

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

ГЕТМАНОВА Е. Е., СЕМЕРИЧ Ю. С.

С помощью компьютерного моделирования проанализировано поведение линейной одномерной системы под воздействием несинусоидальных колебаний при наличии затухания, а также при различных начальных условиях. Показано, что компьютерное моделирование делает наглядным характер переходных и установившихся колебательных процессов в указанных системах.

Теория колебаний применяется в различных областях техники. Следует отметить, что несмотря на большое разнообразие задач, возникающих на практике, все они решаются на основе общих принципов и методов, составляющих содержание теории колебаний [1–3]. В частности, очень важно изучить воздействие на линейную одномерную колебательную систему различных сил внешнего происхождения, т.е. сил, описываемых заданными функциями времени и не зависящими от движения системы.

Как известно, для вынужденных колебаний в линейных одномерных системах применяется линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Анализ колебания состоит в получении решения данного дифференциального уравнения с заданными начальными условиями.

Однако сделать всесторонний анализ колебательного процесса при всех значениях управляющих параметров как самой системы, так и внешнего воздействия достаточно сложно. Таким образом, становится очевидной необходимость в приемах и методах, которые позволили бы получать наглядные решения и сведения о тех или иных свойствах решений. Компьютерный анализ позволяет представить характер любого колебательного процесса наглядно, полностью его исследовать, выявить особенности и изучить их при различных параметрах.

В работе выполнен компьютерный анализ колебательных процессов, происходящих в одномерной линейной системе под влиянием внешних несинусоидальных воздействий. Для объяснения полученных результатов даны соответствующие выражения, полученные аналитически, для колебаний при отсутствии затухания. Проведенные исследования показали, что и для небольших затуханий характер колебательного процесса остается почти таким же, как и описанный аналитическими выражениями, но сочетание последних с компьютерным анализом делает основные особенности колебательных процессов весьма наглядными и легко запоминающимися.

В работе с помощью компьютерного моделирования исследованы колебания в одномерных линейных системах при действии на последние одиночных импульсов и их последовательностей. Ис-

следуемая линейная колебательная система описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = \frac{1}{m} F(t),$$

где  $\beta$  – коэффициент затухания;  $m$  – величина аналогичная массе.

Изучим характер колебаний в системе при действии на нее негармонических сил.

1. Сила меняется по закону  $F(t) = 0$  при  $t < 0$ ,

$$F(t) = \frac{F_0 \cdot t}{T_0} \text{ при } 0 \leq t \leq T_0, \quad F(t) = F_0 \text{ при } t > T_0.$$

Для рассматриваемого случая дифференциальное уравнение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega^2 q &= \frac{1}{m} \frac{F_0 \cdot t}{T_0}, & 0 \leq t \leq T_0, \\ \frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega^2 q &= \frac{1}{m} F_0, & t > T_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{\frac{F_0}{m\omega^2}}, \quad \tau = \frac{t}{T_0}.$$

В соответствии с введенными обозначениями система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \lambda \cdot \frac{d\xi}{d\tau} + 4\pi^2\theta^2\xi &= 4\pi^2\theta^2\tau, & 0 \leq \tau \leq 1, \\ \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \lambda \cdot \frac{d\xi}{d\tau} + 4\pi^2\theta^2\xi &= 4\pi^2\theta^2, & \tau > 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\theta = \frac{T_0}{T}$ ;  $\lambda = 2\beta T_0$ ;  $T$  – период системы;  $T_0$  – время нарастания силы.

Анализ полученных уравнений выполнен с помощью математической системы MathCAD PLUS 7.0 PRO.

На рис. 1 показаны графики зависимости приведенного смещения  $\xi$  системы от величины приведенного времени  $\tau$  в случае различных значений отношения  $\theta = \frac{T_0}{T}$  при нулевых начальных условиях.

Анализ графиков показал, что если  $\theta = 1, 2, \dots, N$  (т.е. отношение времени нарастания силы и собственного периода системы равно целому числу  $N$ ), то при достижении силой максимального значения колебательный процесс прекращается (рис. 1, кривая 2).

