

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інфокомунікацій
(повна назва)

Кафедра інформаційно-мережної інженерії
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Дослідження можливостей застосування методів інтерполяції
характеристик радіоелектронних елементів пристроїв систем зв'язку
(тема)

Виконав:
здобувач 2 курсу, групи ІМІм-24-1
Омельченко В.І.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 172 Електронні комунікації
та радіотехніка
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
Освітня програма інформаційно-мережна
інженерія
(повна назва освітньої програми)

Керівник доцент Ляшенко Г.Є.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту
Завідувач кафедри _____
(підпис)

Микола МОСКАЛЕЦЬ
(прізвище, ініціали)

20 25 р.

Не містить відомостей заборонених до відкритого публікування.

Студент / Омельченко В.І. /

Керівник / Ляшенко Г.Є. /

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____ *інфокомунікацій* _____
Кафедра _____ *інформаційно-мережної інженерії* _____
Рівень вищої освіти _____ *другий (магістерський)* _____
Спеціальність _____ *172 Електронні комунікації та радіотехніка* _____
(код і повна назва)
Тип програми _____ *освітньо-професійна* _____
Освітня програма _____ *інформаційно-мережна інженерія* _____
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____
(підпис)
« _____ » _____ 20 ____ р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві _____ *Омельченку Владиславу Івановичу* _____
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи *Дослідження можливостей застосування методів інтерполяції характеристик радіоелектронних елементів пристроїв систем зв'язку*

затверджена наказом університету від 24 жовтня 2025 р. № 959Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 19 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи _____
Огляд типів радіоелектронних елементів та їхніх електричних характеристик;
огляд методів інтерполяції функціональних залежностей, поданих сукупністю дискретних даних; методи інтерполяції вольт-амперних характеристик радіоелектронних елементів; комп'ютерна реалізація методів інтерполяції вольт-амперних характеристик радіоелектронних елементів.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____
Вступ;

1. Огляд характеристик радіоелектронних елементів пристроїв телекомунікаційних мереж;

2. Методи інтерполяції характеристик фізичних величин;

3. Метод інтерполяції характеристик за допомогою сплайнів;

4. Випробування методів інтерполяції характеристик радіоелектронних елементів;

Висновки.

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (п.5 включається до завдання за рішенням випускової кафедри) _____

Слайди презентації: оглядові слайди; слайди з пояснення методу; слайди з розробкою методу; слайди з результатами випробування.

6. Консультанти розділів роботи (п.6 включається до завдання за наявності консультантів згідно з наказом, зазначеним у п.1)

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім'я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата
Основна частина	доцент Ляшенко Г.Є.		

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Ознайомлення з завданням	28.10.25	виконано
2	Пошук джерел за темою та ознайомлення	28.10.25 – 31.10.25	виконано
3	Розробка оглядової частини	01.11.25 – 08.11.25	виконано
4	Огляд методів інтерполяції дискретних даних	09.11.25 – 15.11.25	виконано
5	Розробка методів інтерполяції вольт-амперних характ-к	16.11.25 – 23.11.25	виконано
6	Створення та випробування комп'ютерної реалізації	24.11.25 – 07.12.25	виконано
7	Розробка та виконання текстової частини	08.12.25 – 20.12.25	виконано
8	Розробка графічної частини	21.12.25 – 23.12.25	виконано
9	Надання пояснювальної записки на рецензування		
	та для захисту	19.12.25	виконано

Дата видачі завдання 27 жовтня 2025 р.

Здобувач _____

(підпис)

Керівник роботи _____

(підпис)

доцент Ляшенко Г.Є.

(посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: сторінок – 70, рисунків – 31, таблиць – 4, джерел – 15, додатків – 1.

МЕРЕЖА ЗВ'ЯЗКУ, ВОЛЬТ-АМПЕРНА ХАРАКТЕРИСТИКА, ДІОД, ТРАНЗИСТОР, МОТОД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ, ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ, СПЛАЙН

Надано огляд вольт-амперних характеристик напівпровідникових діодів та транзисторів та розглянуто їхні особливості. Обґрунтовано необхідність виконання інтерполяції характеристик радіоелектронних елементів. Розглянуто сукупність математичних методів інтерполяції даних у вигляді дискретних сукупностей, що отримані шляхом досліджень та вимірювань. Реалізовано випробування методів інтерполяції вольт-амперних характеристик реальних електронних елементів. Проведено порівняння та сформульовано рекомендації по обранню оптимального методу.

Розроблено програмні модулі, що реалізують методи інтерполяції характеристик та проведено з їхньою допомогою розрахунки. Отримано результати, які підтверджують коректність виконаної роботи.

THE ABSTRACT

Explanatory slip: pages – 70, figures – 31, tables – 4, sources – 15, appendices – 1.

COMMUNICATION NETWORK, VOLTAGE-CURRENT CHARACTERISTICS, DIODE, TRANSISTOR, INTERPOLATION METHOD, INTERPOLATION POLYNOM, SPLINE

A review of the current-voltage characteristics of semiconductor diodes and transistors is provided and their features are considered. The need for interpolation of the characteristics of radio electronic elements is justified. A set of mathematical methods for data interpolation in the form of discrete sets obtained through research and measurements is considered. Methods for interpolation of the current-voltage characteristics of real electronic elements are tested. A comparison is made and recommendations for choosing the optimal method are formulated.

Software modules that implement methods for interpolation of characteristics are developed and calculations are performed with their help. Results are obtained that confirm the correctness of the work performed.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ.....	7
ВСТУП.....	8
1 ОГЛЯД ХАРАКТЕРИСТИК РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИСТРОЇВ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖ	9
2 МЕТОДИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН.....	13
2.1 Метод інтерполяції багаточленом Лагранжа	13
2.2 Метод інтерполяції багаточленом Ньютона.....	16
2.3 Метод лінійної інтерполяції.....	20
2.4 Метод поліноміальної інтерполяції.....	24
2.4.1 Метод інтерполяції квадратичними поліномами.....	25
2.4.2 Метод інтерполяції кубічними поліномами	29
2.5 Підсумкові зауваження	35
3 МЕТОД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК ЗА ДОПОМОГОЮ СПЛАЙНІВ	39
4 ВИПРОБУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	48
ВИСНОВКИ.....	57
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ.....	58
ДОДАТОК А СЛАЙДИ ПРЕЗЕНТАЦІЇ.....	60

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

БПТ	–	біполярний транзистор;
ВАХ	–	вольт-амперними характеристиками;
ПТ	–	польовий транзистор.

ВСТУП

Всі галузі сучасного суспільного господарства ґрунтуються на зборі, зберіганні, обробці та передаванні великих об'ємів інформації. Необхідною ланкою цього процесу є розгалужені телекомунікаційні мережі.

Роботу мереж забезпечує радіоелектронне обладнання, яке в свою чергу складається з радіоелектронних елементів. Елементи створюються з напівпровідникових матеріалів та визначаються в більшості випадків своїми вольт-амперними характеристиками (ВАХ). Основні елементи це: діоди, біполярні та польові транзистори. Вони застосовуються як безпосередньо так і в складі інтегральних схем.

Вивчення ВАХ цих напівпровідникових елементів з залученням методів інтерполяції характеристик є дуже важливим та необхідним заходом. Самі ВАХ є безпосереднім та головним джерелом відомостей про властивості та можливості напівпровідникових елементів.

Інтерполяція виявляється необхідною, оскільки ВАХ елементів є результатом їхнього вимірювання, а тому не має первинного аналітичного співвідношення. Інтерполяція є зручним та ефективним інструментом аналізу ВАХ без спрощення фізичної природи процесів, які мають місце в напівпровідниковому елементі.

Отримання аналітичних залежностей ВАХ діодів та транзисторів за допомогою методів інтерполяції експериментальних даних дозволяє створювати математичні моделі елементів, які можна та слід використовувати в моделюванні пристроїв засобами обчислювальної техніки. Цей фактор є наймовірно важливим, оскільки сучасну радіоелектронну апаратур належної якості та з потрібним на даний момент переліком функцій неможливо проектувати без залучення комп'ютерів із спеціалізованим програмним забезпеченням.

Робота присвячена огляду та аналізу методів інтерполяції функціональних залежностей, які подані сукупністю дискретних даних. Розроблені та реалізовані комп'ютерні алгоритми інтерполяції ВАХ напівпровідникових елементів, що дозволило отримати корисні результати.

1 ОГЛЯД ХАРАКТЕРИСТИК РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИСТРОЇВ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖ

Сучасні інформаційні мережі зв'язку є складними технічними системами, що складаються сукупності різноманітного радіоелектронного обладнання. Умовна узагальнена структурна схема обладнання мережі зв'язку надана на рис. 1.1.

