядів символів зображали землю, гори, воду та інші стихії — сума перших восьми натуральних чисел (36) втілювала Всесвіт.

Легенда про китайського імператора Ію, який жив 4000 років тому, розповідає: існувала священна черепаха, на панцирі якої був зображений малюнок, що можна інтерпретувати як числа

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рисунок 1.1 — Магічний квадрат

Склавши рядки, стовпці або діагоналі числового квадрату, зображеного на рис. 1, одержимо одне й те ж число — 15.

Конкретні комбінаторні задачі, що стосувалися переліку предметів чи невеликих їх груп, давні греки вирішували без помилок.

Існують суміжні задачі між комбінаторикою та теорією чисел.

```
                 o o o
      o o
                 o o o
o     o o
                 o o o
```

Рисунок 1.2 — Представлення квадратів чисел

Давньогрецькі філософи запропонували поняття "квадрата числа" — квадрати натуральних чисел зображалися камінцями, як показано на рис. 1.2. За допомогою комбінацій предметів та обчислення кількості таких комбінацій були одержані числа, які дорівнюють сумі своїх дільників, наприклад, 6=1+2+3; "дружні числа", кожне з яких дорівнює сумі дільників іншого числа (220 та 284).

Великий розвиток у середні віки в Європі та Азії одержали різноманітні числові марновірства та тлумачення, пов'язані із заміною літер відповідними числами (греки позначали числа за допомогою літер — перші 9 літер алфавіту позначали цифри від 1 до 9, наступні за ними — від 10 до 90, а останні 9 літер — числа від 100 до 900). У середні віки вчені, які називалися кабалістами, піддавали такому "аналізу" слова Біблії та інших священних книжок і робили на основі своїх досліджень пророцтва про майбутнє світу. Чортова дюжина — число 13, комбінації цього числа з днями тижня та астрономічними явищами — затемненнями чи появою комет; число диявола — 666.

Поряд із кабалістами та містиками комбінаторикою в середньовіччі займалися астрологи.

Астрологія — наука, що вивчає поєднання планет та їх взаєморозташування між собою, також дала чималий поштовх для формулювання та вирішення класичних комбінаторних задач. Астрологів цікавило питання про рух планет та їх вплив на долі людей. Особливе значення надавали вони поєднанням планет — зустрічам різних планет в одному знаку Зодіаку.

Астролог Бен Езра (1140 р. н. е.) підрахував кількість сполучень семи планет по дві, по три і т. д. Виявилося,

$$C_7^2 = C_7^5 \qquad C_7^3 = C_7^4,$$

C_n^k — число сполучень із n різних предметів по k .

Остаточно формулу числа сполучень одержав Леві Бен Герман у XIV ст.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}.$$

Знов на початку XVII ст. цю формулу вивів французький математик П. Ерігон.

Велику увагу класифікації видів суджень приділяла схоластична наука. В схоластиці чудернацько перепліталися дослідження богословів із дослідженнями проблем, що примикають до комбінаторики, математичної логіки, теорії множин та інших сучасних галузей математики — великими знавцями схоластичних досліджень були фундатори теорії множин *Бернард Больцано* і *Георг Кантор*. Сперечаючись про взаємовідносини членів пресвятої трійці, супідрядності янголів, архангелів, херувімів та серафімів, схоласти були змушені розглядати різноманітні відносини порядків та ієрархії — наприклад, загробний світ, описаний Данте у "Божественній комедії" з її колами пекла та різними частинами чистилища і раю.

Схоласт *Раймонд Лулій* створив у XIII ст. машину, складену із декількох кіл, на яких були нанесені основні предикати, суб'єкти, атрибути та інші поняття схоластичної логіки. Обертаючи ці кола, він одержував різноманітні поєднання понять і сподівався знайти з їх допомогою істину.