Прекращение колебаний в описанных случаях связано с тем, что при  $\tau = 1$  приведенное смещение достигает максимального значения ( $\xi = 1$ ) (смеще-

ние  $x$  при этом равно  $\frac{F_0}{m\omega^2}$  и зависит от амплитуды силы и параметров колебательной системы, но

не зависит от времени нарастания силы), а скорость — нулевого. Суперпозиция сил возвращающей и внешней в момент времени  $\tau = 1$  равна нулю. Эти условия приводят к тому, что процесс колебаний прекращается и после нарастания силы система остается в положении устойчивого равновесия. Следует отметить, что в отсутствие затухания данный режим получается аналитически.

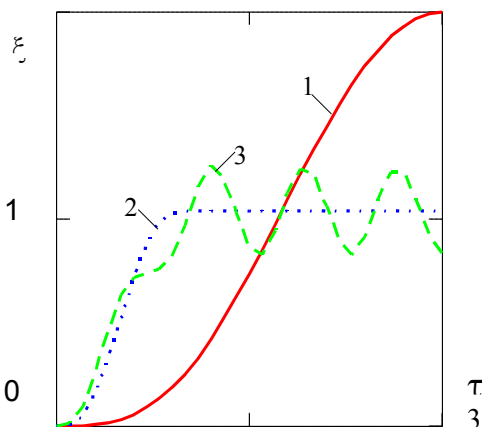


Рис. 1. Зависимость приведенного смещения от приведенного времени: кривая 1 —  $q=0,2$ ; кривая 2 —  $q=1$ ; кривая 3 —  $q=1,4$

В случае, если  $\theta$  не равно целому числу (кривые 1, 3 на рис. 1), то после достижения силой максимального значения в системе устанавливаются (при малых  $\lambda$ ) квазигармонические колебания, амплитуда которых определяется отношением  $\theta$ . Чем меньше  $\theta$ , тем круче нарастает сила, а следовательно, больше изменяется импульс колеблющегося тела под действием внешней силы за одинаковый промежуток времени. Большее изменение импульса приводит к большему отклонению тела от положения равновесия и к большей амплитуде колебаний в режиме  $\tau > 1$ . Положение равновесия при  $\tau > 1$  определяется значением  $\xi = 1$  (это значит, что сме-

ещение  $x = \frac{F_0}{m\omega^2}$  и надлежащим выбором параметров оно может быть определено как величина малая, что соответствует пределам применимости данной теории). Зависимость приведенной амплитуды колебаний  $A(\theta)$  при  $\tau > 1$  определяется выражением

$$A(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta},$$

из которого следует, что с ростом  $\theta$  амплитуда колебаний уменьшается. Максимального значе-

ния приведенная амплитуда ( $\xi = 1, x = \frac{F_0}{m\omega^2}$ ) достигает при  $\theta \rightarrow 0$ , т.е. чем короче действие импульса, тем больше амплитуда колебаний после прекращения его действия. При  $\theta \rightarrow \infty$  (собствен-

ный период колебаний значительно меньше времени нарастания силы) после включения силы колебания прекращаются. Описанные свойства продемонстрированы на рис. 2.

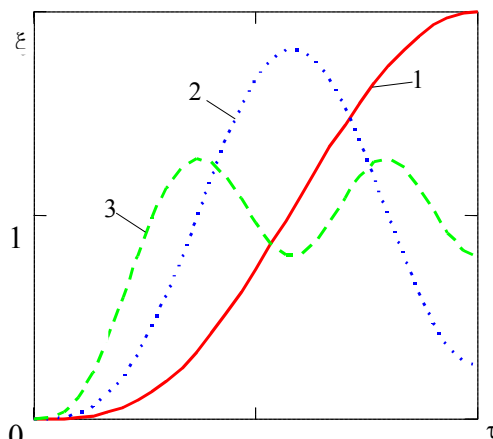


Рис. 2. Зависимость приведенного смещения от приведенного времени: кривая 1 —  $q=0,2$ ; кривая 2 —  $q=0,4$ ; кривая 3 —  $q=0,8$