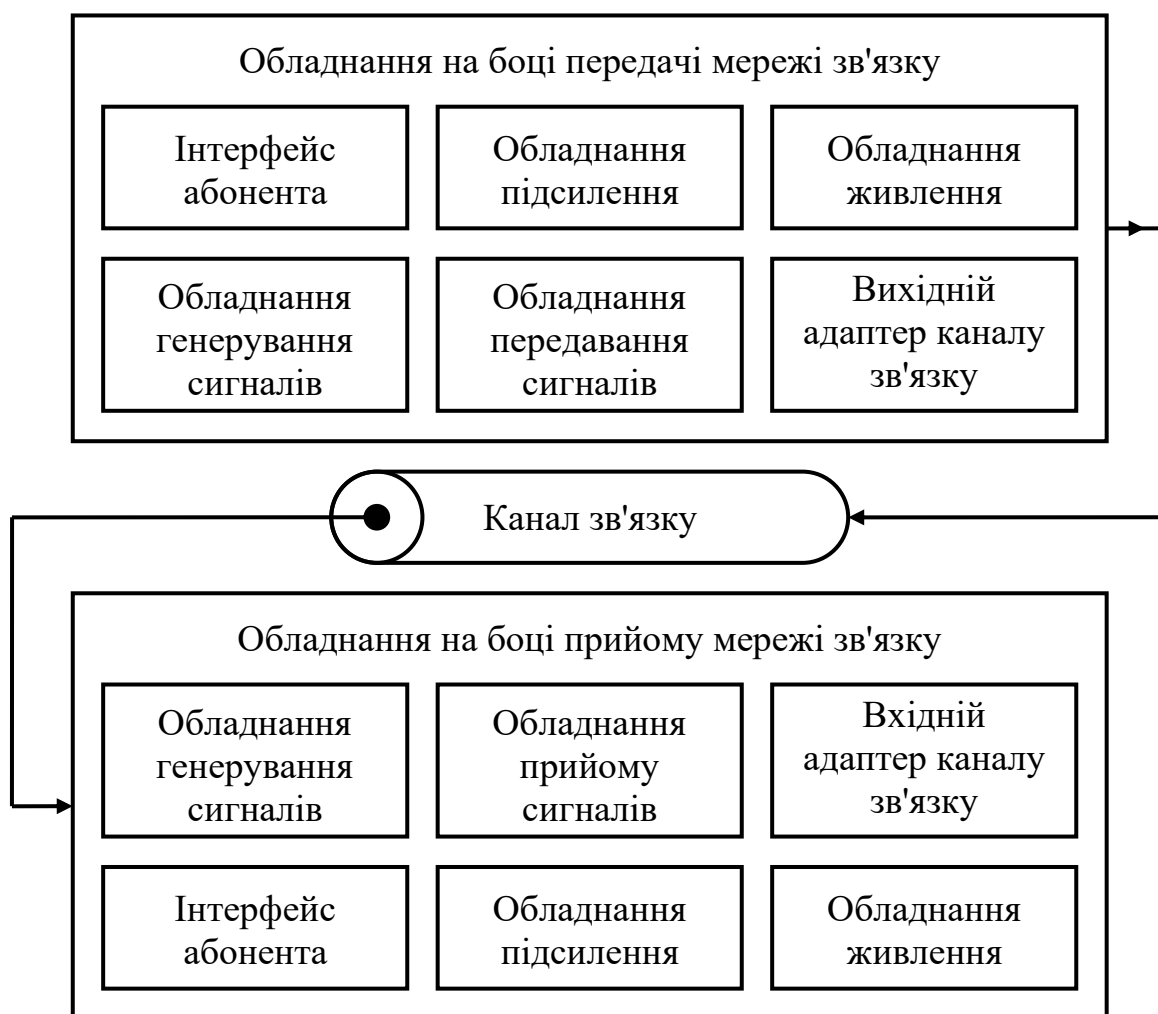


Рисунок 1.1 – Умовна узагальнена структурна схема обладнання мережі зв'язку

Радіоелектронне обладнання будується на основі електро-радіо елементів, поміж яких можна розрізнити: лінійні пасивні елементи, нелінійні активні елементи та інтегральні електронні схеми. Це далеко неповний перелік, але предметом розгляду будуть деякі представники нелінійних елементів. В сучасній апаратурі ці елементи виконуються з напівпровідникових матеріалів

таких як: кремній, германій, селен, арсенід галію. найбільше поширення в застосуванні має кремній. Також використовуються метали: золото, срібло, міді, вольфрам. В більшості випадків метали виконують допоміжну функцію. Властивості елементів цілком визначаються властивостями напівпровідників.

Властивості елементів відображаються в їхніх характеристиках. В більшості випадків характеристики відображають залежність електричного струму через виводи елементів від прикладеної до них електричної напруги. Принято такі характеристики називати вольт-амперними характеристиками (ВАХ) елементу.

Увага буде приділена таким елементам як: діоди, біполярні та польові транзистори.

У інформаційних цифрових системах зв'язку діоди виконують роль базових елементів. Діоди застосовують майже в усіх передавачах, приймачах, модемах тощо.

Діоди можна вважати найпростішими радіоелементами всього з двома виводами. Тому будь-який діод має одну ВАХ, приклад якої наведено на рис. 1.2.

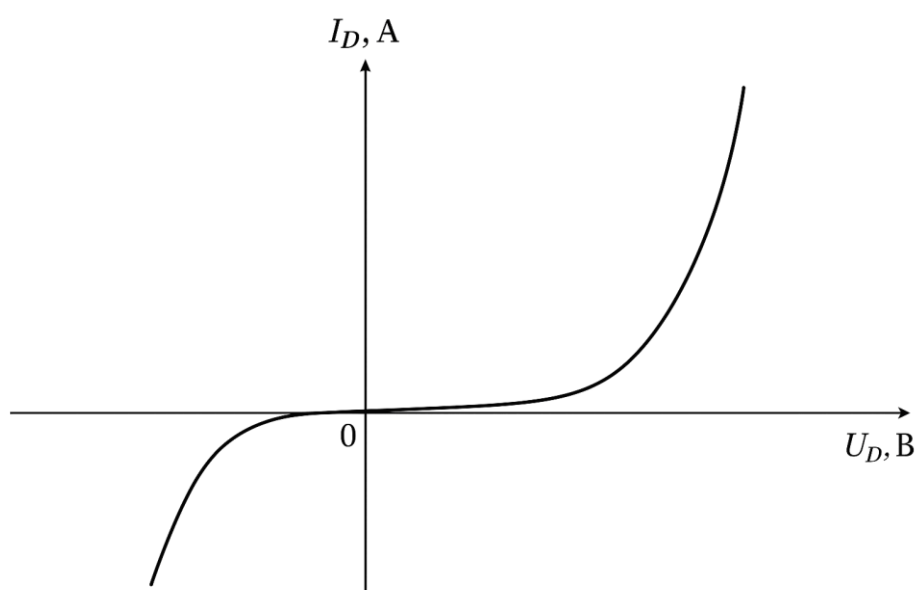


Рисунок 1.2 – Приклад ВАХ напівпровідникового діода

На рис. 1.3 маємо приклад ВАХ тунельного діода, що має ділянку від'ємного внутрішнього опору.

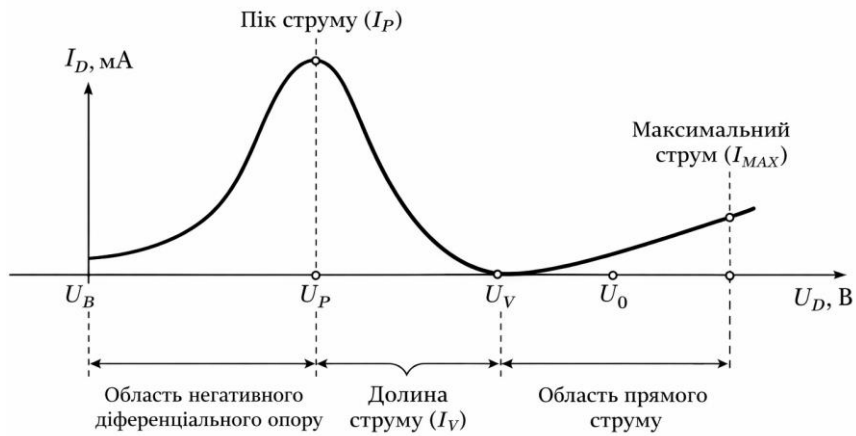


Рисунок 1.3 – Приклад ВАХ тунельного діода

Біполярні транзистори (БПТ) широко застосовуються у в мережному обладнанні мереж зв'язку як основа побудови пристроїв підсилення електричних сигналів в достатньо широкому діапазоні частот.

БПТ складніший за діод радіоелемент, що має три виводи, відповідно дві ВАХ: вхідну та вихідну. На рис. 1.4 маємо приклад вихідної ВАХ БПТ.

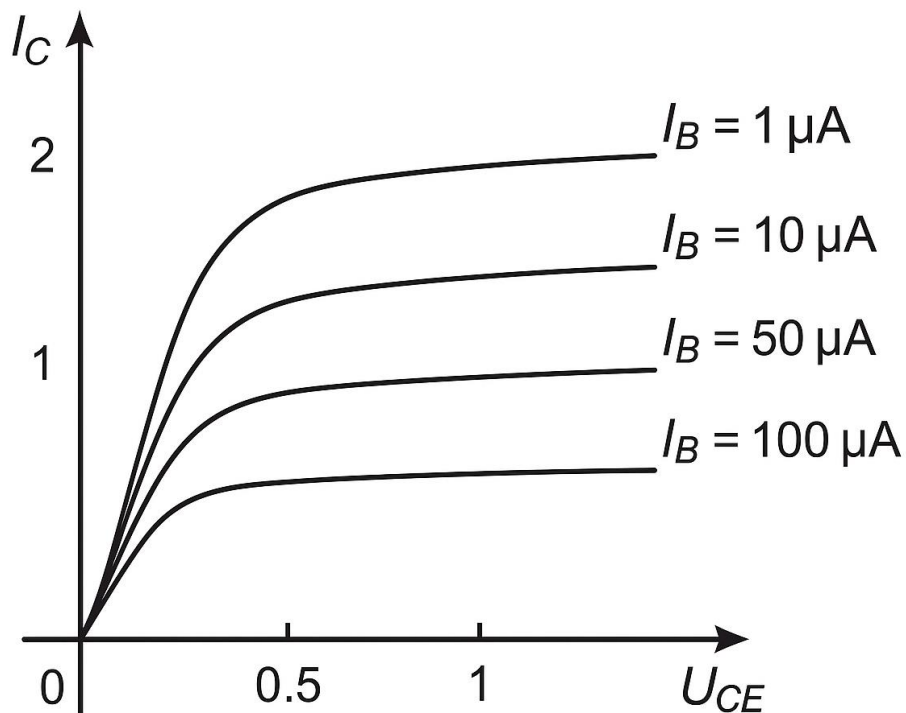


Рисунок 1.4 – Приклад вихідної ВАХ біполярного транзистора

Польові транзистори (ПТ) також широко застосовуються у в мережному обладнанні мереж зв'язку як основа побудови пристроїв підсилення електричних сигналів в достатньо широкому діапазоні частот.

ПТ має деякі переваги в порівнянні з БПТ та де в чому йому поступається. ПТ також має три виводи, відповідно дві ВАХ: вхідну та вихідну. На рис. 1.5 маємо приклад вихідної ВАХ ПТ.