Вирішуючи питання про добуток коренів будь-якого ступеня, арабські алгебраїсти дійшли до формули для ступеня суми двох чисел, відомої під назвою "біном Ньютона". Мабуть, цю формулу знав поет і математик *Омар Хайям*, який жив у XI-XII ст. н. е. У

XIII-XV ст. н. е. таку формулу наводять у своїх працях деякі арабські вчені.

Судячи з деяких європейських джерел, висхідними до арабських оригіналів, для знаходження коефіцієнтів цієї формули брали число 1 0 0 0 1 і відносили його у 2-гу, 3-тю,..., 9-ту ступінь. Одержували результати, подані в табл. 1.1 , в якій жирним шрифтом виділені коефіцієнти бінома Ньютона. Якщо опустити в цій таблиці зайві нулі, то одержимо трикутну таблицю із біноміальних коефіцієнтів.

Таблиця 1.1 — Біноміальні коефіцієнти

1000900360084012601260084003600090001

1000800280056007000560028000080001

100070021003500350021000070001

1000600150020001500060001

100050010001000050001

10004000600040001

1000300030001

100020001

10001

Арабські математики знали деякі властивості таблиці коефіцієнтів бінома Ньютона

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Індійські математики у II ст. до н. е. вивчали властивості чисел, а також знали, що

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n.$$

Також індійські математики серед інших питань математики вивчали і проблеми комбінаторики. Є відомості про застосування перестановок до підрахунку варіацій розміру у віршуванні, різних розташувань в архітектурі тощо. Подавалися правила для знаходження кількості перестановок та сполучень декількох предметів, причому, розглядалися і випадки, коли в цих перестановках є елементи, які повторюються.

Леонардо Пізанський, який одержав прізвисько *Фібоначчі*, в своїй книзі "Liber Abaci", виданій у 1202 р., систематизував усю арифметику арабів, деякі відомості з геометрії *Евкліда* та додав до них результати своїх досліджень. Праця Фібоначчі містила і нові комбінаторні задачі, наприклад, про знаходження найменшої кількості гирь, за допомогою яких можна одержати будь-яку цілу вагу від 1 до 40 фунтів. Розглядав Леонардо і знаходження цілих рішень рівнянь. Далі аналогічні завдання призвели до розв'язання задачі про кількість натуральних рішень систем рівнянь та нерівностей, яка може розглядатися як одна з фундаментальних часток комбінаторики.

Але головною заслугою Леонардо перед комбінаторикою було те, що він сформулював та розв'язав "задачу про кролів". Ще з часів грецьких математиків були відомі дві послідовності, кожний член яких одержувався за певними правилами з попередніх членів — арифметична та геометрична прогресії. В задачі Леонардо з'явилася нова послідовність, члени якої були пов'язані один з одним співвідношенням $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Це була перша в історії науки формула, в якій наступний член виражався через два попередніх. Подібні формули одержали назву рекурентних (з латинської recurrere — вертатися). Метод рекурентних формул виявився згодом одним із найпотужніших для розв'язання комбінаторних задач.

Нарди, шашки, шахи, японські облавні шашки "го" — у цих іграх потрібно розглядати різноманітні сполучення пересувних фігур, і виграє той, хто їх краще вивчить, знає виграшні комбінації та уникає програшних.

Чималий поштовх до розвитку комбінаторики дали азартні ігри, що існували вже в глибокій давнині але одержали

особливе розповсюдження після хрестових походів. Найбільше розповсюдження одержала гра в кістки.

Роботи *Блеза Паскаля* і *П'єра Ферма* (Франція XVII ст.) поклали початок теорії ймовірностей та комбінаториці.

У 1666р. *Готфрид Вільгельм Лейбніц* запропонував поняття комбінаторики. До галузі комбінаторики Лейбніц відносив і "універсальну характеристику" — математику суджень, тобто прообраз математичної логіки.