Приведенная амплитуда колебаний, обозначенных как 1, 2, 3, уменьшается с ростом  $\theta$  при  $\tau > 1$ . Следует отметить, что поскольку в качестве характерного масштаба времени в данном исследовании

выбрана величина  $\tau = \frac{t}{T_0}$ , разные периоды коле-

баний при различных  $\theta$  (рис. 1, 2) связаны с указанным способом нормировки. Легко показать, что после нарастания силы система колеблется с собственным периодом во всех рассмотренных случаях и истинное смещение тела от положения равновесия описывается соотношением

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} \left( 1 - \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta} \cos(\omega(t - \frac{T_0}{2})) \right).$$

Описанный характер зависимости колебаний наблюдался при увеличении  $\lambda$  до значений 0,1.

На рис. 3 дан трехмерный график изменения амплитуды колебаний от приведенного времени и величины  $\theta$ . График показывает динамику изменения колебаний, а также их отсутствие при значениях  $\theta = 1,2$  в области  $\tau > 1$ .

Если начальные условия не нулевые ( $0 \leq x_0 \leq 1$  или  $0 \leq \dot{x}_0 \leq 1$ ), тело совершает колебания (при  $t \geq T_0$ ) вблизи положения равновесия, определяе-

мого  $x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}$  при любых значениях  $\theta$ . Смещение  $x$  тела из положения равновесия при  $t \geq T_0$  изменяется по следующему закону:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} \left( x_0 \cos(\omega t) + 1 - \cos(\omega(t - \frac{T_0}{2})) \right),$$

из которого следует, что в системе всегда при достаточно малых  $\lambda$  будет реализовываться режим колебаний.

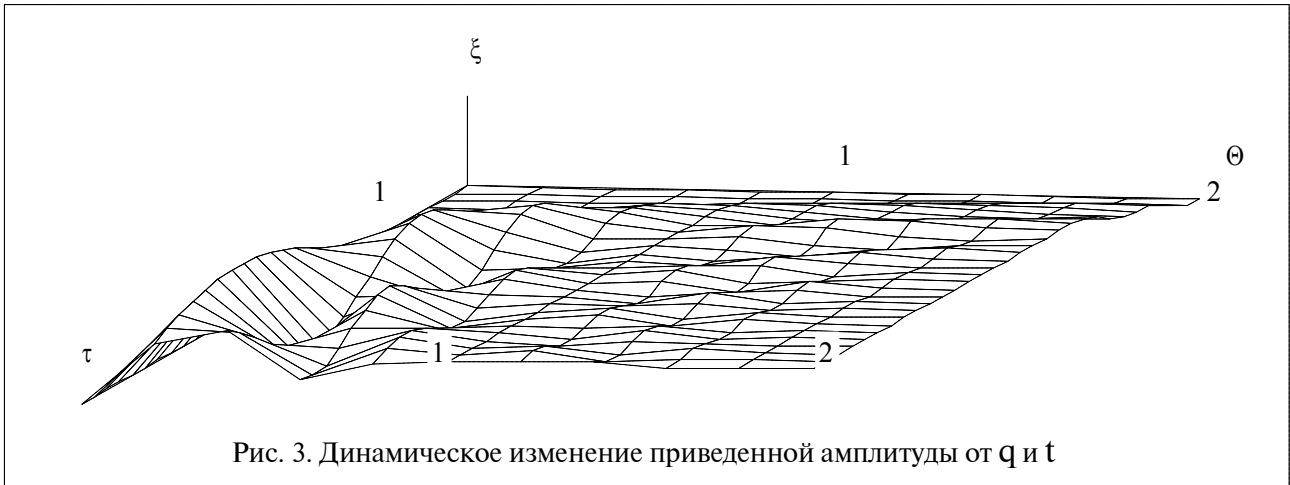


Рис. 3. Динамическое изменение приведенной амплитуды от  $q$  и  $t$

2. Зависимость внешней силы от времени равна  $F = 0$  при  $t < 0$ ,  $F = F_0$  при  $0 \leq t \leq T_0$ ,  $F = 0$  при  $t > T_0$ .