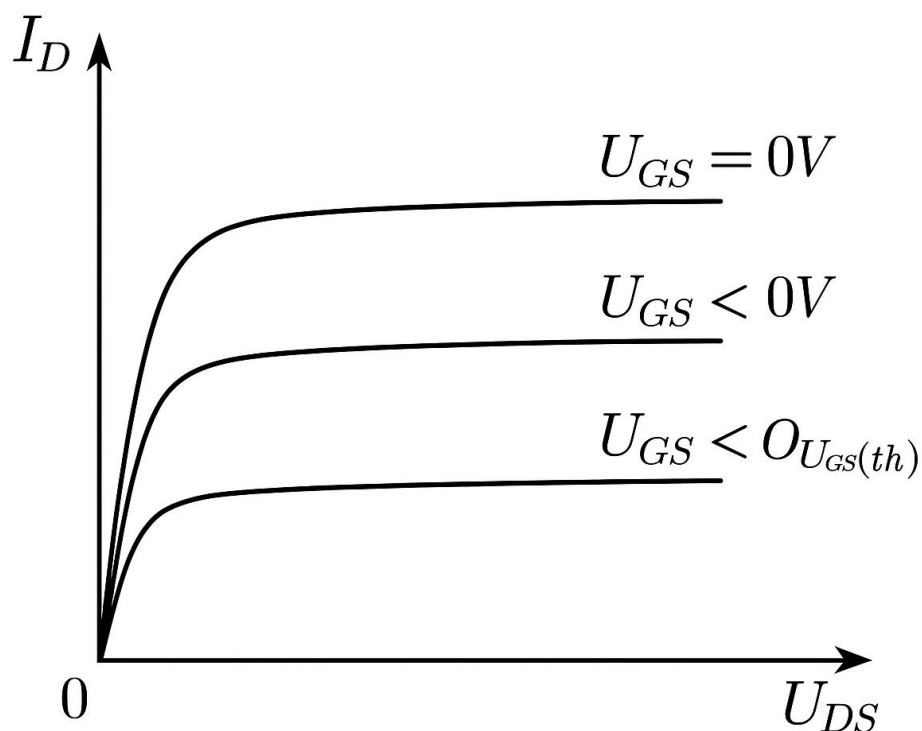


Рисунок 1.5 – Приклад вихідної ВАХ польового транзистора

Характеристики реальних радіоелементів здобувають шляхом вимірювань та заносять до таблиць. Точних аналітичних співвідношень для ВАХ не існує. Тому для виконання технічних розрахунків та комп'ютерного моделювання застосовують різні методи інтерполяції та апроксимації. Існує проблема визначення оптимальних методів.

2 МЕТОДИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН

В процесі проектування технічних засобів, зокрема радіоелектронних засобів телекомунікацій обов'язково застосовуються певні математичні методи, які дозволяють зробити необхідні розрахунки, а також провести моделювання роботи вказаних пристроїв. Одним з таких методів є метод інтерполяції функціональних залежностей.

Метод інтерполяції полягає в обчисленні значень функції проміжних між тими, які надані наприклад у табличному вигляді. Відомі табличні дані можуть бути отримані в результаті вимірювань або досліджень.

Інтерполяція надає можливість створити аналітичний вираз функції, яка містить в собі табличні точки.

Отриманий аналітичний вираз гладку функції допоможе оцінити величини проміжні між відомими. Може використовуватися для моделювання процесів та побудови графіків.

В практичних інженерних розробках частіше за все можна зустріти наступні методи інтерполяції:

- багаточлен Лагранжа;
- багаточлен Ньютона;
- лінійна інтерполяція;
- поліноміальна інтерполяція;
- інтерполяція сплайнами.

Обрання того чи іншого методу інтерполяції визначається особливостями технічної задачі, яку треба розв'язувати.

2.1 Метод інтерполяції багаточленом Лагранжа

Метод багаточлену або поліному Лагранжа надає можливість з'єднати $(n + 1)$ точок досліджуваної функції гладкою кривою. Означена крива описується поліномом n -го степеня. Степень поліному є мінімально можливим для досліджуваної функції.

Згідно з методом слід побудувати єдиний поліном, який на заданому наборі точок співпадає з функцією. Степень поліномі на одиницю менше кількості точок в наборі.

Вираз багаточлену Лагранжа має наступний вигляд:

$$L(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(x),$$

де $l_i(x)$ – базисні поліноми Лагранжа.

Формула для базисних поліномів Лагранжа має вигляд:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Для того, щоб інтерполяційний поліном Лагранжа задовольняв умові $L(x_i) = f(x_i)$ треба, щоб базисні поліноми Лагранжа володіли наступною властивістю

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Спираючись на викладену методику слід розробити низку макросів у програмному середовищі пакету MathCad, яка надасть можливість проводити інтерполяцію функціональної залежності, заданою сукупністю точок, шляхом формування багаточлену Лагранжа.

Текст програмного коду означених макросів наводиться далі (лістинг 2.1).

Лістинг 2.1 – Макроси для інтерполяційного багаточлену Лагранжа

Макрос вилучає координати однієї з табличних точок функції, що інтерполюється, для формування відповідного базового поліному Лагранжа.

xy - матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється;

j - індекс координат однієї з табличних точок функції, що вилучається.

```
workLagrMatr(xy,j) :=
  xy ← submatrix(xy,j + 1,rows(xy) - 1,0,cols(xy) - 1) if j = 0
  otherwise
  | xy ← submatrix(xy,0,rows(xy) - 2,0,cols(xy) - 1) if j = rows(xy) - 1
  | otherwise
  | | vectOne ← submatrix(xy,0,j - 1,0,cols(xy) - 1)
  | | vectTwo ← submatrix(xy,j + 1,rows(xy) - 1,0,cols(xy) - 1)
  | | xy ← stack(vectOne,vectTwo)
  return xy
```

Макрос формує базовий поліном Лагранжа, який відповідає координатам вилученої однієї з табличних точок функції, що вилучається.

xy - матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється;
 j - індекс координат однієї з табличних точок функції, що вилучається;
 χ - аргумент інтерполяційного поліном Лагранжа.

$$\text{baseLagr}(xy, j, \chi) := \left\{ \begin{array}{l} x_j \leftarrow xy_{j,0} \\ xy \leftarrow \text{workLagrMatr}(xy, j) \\ x \leftarrow xy^{\langle 0 \rangle} \\ \text{return } P \leftarrow \prod_{i=0}^{\text{rows}(xy)-1} \frac{\chi - x_i}{x_j - x_i} \end{array} \right.$$

Макрос формує інтерполяційний поліном Лагранжа, який відповідає координатам табличних точок функції, що вилучається.

xy - матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється;
 χ - аргумент інтерполяційного поліном Лагранжа.

$$\text{lagrangePoly}(xy, \chi) := \left\{ \begin{array}{l} N \leftarrow \text{rows}(xy) - 1 \\ y \leftarrow xy^{\langle 1 \rangle} \\ P \leftarrow 0 \\ \text{return } P \leftarrow P + \sum_{i=0}^N (y_i \cdot \text{baseLagr}(xy, i, \chi)) \end{array} \right.$$

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється $f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$

Створення інтерполяційного поліному Лагранжа $\text{lagPoly}(\chi) := \text{lagrangePoly}(f, \chi)$

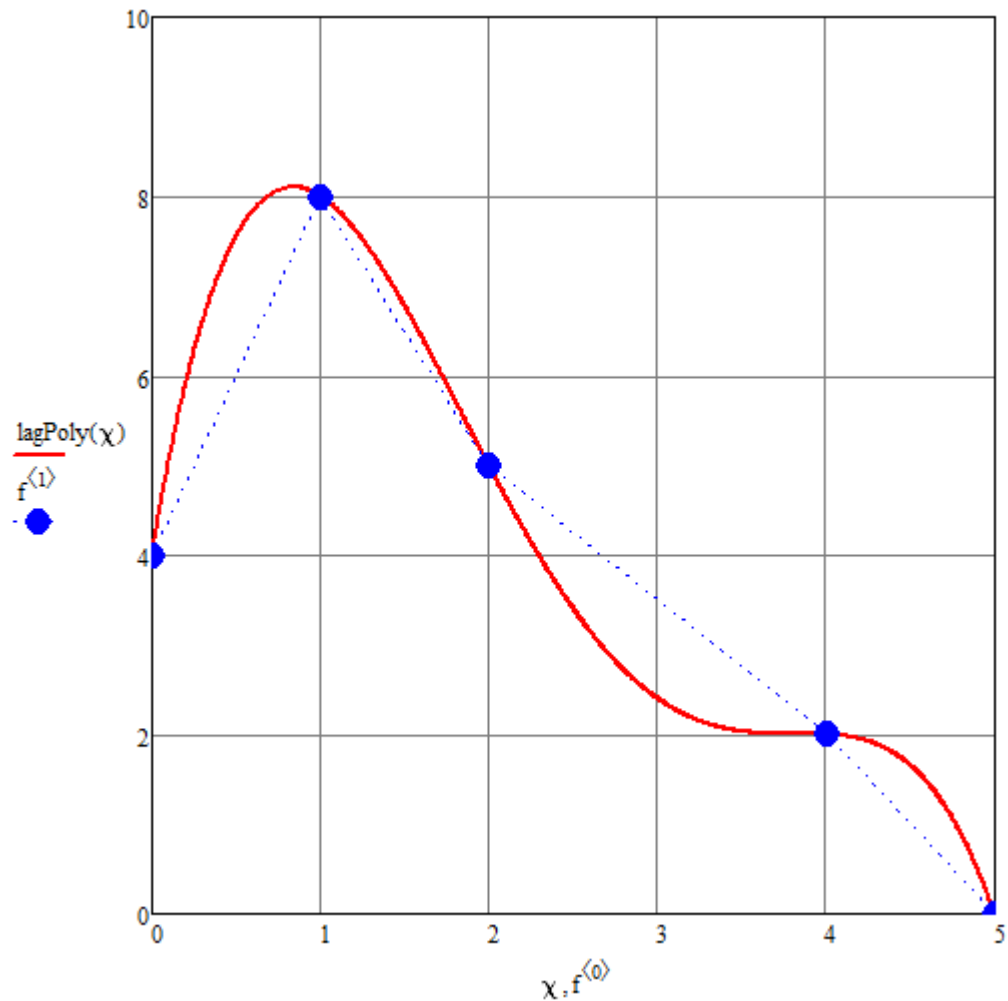


Рисунок 2.1 – Приклад інтерполяційного багаточлену Лагранжа

На рис. 2.1 показано – приклад інтерполяційного багаточлену Лагранжа

2.2 Метод інтерполяції багаточленом Ньютона

Багаточлен Ньютона будується за формулою в загальному вигляді:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Існує також рекурентна формула для побудови багаточлену Ньютона:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Спираючись на рекурентну формулу будується наступна послідовність поліномів:

$$P_0(x) = a_0;$$

$$P_1(x) = P_0(x) + a_1(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0);$$

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1);$$

...