Після робіт Паскаля і Ферма, Лейбніца і *Л.Ейлера* можна було вже говорити про комбінаторику як про самостійну частину математики, тісно пов'язану з іншими галузями науки, такими, як теорія ймовірностей, вчення про ряди тощо ін. Наприкінці XVIII ст. німецький вчений Гінденбург та його учні зробили навіть спробу збудувати загальну теорію комбінаторного аналізу.

У XIX столітті під час досліджень з комбінаторики почали простежуватися зв'язки цієї теорії із визначниками, кінцевими геометріями, групами, математичною логікою тощо.

Складність будови біологічних систем, їх точна ієрархічність, взаємоузгодженість окремих процесів у цілому організмі роблять біологію полем для застосування комбінаторних методів. Радянський біолог А.А. Любищев вважав навіть, що подібність рослин та морозяних візерунків на вікнах не випадкова — в обох випадках проявляються певні закони комбінування частин в єдине ціле.

Однією з найскладніших загадок у біології XX ст. була будова "ниток життя" — молекул білка та нуклеїнових кислот. Виявилося, що молекули білка — це об'єднання декількох довгих ланцюгів, складених із 20 амінокислот. Після відкриття будови ДНК постало питання: яким чином молекули ДНК передають організму інструкції про побудову ланцюгів амінокислот, що складають білки. Дослідження показали, що мова йдеться про 20 амінокислот. Американський фізик *Г.Гамов* сформулював задачу так: як за допомогою 4 видів нуклеотидів можна зашифрувати 20 видів амінокислот?

Криптографія — наука про шифрування, була відома з давніх давен; однією з галузей криптографії є розшифровка мов давніх цивілізацій. Ключ до читання ієрогліфів, загублений декілька тисячоліть тому, був знов знайдений саме завдяки комбінаторним методам у читанні забутих писемностей, заснованих на спостереженнях за текстом, на зіставленні повторюваності комбінацій слів і граматичних форм. Також потрібен аналіз призначення надпису, часу і умов її складання і т. д. Ще більш пов'язана з комбінаторикою історія розшифрування клінописних надписів.

Характерною рисою комбінаторних задач є те, що в них мова йдеться завжди про кінцеву множину елементів. Щоб усунути вплив конкретного виду предметів, що обираються і розташовуються, необхідно використовувати мову теорії множин, говорити про множини та їх підмножини (частини), про поєднання декількох множин та їх перетин (утворенні загальної частини) і т. д.

Назвемо деякі з основних задач комбінаторики.

1. Знайти конфігурацію елементів множини, що володіє заздалегідь заданими властивостями.

2. Довести існування чи відсутність конфігурації із заданими властивостями.

3. Знайти загальну кількість конфігурацій із заданими властивостями.

4. Описати всі методи розв'язання даної комбінаторної задачі, подати алгоритм їх переліку.

5. З усіх розв'язань даної комбінаторної задачі обрати оптимальне рішення за тими чи іншими параметрами.

2 ПЕРВИННІ ПОНЯТТЯ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

2.1 Деякі класичні задачі комбінаторики

А. Магічний квадрат. Розташувати числа 1,2,3,4,5,6,7,8,9 у вигляді квадрата так, щоб сума чисел з кожного із стовпців, рядка та діагоналі була однією і тією ж.

Магічний квадрат 3-го порядку був зображений на рис. 1.1. Більш складним завданням є побудова магічних квадратів

4-го порядку — доведена можливість побудови усього 880 типів таких квадратів. Існують алгоритми побудови квадратів вищих порядків та магічних кубів.

Б. Шахові задачі. Одним із частинних випадків задачі про пошук конфігурації елементів множини із заданими властивостями є задача про розташування фігур на шаховій дошці. Задача про ферзів — "Поставити на шахову дошку найбільшу кількість ферзів таким чином, щоб жоден з них не міг взяти іншого". Рішення тут достатньо очевидне — більше ніж 8 ферзів на дошку поставити не вдається. Усього існує 92 їх розташування, які задовольняють заданим умовам.