С учетом безразмерных постоянных дифференциальное уравнение колебаний записывается следующим образом:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \lambda \cdot \frac{d\xi}{d\tau} + 4\pi^2\theta^2\xi = 4\pi^2\theta^2, 0 \leq \tau \leq 1,$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \lambda \cdot \frac{d\xi}{d\tau} + 4\pi^2\theta^2\xi = 0, \tau > 1.$$

На рис. 4 показан график зависимости приведенного смещения от приведенного времени для различных отношений  $\theta$ .

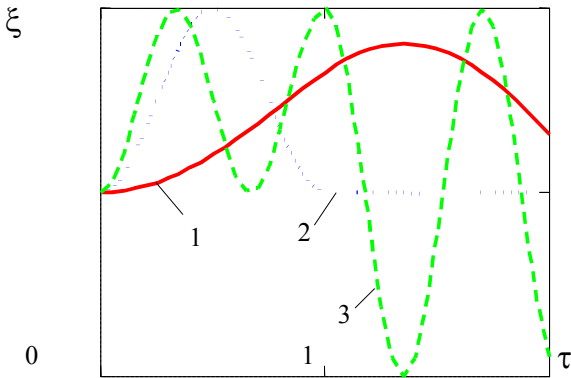


Рис. 4. Зависимость приведенного смещения от времени: кривая 1 -  $q=0,3$ ; кривая 2 -  $q=1$ ; кривая 3 -  $q=1,5$

Как следует из графика, амплитуда колебаний при  $\tau > 1$  зависит от отношения  $\theta$ .

Колебательный процесс при  $\tau = 1$  прекращается для  $\theta = N$  (где  $N$  — целое число, т.е. время действия импульса кратно собственному периоду системы) и нулевых начальных условий (кривая 2, рис. 4). Прекращение колебаний связано с тем, что при действии на колебательную систему постоянной силы последняя совершает колебания вблизи положения равновесия, которое определяется усло-

вием  $\xi = 1$ , ( $x = \frac{F_0}{m\omega^2}$ ). Тогда положение устойчивого равновесия при отсутствии внешней силы  $\xi = 0$  становится положением максимального отклонения. Если момент прекращения действия силы ( $\tau = 1$ ) совпадает с моментом времени, когда тело занимает это положение, кинетическая и потенциальная энергия тела при отсутствии внешнего воздействия становятся равными нулю, и процесс колебаний прекращается. Если  $\theta$  не равно целому числу, но начальные условия нулевые, амплитуда колебаний тела, установившаяся после прекращения действия импульса, зависит от  $\theta$  следующим образом:  $A(\theta) = 2 \sin(\pi\theta)$ , т.е. является периодической функцией величины  $\theta$ . Максимального значения приведенная амплитуда достигает при  $\theta = N/2$ , где  $N$  — нечетное число. При этом истинное смещение тела от положения равновесия описывается функцией

$$x(t) = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin\left(\pi \frac{T_0}{T}\right) \sin\left(\omega\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right).$$

Трехмерный график (рис. 5) зависимости приведенного смещения от приведенного времени  $\tau$  и от значения  $\theta$  показывает динамику развития колебаний и демонстрирует их отсутствие при  $\theta = 1, 2$  для  $\tau \geq 1$ .

Описанный характер изменения амплитуды от времени сохранялся при увеличении  $\lambda$  до значения, равного 0,1.

В случае, если начальное приведенное смещение равно 1 ( $\xi_0 = 1$ ), суперпозиция сил, действующих на тело, приводит к отсутствию колебаний при  $\tau < 1$  для всех исследуемых значений  $\theta$ . При  $\tau \geq 1$  тело колеблется с собственной частотой вблизи положения равновесия, определяемого соотношением  $\xi = 0$  ( $x=0$ ) (рис. 6).

3. Сила меняется по закону  $F = 0$  при  $t < 0$ ,  $F = F_0 \cdot t / T_0$  при  $0 \leq t \leq T_0$ ,  $F = 0$  при  $t > T_0$ .