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) =$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Тепер можна перейти до побудови лінійної системи рівнянь відносно коефіцієнтів багаточлена Ньютона, що відповідають заданим точкам функції, яку слід уявити інтерполяційним поліномом:

$$P_0(x_0) = a_0 = y_0;$$

$$P_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1;$$

$$P_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2;$$

...

$$P_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = y_n.$$

В цій системі невідомі величини – це коефіцієнти багаточлена Ньютона, а постійні множники при них та вільні члени формуються з табличного наведення функції.

Спираючись на викладену методику слід розробити низку макросів у програмному середовищі пакету MathCad, яка надасть можливість проводити інтерполяцію функціональної залежності, заданою сукупністю точок, шляхом формування багаточлену Ньютона.

Текст програмного коду означених макросів наводиться далі (лістинг 2.2).

Лістинг 2.2 – Макроси для інтерполяційного багаточлену Ньютона

Макрос розраховує та формує матрицю коефіцієнтів лінійної системи рівнянь для подальшого визначення коефіцієнтів інтерполяційного поліному Ньютона.

x - вектор абсцис табличних точок функції що інтерполюється.

```
newtonPolyMatr(x) :=
  N ← rows(x) - 1
  for i ∈ 1..N
    for j ∈ 1..N
      Kcoefi,j ← ∏k=1j (xi - xk-1) if j ≤ i
      Kcoefi,j ← 0 otherwise
  for i ∈ 0..N
    Kcoefi,0 ← 1
  return Kcoef
```

Макрос розраховує та формує вектор коефіцієнтів коефіцієнтів інтерполяційного поліному Ньютона.

xy - матриця координат табличних точок функції що інтерполюється.

```
newtonPolyKcoef(xy) :=
  x ← xy<0>
  y ← xy<1>
  Kcoef ← newtonPolyMatr(x)
  a ← Isolve(Kcoef, y)
  return a
```

Макрос створює складове інтерполяційного поліному Ньютона відповідного степеню аргументу.

a - вектор коефіцієнтів інтерполяційного поліному Ньютона;
 n - величина степеню аргументу;
 x - вектор абсцис табличних точок функції, що інтерполюється.
 χ - аргумент інтерполяційного поліному Ньютона.

```
newtonPolyBase(a, n, x, χ) :=
  P ← an · ∏k=0n-1 (χ - xk) if n ≠ 0
  P ← an otherwise
  return P
```

Макрос створює інтерполяційний поліном Ньютона по координатах табличних точок функції, що інтерполюється

xy - матриця координат табличних точок функції що інтерполюється
 χ - аргумент інтерполяційного поліному Ньютона.

```

newtonPoly(xy,  $\chi$ ) :=
  a ← newtonPolyKoeff(xy)
  N ← rows(a) - 1
  x ← xy<0>
  P ←  $\sum_{k=0}^N$  newtonPolyBase(a, k, x,  $\chi$ )
  return P

```

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється $f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$

Створення інтерполяційного поліному Ньютона $newPoly(\chi) := newtonPoly(f, \chi)$

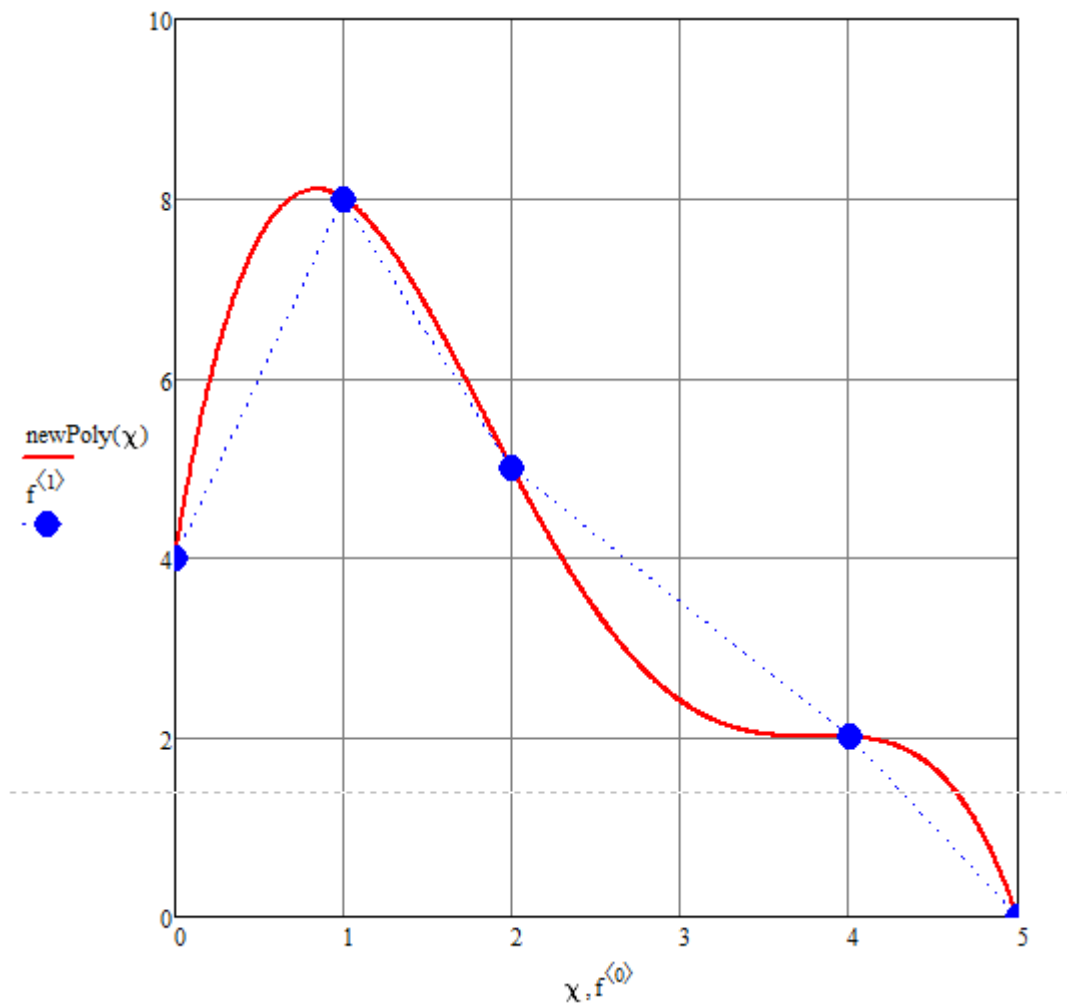


Рисунок 2.2 – Приклад інтерполяційного багаточлену Ньютона

На рис. 2.2 показано – приклад інтерполяційного багаточлену Ньютона

2.3 Метод лінійної інтерполяції

Розглянуті в п. 2.1 та п. 2.2 методами Лагранжа та Ньютона мають суттєвий недолік, оскільки із зростанням кількості точок функції, що інтерполюється, також відповідно зростає степінь інтерполяційного поліному, що призводить до появи значних пульсацій отриманої функціональної залежності. Цей факт безумовно спотворює реальний хід досліджуваного процесу. Крім того це значно утруднює сам процес обчислення на комп'ютері, що може тягнути за собою переповнення розрядної сітки процесору та пам'яті.

Кращі результати досягаються шляхом розбиття досліджуваного діапазону області визначення на окремі ділянки, що містять деяку невелику кількість точок та стикуються по краях. На означених ділянках слід створювати свої інтерполяційні багаточлени низьких степенів.

В найпростішому випадку можна обрати ділянки, утворені всього двома точками. Дві точки визначають пряму лінію, яка описується поліномом першого степеню, або лінійним поліномом. Тому цей метод інтерполяції має назву лінійної інтерполяції.

Суть методу лінійної інтерполяції полягає в тому, що на кожному інтервалі з двох суміжних точок треба розрахувати коефіцієнти відповідного лінійного поліному, яких всього два. Позначимо їх літерами a_i, b_i , $i = 0, \dots, n-2$ де n – кількість точок функції що інтерполюється. Тоді вираз поліному буде мати вигляд:

$$y_i(x) = a_i x + b_i.$$

Вигляд лінійного інтерполяційного поліному на i -ій ділянці показано на рис. 2.3.

Коефіцієнти a_i, b_i треба шукати як розв'язок наступної системи з двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i = y_i; \\ a_i x_{i+1} + b_i = y_{i+1}. \end{cases} \quad (2.1)$$

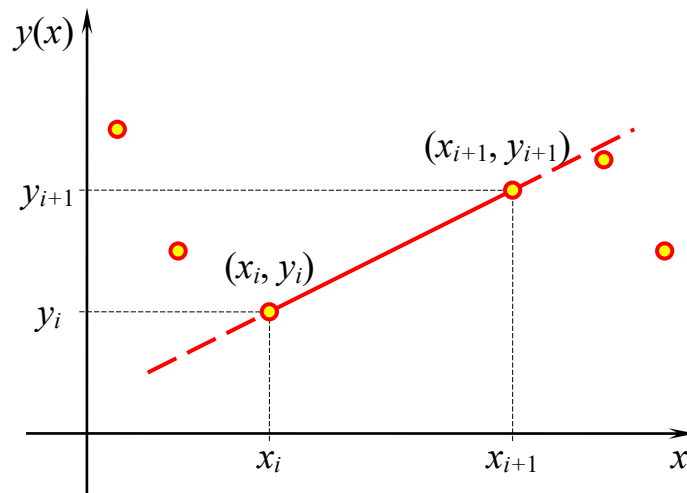


Рисунок 2.3 – Вигляд лінійного інтерполяційного поліному на i -ій ділянці

Систему рівнянь (2.1) зручно представити у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} x_i & 1 \\ x_{i+1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Для розв'язку будь-якої системи лінійних рівнянь можна застосувати правило Крамера. Тому слід розрахувати визначник матриці коефіцієнтів з рівняння (2.2) та визначники, відповідні до змінних a_i, b_i за формулами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = x_i - x_{i+1};$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = y_i - y_{i+1};$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i.$$

За відомими визначниками розраховуються невідомі коефіцієнти:

$$a_i = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}};$$

$$b_i = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{x_i - x_{i+1}}.$$

Спираючись на викладену методику слід розробити низку макросів у програмному середовищі пакету MathCad, яка надасть можливість проводити інтерполяцію функціональної залежності, заданою сукупністю точок, шляхом побудови лінійних поліномів.

Текст програмного коду означених макросів наводиться далі (лістинг 2.3).