На дошці розміром $n \times n$ n не повинно ділитися ані на 2, ані на 3, можна поставити по n ферзів n різноманітних кольорів таким чином, щоб ферзі одного кольору не били один одного.

Якщо розставляти шахових коней, то виявиться, що будь-який з них на дошці розміром 2×4 може бити тільки одну клітину. На дошці 8×8 можна таким чином поставити тільки $8 \cdot 4 = 32$ коней. На дошці розміром $n \times n$ можна поставити $(n \cdot n)/2$ коней, що не б'ють один одного, якщо n парне, та $(n \cdot n + 1)/2$ коней, якщо n непарне.

В. Латинські квадрати та блок-схеми. Квадрат розміром n рядків на n стовпців, складений із n літер таким чином, щоб кожна літера входила лише одного разу до кожного стовпця та кожного рядка, називають *латинським*. Така фігура ще має назву офіцерське каре. На рис. 2.1 зображений латинський квадрат розміром 4×4.

Якщо два латинські квадрати "накласти" один на одного таким чином, щоб кожна пара літер (велика та маленька) A, B, C, D та a, b, c, d зустрілася тільки один раз, то такі квадрати називають *ортогональними.*

Ортогональний латинський квадрат розміром 4×4 зображений на рис. 2.2.

Першим задачу про латинські квадрати розглянув Л. Ейлер, він же довів, що задача не має рішення при $n = 2$ та $n = 6$.

систематичний розвиток обидва основні процеси методу нескінченно малих, проте він пройшов повз зв'язку між операціями диференціювання та інтегрування. Праці з теорії ймовірностей, обчислення нескінченно малих та оптики (принцип Ферма).

ШЕННОН (Shennon) Клод Елвуд (1916 - 1992), американський вчений та інженер, один із творців математичної теорії інформації. З 1956 р. — член національної АН США та Американської академії мистецтв і наук. У 1936 р. закінчив Мічіганський університет, у 1941-1957 рр. співробітник математичної лабораторії компанії Bell Sustem. З 1941р. радник національного дослідницького комітету Міністерства оборони США, з 1957р. — професор електротехніки та математики Масачусетського технологічного інституту. Основні праці з алгебри логіки, теорії релейно-контактних схем, математичної теорії зв'язку, інформації та кібернетики. Одна з основних теорем теорії інформації про передачу сигналів каналами зв'язку за наявністю завад, які можуть призвести до викривлення інформації — Теорема Шеннона.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Сигорский.В.П. Математический аппарат инженера. — Киев: Техніка, 1977. — 766 с.
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. — М.: Энергия, 1980. — 342 с.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд-во МГУ, 1982. — 120 с.
4. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. — М.: Высш. шк., 1986. — 312с.
5. Глускин Л.М., Шварц В.Я., Шор Л.А. Задачи и алгоритмы комбинаторики и теории графов. — Донецк: Изд-во ДПИ, 1982. — 110с.
6. Виноградов И.М. Основы теории чисел. — М.:Наука, 1965. — 172 с.
7. Виленкин Н.Я. Комбинаторика . — М.: Наука, 1969. — 328с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

БІЛОУС Наталія Валентинівна
ДУДАР Зоя Володимирівна
ЛЄСНА Наталія Советівна
ШУБІН Ігор Юрійович

ОСНОВИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

для студентів усіх форм навчання
напрямку "Комп'ютерні науки"

Навчальний посібник

Відповідальний випусковий З.В. Дудар

Редактор О.Г. Троценко

План 1999, поз. 16.

Підп. до друку 5.04.99р. Формат 60 х 84 1/16 Умовн. друк. арк. 5,7

Облік.-вид. арк. 5,0 Тираж 100 прим. Зам. № 119. Ціна договірна

ХТУРЕ, 61166, Харків, пр. Леніна, 14

Надруковано в учбово-виробничому видавничо-поліграфічному центрі ХТУРЕ,
61166, Харків, пр. Леніна, 14.