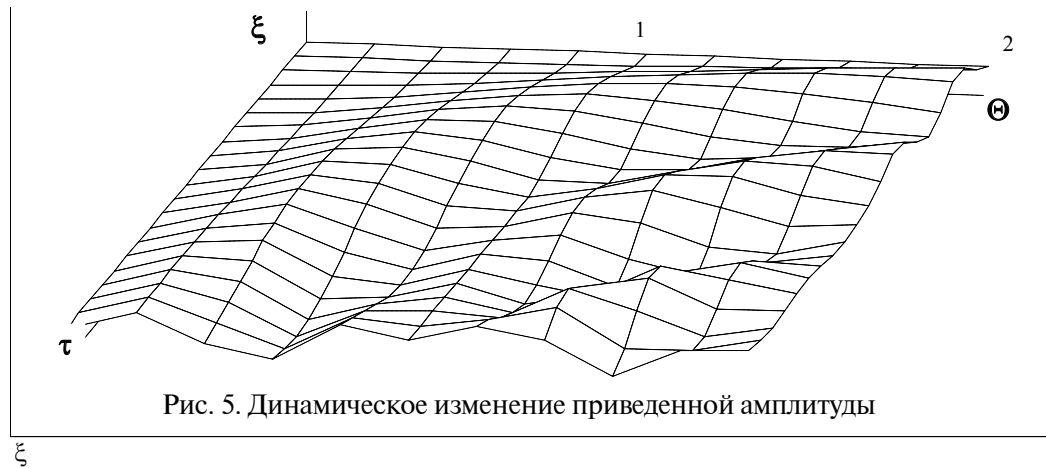


Рис. 5. Динамическое изменение приведенной амплитуды

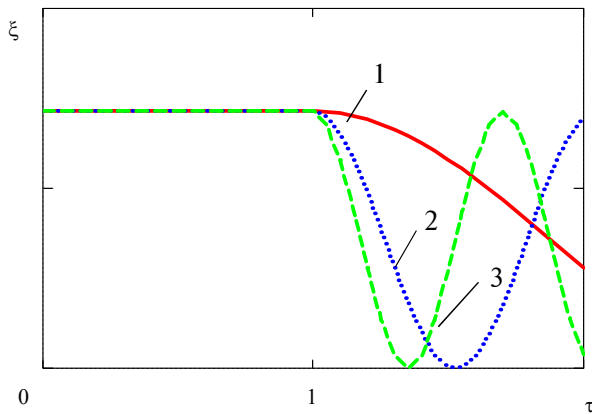


Рис. 6. Зависимость приведенного смещения от времени: кривая 1 –  $q=0,2$ ; кривая 2 –  $q=1$ ; кривая 3 –  $q=1,5$

С учетом безразмерных постоянных дифференциальное уравнение колебаний записывается следующим образом:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \lambda \cdot \frac{d\xi}{d\tau} + 4\pi^2\theta^2\xi = 4\pi^2\theta^2\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \lambda \cdot \frac{d\xi}{d\tau} + 4\pi^2\theta^2\xi = 0, \quad \tau > 1.$$

Графики зависимости приведенных колебаний тела от величины  $\theta$  показаны на рис. 7. При всех исследованных значениях в интервале  $0 \leq \tau \leq 1$  тело совершает колебания вблизи линейно меняющегося положения равновесия. В интервале  $\tau \geq 1$  колебания происходят вблизи положения равновесия, определяемого соотношением  $\xi = 0$  ( $x=0$ ). Изменение амплитуды от времени находится с помощью следующего соотношения:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} (\cos(\omega(t - T_0)) - \frac{\sin(\pi \frac{T_0}{T})}{\pi \frac{T_0}{T}} \cos(\omega(t - \frac{T_0}{T}))),$$

из которого следует, что если отношение времени нарастания импульса к собственному периоду системы равно целому числу ( $\frac{T_0}{T} = N, N = 1, 2, 3, \dots$ ),

амплитуда колебаний при  $t \geq T_0$  равна одному и тому же значению ( $\frac{F_0}{m\omega^2}$ ).