Лістинг 2.3 – Макроси для інтерполяції лінійними поліномами

Макрос для створення чисельника в формулі Крамера
 x - матриця коефіцієнтів лінійної системи рівнянь;
 y - вектор вільних членів лінійної системи рівнянь;
 i - порядковий номер змінної лінійної системи рівнянь.

$$\text{helpKramer}(x,y,i) := \left| \begin{array}{l} x^{(i)} \leftarrow y \\ \text{return } x \end{array} \right|$$

Макрос розрахунку коефіцієнтів поліному для сегменту лінійної інтерполяції функції.

Q - матриця-таблиця пар координат точок функції, що інтерполюється.

$$\text{coefLine}(Q) := \left| \begin{array}{l} M \leftarrow \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(Q)}{1}\right) - 2 \\ k \leftarrow 0 \\ m \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..M \\ \quad \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \begin{pmatrix} Q_{i+0,0} & 1 \\ Q_{i+1,0} & 1 \end{pmatrix} \\ b \leftarrow \begin{pmatrix} Q_{i+0,1} \\ Q_{i+1,1} \end{pmatrix} \\ \Delta \leftarrow |a| \\ \Delta_a \leftarrow |\text{helpKramer}(a,b,0)| \\ \Delta_b \leftarrow |\text{helpKramer}(a,b,1)| \\ z_i \leftarrow \text{stack}\left(\frac{\Delta_a}{\Delta}, \frac{\Delta_b}{\Delta}\right) \end{array} \right| \\ \text{return } z \end{array} \right|$$

Макрос створює функцію лінійного поліному для сегменту інтерполяції функції.

coef - вектор коефіцієнтів поліному;
 x - змінна функції поліному.

$$\text{linePolynom}(\text{coef}, x) := \text{coef}_0 \cdot x + \text{coef}_1$$

Макрос створює матрицю точок лінійного поліному для сегменту інтерполяції функції.

Q - матриця-таблиця пар координат точок функції, що інтерполюється;

ind - номер сегменту функції, що інтерполюється;

M - кількість точок у вихідній матриці координат лінійного сегменту функціїщо інтерполюється.

```

linePolly(Q, ind, M) :=
  xb ← (Q<0>)ind
  xe ← (Q<0>)ind+1
  Δx ←  $\frac{x_e - x_b}{M}$ 
  koef ← koefLine(Q)ind
  for i ∈ 0..M
    x ← xb + i · Δx
    zi,0 ← x
    zi,1 ← linePolynom(koef, x)
  return z

```

Макрос створює матрицю точок лінійної інтерполяції функції.

Q - матриця-таблиця пар координат точок функції, що інтерполюється;

M - кількість точок у вихідній матриці координат лінійного сегменту функціїщо інтерполюється.

```

lineInterpol(Q, M) :=
  Q ← Q
  q ← [(Q<0>)0 (Q<1>)0]
  N ← floor( $\frac{\text{rows}(Q)}{1}$ ) - 2
  N ← N
  for i ∈ 0..N
    z ← linePolly(Q, i, M)
    q ← stack(q, submatrix(z, 1, rows(z) - 1, 0, 1))
  z ← z
  z ← z
  return q

```

Визначити кількість точок на ділянку M := 20

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється $f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$

Створення лінійної інтерполяції lineInterp := lineInterpol(f, M)

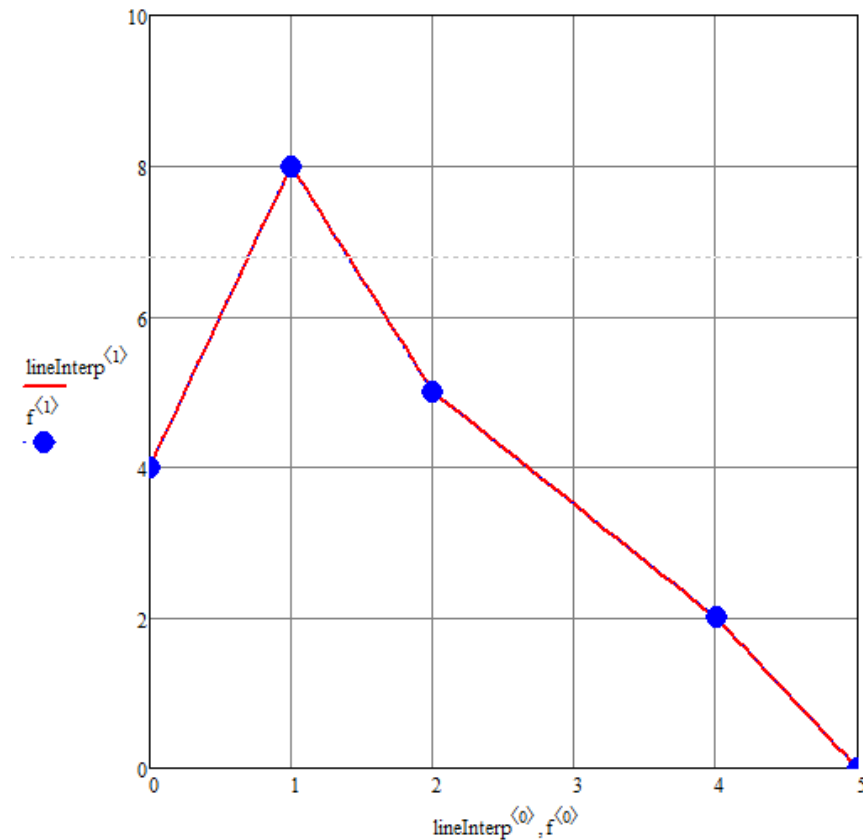


Рисунок 2.4 – Приклад лінійної інтерполяції

2.4 Метод поліноміальної інтерполяції

Загальний принцип поліноміальної інтерполяції полягає в тому, що для кожного вибраного проміжку з інтервалу визначення функції, що інтерполюється, створюється поліном загального вигляду:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Мета інтерполяції є в розрахунку $(n+1)$ коефіцієнту a_i на кожному виділеному проміжку інтервалу визначення функції. Розрахунок спирається на побудову лінійної системи з $(n+1)$ рівнянь та її розв'язку. Таким чином, слід вимагати виокремлення з табличних даних функції, що інтерполюється, послідовних наборів по $(n+1)$ точок.

Розглянутий вище метод лінійної інтерполяції можна вважати видом поліноміальної інтерполяції при якому степінь поліному дорівнює одиниці. Тому зрозуміло чому обиралися набори з двох суміжних точок.

Зрозуміло, що не слід застосовувати інтерполяційні поліноми високих ступені, щоб не наближатися до методів Лагранжа та Ньютона. Тому розглянемо випадки інтерполяції квадратичними та кубічними поліномами.

2.4.1 Метод інтерполяції квадратичними поліномами

Даний метод передбачає побудову на кожному проміжку інтервалу визначення функції, що інтерполюється, створення поліному другого степеню вигляду:

$$P_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i.$$

Квадратичний поліном визначається трьома коефіцієнтами, тому для їхнього знаходження треба скласти систему з трьох лінійних рівнянь. Для трьох рівнянь потрібен набір з трьох суміжних точок функції (рис. 2.5).

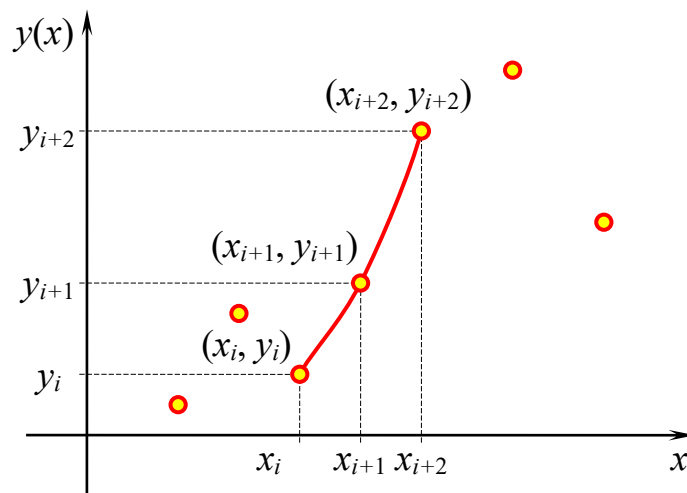


Рисунок 2.5 – Вигляд квадратичного інтерполяційного поліному на i -ій ділянці

Тоді на i -му наборі точок можна вкласти наступну лінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i; \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}; \\ a_i x_{i+2}^2 + b_i x_{i+2} + c_i = y_{i+2}. \end{cases}$$

Матрична форма цієї системи має вигляд:

$$\begin{bmatrix} x_i^2 & x_i & 1 \\ x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 \\ x_{i+2}^2 & x_{i+2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \end{bmatrix}.$$

Відповідно до правила Крамера треба сформулювати та розрахувати наступні чотири визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_i^2 & x_i & 1 \\ x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 \\ x_{i+2}^2 & x_{i+2} & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} y_i & x_i & 1 \\ y_{i+1} & x_{i+1} & 1 \\ y_{i+2} & x_{i+2} & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} x_i^2 & y_i & 1 \\ x_{i+1}^2 & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2}^2 & y_{i+2} & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} x_i^2 & x_i & y_i \\ x_{i+1}^2 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ x_{i+2}^2 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{vmatrix}.$$

Маючи розрахованими означені чотири визначники, знаходяться три коефіцієнти квадратичного поліному за формулами:

$$a_i = \frac{\Delta_a}{\Delta};$$

$$b_i = \frac{\Delta_b}{\Delta};$$

$$c_i = \frac{\Delta_c}{\Delta}.$$

Спираючись на викладену методику слід розробити низку макросів у програмному середовищі пакету MathCad, яка надасть можливість проводити інтерполяцію функціональної залежності, заданою сукупністю точок, шляхом побудови квадратичних поліномів.

Текст програмного коду означених макросів наводиться далі (лістинг 2.4).

Лістинг 2.4 – Макроси для інтерполяції квадратичними поліномами

Макрос для створення чисельника в формулі Крамера
 x - матриця коефіцієнтів лінійної системи рівнянь;
 y - вектор вільних членів лінійної системи рівнянь;
 i - порядковий номер змінної лінійної системи рівнянь.

$$\text{helpKramer}(x, y, i) := \begin{cases} x^{(i)} \leftarrow y \\ \text{return } x \end{cases}$$

Макрос розрахунку коефіцієнтів поліному для сегменту квадратичної інтерполяції функції.

Q - матриця-таблиця пар координат точок функції, що інтерполюється.

$$\text{coefQuadr}(Q) := \begin{cases} M \leftarrow \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(Q)}{2}\right) - 1 \\ k \leftarrow 0 \\ m \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..M \\ \quad \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \begin{bmatrix} (Q_{2 \cdot i + 0, 0})^2 & Q_{2 \cdot i + 0, 0} & 1 \\ (Q_{2 \cdot i + 1, 0})^2 & Q_{2 \cdot i + 1, 0} & 1 \\ (Q_{2 \cdot i + 2, 0})^2 & Q_{2 \cdot i + 2, 0} & 1 \end{bmatrix} \\ b \leftarrow \begin{pmatrix} Q_{2 \cdot i + 0, 1} \\ Q_{2 \cdot i + 1, 1} \\ Q_{2 \cdot i + 2, 1} \end{pmatrix} \\ \Delta \leftarrow |a| \\ \Delta_a \leftarrow |\text{helpKramer}(a, b, 0)| \\ \Delta_b \leftarrow |\text{helpKramer}(a, b, 1)| \\ \Delta_c \leftarrow |\text{helpKramer}(a, b, 2)| \\ z_i \leftarrow \text{stack}\left(\frac{\Delta_a}{\Delta}, \frac{\Delta_b}{\Delta}, \frac{\Delta_c}{\Delta}\right) \end{array} \right. \\ \text{return } z \end{cases}$$

Макрос створює функцію квадратичного поліному для сегменту інтерполяції функції.

koef - вектор коефіцієнтів поліному;
x - змінна функції поліному.

$$\text{quarPolynom}(\text{koef}, x) := \text{koef}_0 \cdot x^2 + \text{koef}_1 \cdot x + \text{koef}_2$$

Макрос створює матрицю точок квадратичного поліному для сегменту інтерполяції функції.

Q - матриця-таблиця пар координат точок функції, що інтерполюється;
ind - номер сегменту функції, що інтерполюється;
M - кількість точок у вихідній матриці координат квадратичного сегменту функціїщо інтерполюється.

$$\text{quadrPolly}(Q, \text{ind}, M) := \left| \begin{array}{l} x_b \leftarrow (Q^{(0)})_{2 \cdot \text{ind}} \\ x_e \leftarrow (Q^{(0)})_{2 \cdot (\text{ind} + 1)} \\ \Delta x \leftarrow \frac{x_e - x_b}{M} \\ \text{koef} \leftarrow \text{koefQuadr}(Q)_{\text{ind}} \\ \text{for } i \in 0..M \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x_b + i \cdot \Delta x \\ z_{i,0} \leftarrow x \\ z_{i,1} \leftarrow \text{quarPolynom}(\text{koef}, x) \end{array} \right. \\ \text{return } z \end{array} \right.$$

Макрос створює матрицю точок квадратичної інтерполяції функції.

Q - матриця-таблиця пар координат точок функції, що інтерполюється;
M - кількість точок у вихідній матриці координат квадратичного сегменту функціїщо інтерполюється.

$$\text{quadrInterpol}(Q, M) := \left| \begin{array}{l} Q \leftarrow Q \\ q \leftarrow [(Q^{(0)})_0 \quad (Q^{(1)})_0] \\ N \leftarrow \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(Q)}{2}\right) - 1 \\ N \leftarrow N \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} z \leftarrow \text{quadrPolly}(Q, i, M) \\ q \leftarrow \text{stack}(q, \text{submatrix}(z, 1, \text{rows}(z) - 1, 0, 1)) \end{array} \right. \\ z \leftarrow z \\ z \leftarrow z \\ \text{return } q \end{array} \right.$$

Визначити кількість точок на ділянці $M := 20$

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється $f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$

Створення лінійної інтерполяції $\text{quadrInterp} := \text{quadrInterpol}(f, M)$

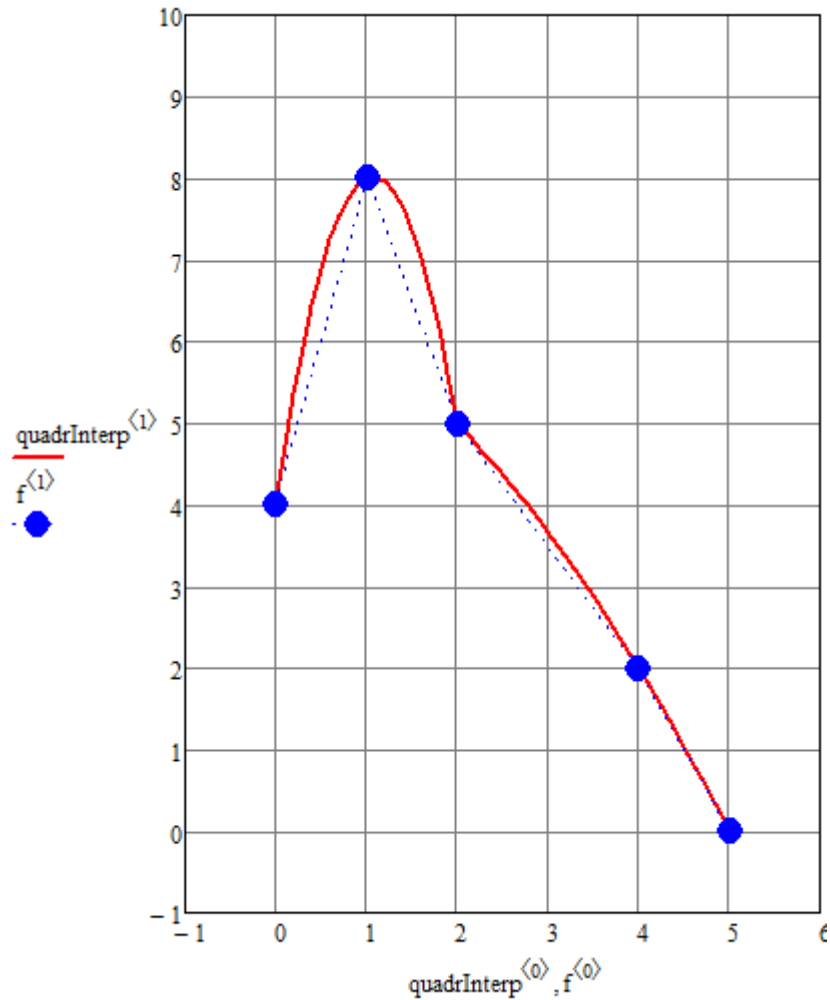


Рисунок 2.6 – Приклад квадратичної інтерполяції

2.4.2 Метод інтерполяції кубічними поліномами

Даний метод передбачає побудову на кожному проміжку інтервалу визначення функції, що інтерполюється, створення поліному третього степеню вигляду:

$$P_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i.$$

Кубічний поліном визначається чотирма коефіцієнтами, тому для їхнього знаходження треба скласти систему з чотирьох лінійних рівнянь. Для чотирьох рівнянь потрібен набір з чотирьох суміжних точок функції (рис. 2.7).

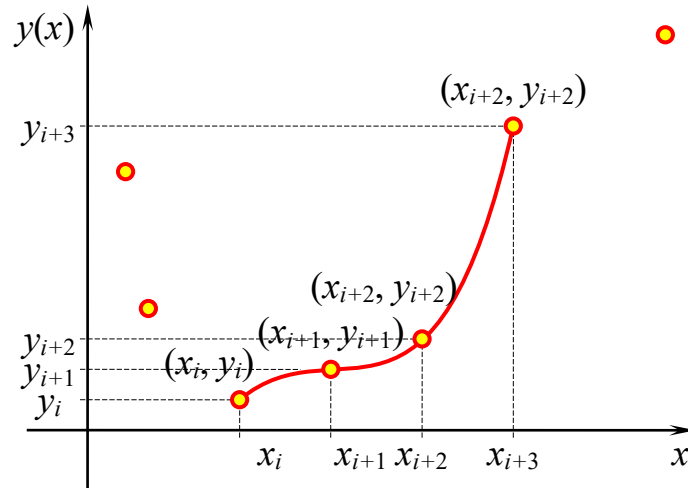


Рисунок 2.7 – Вигляд кубічного інтерполяційного поліному на i -й ділянці

Тоді на i -му наборі точок можна вкласти наступну лінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i = y_i; \\ a_i x_{i+1}^3 + b_i x_{i+1}^2 + c_i x_{i+1} + d_i = y_{i+1}; \\ a_i x_{i+2}^3 + b_i x_{i+2}^2 + c_i x_{i+2} + d_i = y_{i+2}; \\ a_i x_{i+3}^3 + b_i x_{i+3}^2 + c_i x_{i+3} + d_i = y_{i+3}. \end{cases}$$

Матрична форма цієї системи має вигляд:

$$\begin{bmatrix} x_i^3 & x_i^2 & x_i & 1 \\ x_{i+1}^3 & x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 \\ x_{i+2}^3 & x_{i+2}^2 & x_{i+2} & 1 \\ x_{i+3}^3 & x_{i+3}^2 & x_{i+3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ y_{i+3} \end{bmatrix}.$$

Відповідно до правила Крамера треба сформулювати та розрахувати наступні чотири визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_i^3 & x_i^2 & x_i & 1 \\ x_{i+1}^3 & x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 \\ x_{i+2}^3 & x_{i+2}^2 & x_{i+2} & 1 \\ x_{i+3}^3 & x_{i+3}^2 & x_{i+3} & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} y_i & x_i^2 & x_i & 1 \\ y_{i+1} & x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 \\ y_{i+2} & x_{i+2}^2 & x_{i+2} & 1 \\ y_{i+3} & x_{i+3}^2 & x_{i+3} & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} x_i^3 & y_i & x_i & 1 \\ x_{i+1}^3 & y_{i+1} & x_{i+1} & 1 \\ x_{i+2}^3 & y_{i+2} & x_{i+2} & 1 \\ x_{i+3}^3 & y_{i+3} & x_{i+3} & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} x_i^3 & x_i^2 & y_i & 1 \\ x_{i+1}^3 & x_{i+1}^2 & y_{i+1} & 1 \\ x_{i+2}^3 & x_{i+2}^2 & y_{i+2} & 1 \\ x_{i+3}^3 & x_{i+3}^2 & y_{i+3} & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} x_i^3 & x_i^2 & x_i & y_i \\ x_{i+1}^3 & x_{i+1}^2 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ x_{i+2}^3 & x_{i+2}^2 & x_{i+2} & y_{i+2} \\ x_{i+3}^3 & x_{i+3}^2 & x_{i+3} & y_{i+3} \end{vmatrix};$$

Маючи розрахованими означені чотири визначники, знаходяться чотири коефіцієнти кубічного поліному за формулами:

$$a_i = \frac{\Delta_a}{\Delta};$$

$$b_i = \frac{\Delta_b}{\Delta};$$

$$c_i = \frac{\Delta_c}{\Delta};$$

$$d_i = \frac{\Delta_d}{\Delta}.$$

Спираючись на викладену методику слід розробити низку макросів у програмному середовищі пакету MathCad, яка надасть можливість проводити інтерполяцію функціональної залежності, заданою сукупністю точок, шляхом побудови кубічних поліномів.