Кривые на рис. 7 демонстрируют описанный характер колебаний.

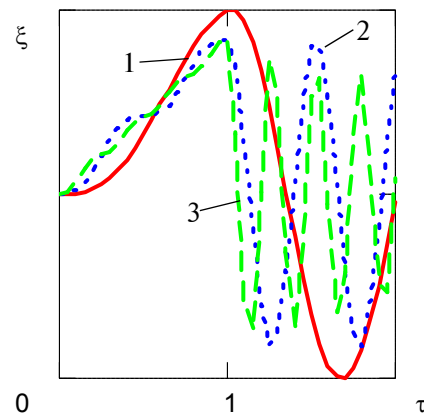


Рис. 7. Зависимость приведенного смещения от времени: кривая 1 –  $q=0,4$ ; кривая 2 –  $q=1$ ; кривая 3 –  $q=2$ .

В случае, если начальное смещение не равно нулю, изменение амплитуды колебаний от времени описывается следующим соотношением:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} (\cos(\omega(t - T_0)) - \frac{\sin(\pi \frac{T_0}{T})}{\pi \frac{T_0}{T}} \times \cos(\omega(t - \frac{T_0}{2})) + x_0 \cos(\omega t)).$$

Анализ данного выражения показал, что если отношение периода нарастания импульса к собственному периоду системы равно целому числу

$N \left( \frac{T_0}{T} = 1, 2, \dots, N \right)$ , в случае начального отклонения, равного  $x_0 = -\frac{F_0}{m\omega^2}$ , колебания при  $t \geq T_0$

происходить не будут. Если же  $x_0 = \frac{F_0}{m\omega^2}$ , амплитуда колебаний тела при  $t \geq T_0$  значительно возрастет.

происходить не будут. Если же  $x_0 = \frac{F_0}{m\omega^2}$ , амплитуда колебаний тела при  $t \geq T_0$  значительно возрастет.

Если на колебательную систему действует серия прямоугольных импульсов, приведенный период которых равен  $p = \frac{T_1}{T}$ , где  $T_1$  – период действия импульса, при определенных соотношениях между параметрами внешнего воздействия и параметрами системы также существуют временные интервалы, в которых система находится в состоянии устойчивого равновесия. В частности, если  $\xi_0 = 1, \dot{\xi}_0 = 0$ , то при  $\theta = 1, p = 2, 3, \dots$  колебания происходят только в промежутки времени, когда амплитуда внешней силы равна нулю. В моменты времени, когда амплитуда внешней силы не равна нулю, тело оказывается "запертым" и находится в состоянии устойчивого равновесия, определяемого значением  $\xi_0 = 1$ . Данный характер колебаний иллюстрируется кривой 1 на рис. 8.

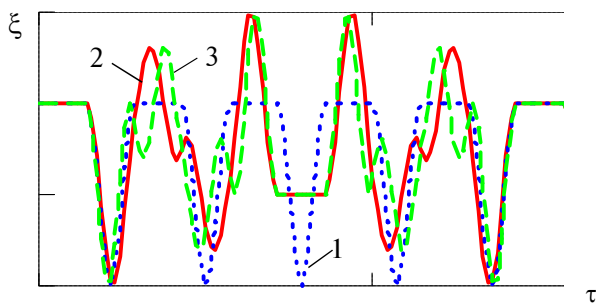


Рис. 8. Зависимость приведенного смещения от времени: кривая 1 –  $p/q=2/1$ ; кривая 2 –  $p/q=2/0,9$ ; кривая 3 –  $p/q=2/1,1$ ; ( $\xi_0 = 1$ )

При небольшом изменении  $\theta$  происходит потеря устойчивости в указанных временных интервалах. Кривые 2, 3 рис. 8 показывают потерю устойчивости.

На рис. 9 приведено изменение амплитуды под действием серии прямоугольных импульсов. Как видно из рисунка, наибольшая приведенная амплитуда соответствует значению  $\theta = 0,5$  при  $p = 2$ , т.е. "включение" силы должно происходить в моменты, когда тело имеет наибольшую скорость и находится в фазе с направлением действия силы.