Текст програмного коду означених макросів наводиться далі (лістинг 2.5).

Лістинг 2.5 – Макроси для інтерполяції кубічними поліномами

Макрос розрахунку коефіцієнтів поліному для сегменту кубічної інтерполяції функції.

Q - матриця-таблиця пар координат точок функції, що інтерполюється:

```

koefCubic(Q) :=
  M ← floor( $\frac{\text{rows}(Q)}{3}$ ) - 1
  k ← 0
  m ← 0
  for i ∈ 0..M
    a ←  $\begin{bmatrix} (Q_{3 \cdot i+0,0})^3 & (Q_{3 \cdot i+0,0})^2 & Q_{3 \cdot i+0,0} & 1 \\ (Q_{3 \cdot i+1,0})^3 & (Q_{3 \cdot i+1,0})^2 & Q_{3 \cdot i+1,0} & 1 \\ (Q_{3 \cdot i+2,0})^3 & (Q_{3 \cdot i+2,0})^2 & Q_{3 \cdot i+2,0} & 1 \\ (Q_{3 \cdot i+3,0})^3 & (Q_{3 \cdot i+3,0})^2 & Q_{3 \cdot i+3,0} & 1 \end{bmatrix}$ 
    b ←  $\begin{pmatrix} Q_{3 \cdot i+0,1} \\ Q_{3 \cdot i+1,1} \\ Q_{3 \cdot i+2,1} \\ Q_{3 \cdot i+3,1} \end{pmatrix}$ 
    Δ ← |a|
    Δa ← |helpKramer(a, b, 0)|
    Δb ← |helpKramer(a, b, 1)|
    Δc ← |helpKramer(a, b, 2)|
    Δd ← |helpKramer(a, b, 3)|
    zi ← stack( $\frac{\Delta_a}{\Delta}, \frac{\Delta_b}{\Delta}, \frac{\Delta_c}{\Delta}, \frac{\Delta_d}{\Delta}$ )
  return z

```

Макрос для створення чисельника в формулі Крамера.

x - матриця коефіцієнтів лінійної системи рівнянь;

y - вектор вільних членів лінійної системи рівнянь;

i - порядковий номер змінної лінійної системи рівнянь.

```
helpKramer(x,y,i) :=  $\left\{ \begin{array}{l} x^{(i)} \leftarrow y \\ \text{return } x \end{array} \right.$ 
```

Макрос створює функцію кубічного поліному для сегменту інтерполяції функції.

koef - вектор коефіцієнтів поліному;

x - змінна функції поліному.

```
cubicPolynom(koef ,x) := koef0·x3 + koef1·x2 + koef2·x + koef3
```

Макрос створює матрицю точок кубічного поліному для сегменту інтерполяції функції.

Q - матриця-таблиця пар координат точок функції, що інтерполюється;

ind - номер сегменту функції, що інтерполюється;

M - кількість точок у вхідній матриці координат кубічного сегменту функції, що інтерполюється.

```
cubicPolly(Q,ind,M) :=  $\left\{ \begin{array}{l} x_b \leftarrow (Q^{(0)})_{3 \cdot \text{ind}} \\ x_e \leftarrow (Q^{(0)})_{3 \cdot (\text{ind}+1)} \\ \Delta x \leftarrow \frac{x_e - x_b}{M} \\ \text{koef} \leftarrow \text{koefCubic}(Q)_{\text{ind}} \\ \text{for } i \in 0..M \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow x_b + i \cdot \Delta x \\ z_{i,0} \leftarrow x \\ z_{i,1} \leftarrow \text{cubicPolynom}(\text{koef}, x) \end{array} \right. \\ \text{return } z \end{array} \right.$ 
```

Макрос створює матрицю точок кубічної інтерполяції функції.

Q - матриця-таблиця пар координат точок функції, що інтерполюється;

M - кількість точок у вихідній матриці координат кубічного сегменту функції що інтерполюється.

```

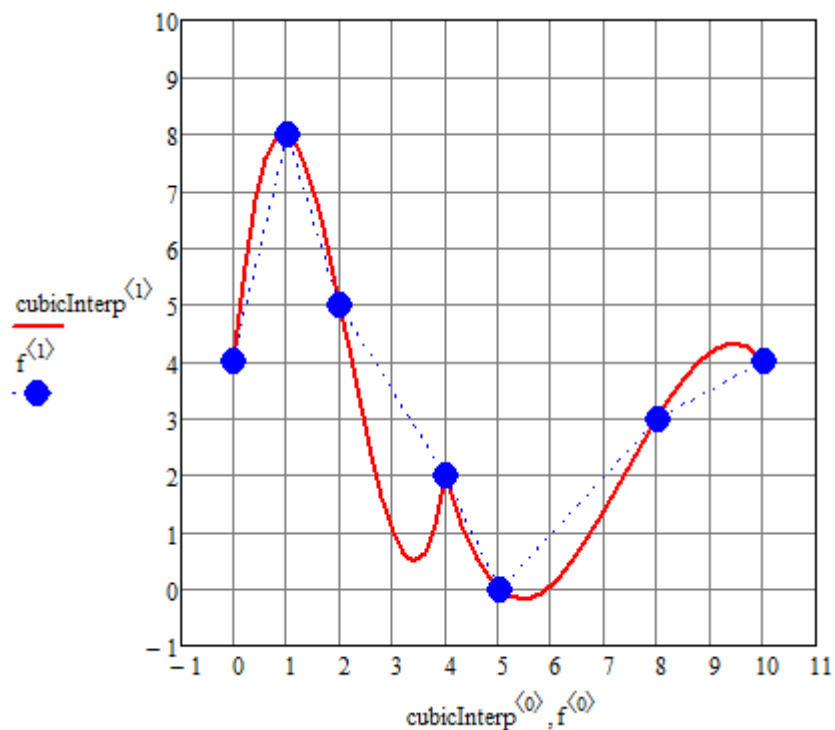
cubicInterpol(Q,M) :=
  Q ← Q
  q ← [(Q<0>)0 (Q<1>)0]
  N ← floor( $\frac{\text{rows}(Q)}{3}$ ) - 1
  N ← N
  for i ∈ 0..N
    z ← cubicPolly(Q,i,M)
    q ← stack(q, submatrix(z, 1, rows(z) - 1, 0, 1))
  z ← z
  z ← z
  return q

```

Визначити кількість точок на ділянку $M := 20$

Матриця координат табличних точок функції, що інтерполюється $f := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 5 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$

Створення лінійної інтерполяції $\text{cubicInterp} := \text{cubicInterpol}(f, M)$



Рисунк 2.8 – Приклад кубічної інтерполяції

2.5 Підсумкові зауваження

Розглянуті методи інтерполяції мають як позитивні так і негативні властивості. Методи інтерполяції багаточленами Лагранжа та Ньютона надають гладку інтерполяційну функцію, яка має похідну у будь-якій точці. Однак зростання кількості точок призводить до пропорційного зростання степеню інтерполяційного поліному та появи екстремумів стрімко зростаючої абсолютної величини.

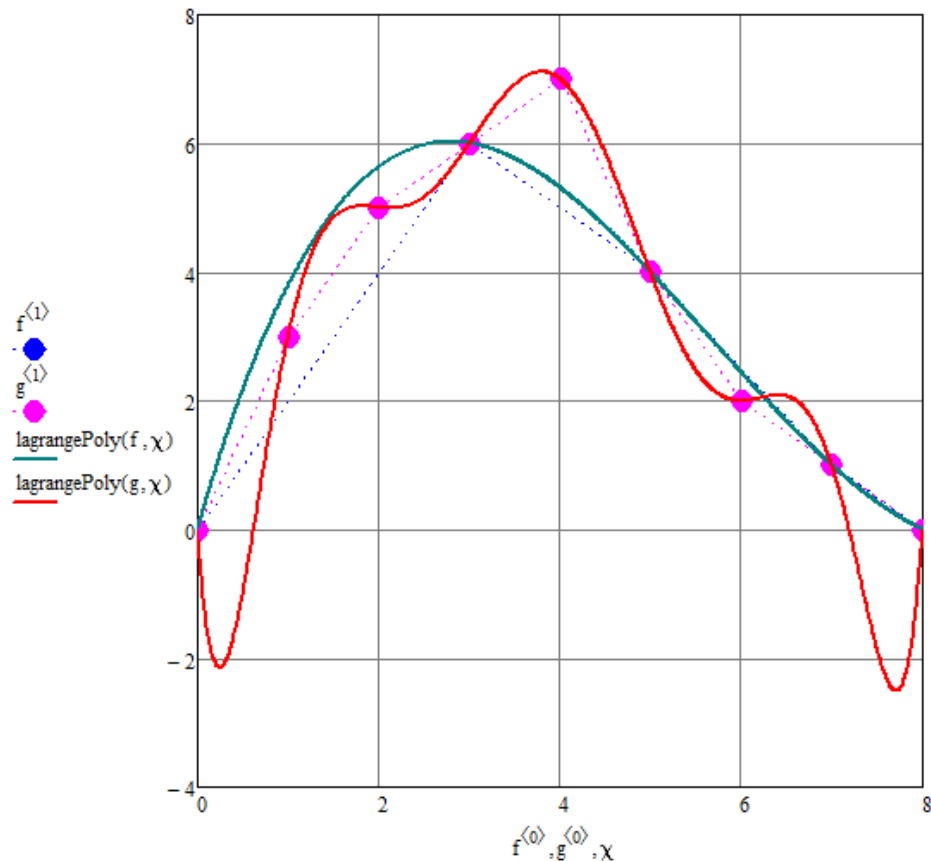


Рисунок 2.9 – Результат зміни інтерполяційного поліному Лагранжа внаслідок додавання проміжних точок функції, що інтерполюється

На рис. 2.9 можна спостерігати появу осциляцій у інтерполюючого поліному в наслідок додавання точок функції між попередньо заданими вузлами.

Також неприємні наслідки може викликати додавання вузлів при розширенні вибірки. В цьому випадку також зростає ступінь проявлення осциляцій інтерполюючого поліному, та зазнає спотворення первинна ділянка інтерполяції.