Если приведенное начальное смещение и приведенная начальная скорость равны нулю ( $\xi_0 = 0, \dot{\xi}_0 = 0$ ), то при  $\theta = 1, p = 1$  тело находится в состоянии

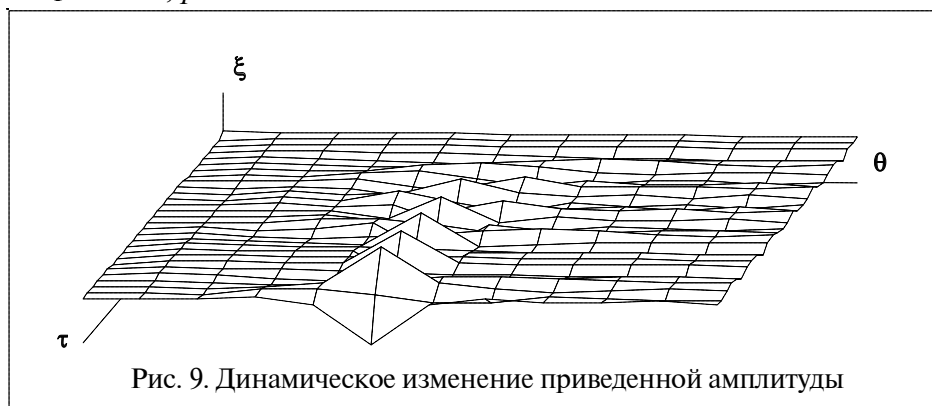


Рис. 9. Динамическое изменение приведенной амплитуды

устойчивого равновесия ( $\xi = 0$ ) в моменты времени, определяемые соотношением  $1 + Np \leq \tau \leq (N + 1)p$ , где  $N \in 0, 1, \dots$ .

В остальное время тело совершает колебания вблизи положения равновесия, определяемого соотношением  $\xi = 1$ .

Изменение параметра  $\theta$  или  $p$  приводит к возникновению колебания в моменты времени, соответствующие устойчивому равновесию. Описанный характер колебаний тела под действием серии прямоугольных импульсов продемонстрирован на рис. 10.

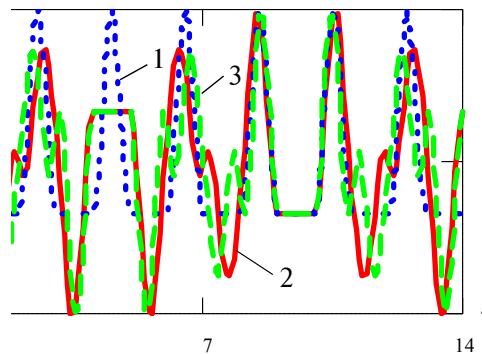


Рис. 10. Зависимость приведенного смещения от времени: кривая 1 –  $p/q=2/1$ ; кривая 2 –  $p/q=2/0,9$ ; кривая 3 –  $p/q=2/1,1$ ; ( $\xi_0 = 0$ )

Кривая 1 соответствует случаю  $\theta = 1, p = 1$  и показывает области устойчивого равновесия, кривые 2, 3 свидетельствуют о потере устойчивости при изменении параметра  $\theta$ . Проведенное в данной работе компьютерное исследование переходных и установившихся режимов при действии на одномерную колебательную систему внешних несинусоидальных воздействий позволило установить ряд простых закономерностей, которые могут быть использованы в учебном процессе, так как подобное исследование делает наглядными и легко доступными для понимания разделы, которые традиционно относились к курсу теоретической физики.

**Литература:** 1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Механика. М.: Наука, 1964. 204 с. 2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 586 с. 3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.

Поступила в редколлегию 22.06.98

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Стороженко В.А.

**Гетманова Елена Евгеньевна**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики ХТУРЭ. Научные интересы: теория нелинейных колебаний. Адрес: 310166, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-45, 26-43-85.

**Семерич Юрий Станиславович**, студент ХТУРЭ. Увлечения: компьютер, иностранные языки. Адрес: 310166, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 26-38-80.