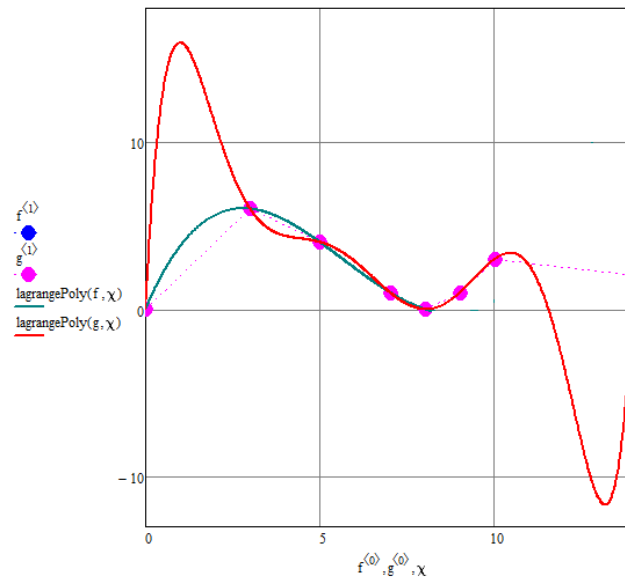


Рисунок 2.10 – Результат зміни інтерполяційного поліному Лагранжа внаслідок додавання точок функції, що інтерполюється, до вже відомого набору

В обох випадках найбільший рівень осциляцій спостерігається на кінцях досліджуваного інтервалу.

Методи Лагранжа та Ньютона призводять до утворення ідентичних поліномів.

Поліноміальна інтерполяція у на основі квадратичного або кубічного поліномів не дає великих осциляцій завдяки малої степені поліномів. У випадку повільного змінення функції може надавати непогані результати (рис. 2.11), але в іншому випадку містить багато зломів(рис. 2.12). В точках зломів отримана інтерполяційна функція не має похідної

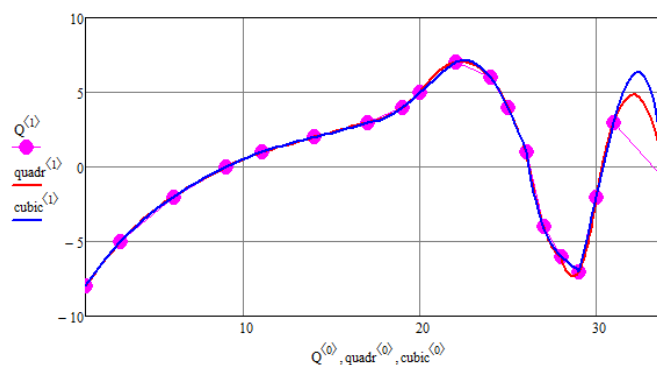


Рисунок 2.11 – Результат квадратичної та кубічної інтерполяції функції, що змінюється повільно

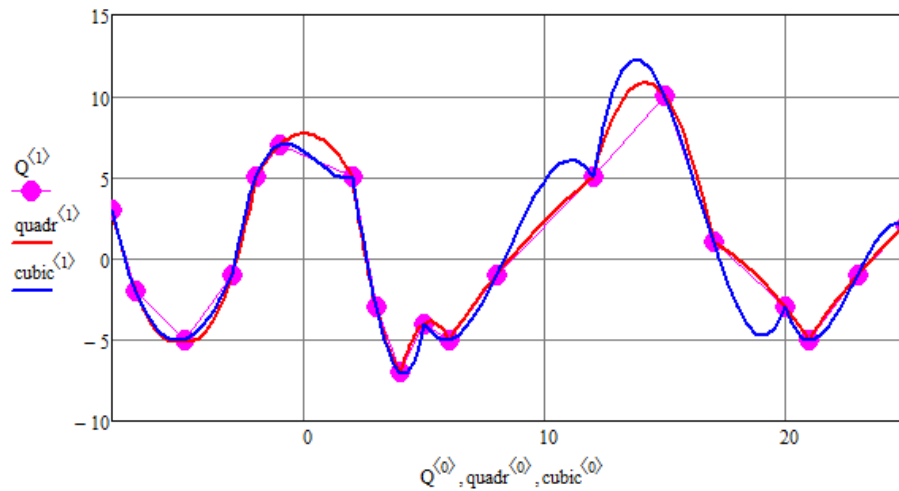


Рисунок 2.12 – Результат квадратичної та кубічної інтерполяції функції, що змінюється стрімко

Недоліком методів поліноміальної інтерполяції можна вважати те, не можна брати будь-яку кількість опорних точок. Ця кількість повинна відповідати співвідношенню:

$$M = n + m(n - 1),$$

де n – степінь інтерполюючого поліному; m – кількість сегментів інтерполяції.

Розглянуті методи інтерполяції характеристик мають дуже обмежені можливості в застосуванні з причин значних відхилень від первинної функції та відсутності похідної у всіх точках (негладкі функції).

Уникнути означених недоліків можна застосувавши методи інтерполяції сплайнами. Інтерполяція сплайнами буде розглянута в наступному розділі.

3 МЕТОД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК ЗА ДОПОМОГОЮ СПЛАЙНІВ

Як було з'ясовано методи інтерполювання характеристик багаточленом Лагранжа або Ньютона при наявності великої кількості вузлів призводить до незадовільних результатів. Покращити результати можна використавши кусково-поліноміальну інтерполяцію. Але за рахунок взаємної незалежності суміжних ділянок інтерполяції мають місце помітні спотворення та відхилення від первинного процесу. Отриманий результат у вигляді сукупності сегментів поєднаних у кусково-поліноміальну функцію є негладким у всіх вузлах.

Подолати означені недоліки можна за допомогою методів інтерполяції сплайнами. Найбільш поширеними є так звані поліноміальні сплайни.

Поліноміальним сплайном називають таку функцію, яка визначена на інтервалі $[x_0; x_n]$, а інтервал розбитий на $(n-1)$ відрізків, на кожному з яких функція має вигляд поліному визначеного степені.

Сплайни з таким визначенням ще називають алгебраїчними сплайнами.

Степінь сплайна – це найбільший степінь, яку може мати поліном на кожному з відрізків.

Дефект сплайна – це різниця між степенем сплайна і його гладкістю. Гладкість – це безперервність похідних сплайна. Порядок гладкості дорівнює номеру останньої безперервної похідної.

Із всього різноманіття сплайнів в більшості випадків надають перевагу кубічним сплайнам. Тому будемо використовувати саме їх.

Метод інтерполяції кубічними сплайнами полягає в тому, що на кожному відріжку інтервалу визначення досліджуваної функції розраховуються коефіцієнти поліному третього ступеню:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i \in [0; n - 1],$$

де a_i, b_i, c_i, d_i – коефіцієнти поліному сплайну, які треба визначати.

Значення коефіцієнтів поліномів розраховується спираючись на дотримання наступних умов:

1) Отримана за допомогою сплайнів функція, повинна проходити через всі задані для інтерполяції точки функції, що досліджується.

$$S_i(x_i) = f(x_i) = y_i; \quad S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = y_{i+1}; \quad i \in [0; n - 1],$$

2) Перша похідна від поліномів сегментів повинна бути безперервною.

$$\left. \frac{d}{dx} S_i(x) \right|_{x=x_{i+1}} = \left. \frac{d}{dx} S_{i+1}(x) \right|_{x=x_{i+1}} ;$$

$$i \in [0; n-2].$$

3) Друга похідна від поліномів сегментів повинна бути безперервною.

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} S_i(x) \right|_{x=x_{i+1}} = \left. \frac{d^2}{dx^2} S_{i+1}(x) \right|_{x=x_{i+1}} ;$$

$$i \in [0; n-2].$$

Дотримання вказаних умов забезпечує побудову функції з гладким графіком без зламів.

Конкретизуємо умови стосовно кубічних поліномів.

За першою умовою маємо співвідношення:

$$a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3 = y_i; \quad (3.1 a)$$

$$a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = y_{i+1}; \quad (3.1 б)$$

$$i \in [0; n-1].$$

За другою умовою треба спочатку отримати вираз для першої похідної.

$$\frac{d}{dx} S_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2;$$

$$i \in [0; n-2].$$

Тоді друга умова набуде вигляду:

$$b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + 3d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2.$$

Цей вираз можна спростити:

$$b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 - b_{i+1} = 0; \quad (3.2)$$

$$i \in [0; n-2].$$

За третьою умовою треба отримати вираз для другої похідної.

$$\frac{d^2}{dx^2} S_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i);$$

$$i \in [0; n - 2].$$

Тоді друга умова набуде вигляду:

$$2c_i + 6d_i(x_{i+1} - x_i) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}).$$

Цей вираз можна спростити:

$$2c_i + 6d_i(x_{i+1} - x_i) - 2c_{i+1} = 0.$$

$$i \in [0; n - 2]. \quad (3.3)$$

Дві останні умови стосуються внутрішніх точок функції. Треба додати ще дві умови для початкової та останньої точок функції. Ці умови називають крайовими умовами. Зазвичай крайові умови вимагають нульової кривизни в крайніх точках:

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} S_0(x) \right|_{x=x_0} = 0;$$

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} S_{n-1}(x) \right|_{x=x_n} = 0.$$

Для кубічних сплайнів ця умова виглядає як:

$$c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0; \quad (3.4 \text{ а})$$

$$2c_{n-1} + 6d_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0. \quad (3.4 \text{ б})$$

Співвідношення (3.1) – (3.4) являють собою план побудови системи лінійних рівнянь, змінними в якій виступають коефіцієнти сегментів сплайнової функції. Отримана в результаті система є повною та лінійно незалежною, що гарантує однозначний розрахунок необхідної кількості коефіцієнтів.

За допомогою пакету MathCad створимо сукупність макросів, яка дозволить реалізовувати інтерполяцію характеристик кубічними сплайнами та проводити візуалізацію отриманих результатів (лістинг 3.1).

Лістинг 3.1 – Макроси для інтерполяції кубічними сплайнами

Макрос розраховує вектор інтервалів між суміжними абсцисами або ординатами точок майбутньої кривої.

v - вектор координат.

$$\Delta V(v) := \begin{cases} N \leftarrow \text{rows}(v) - 2 \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \Delta v_i \leftarrow v_{i+1} - v_i \\ \text{return } \Delta v \end{cases}$$

Макрос формує першу верхню частину матриці коефіцієнтів для системи лінійних рівнянь для розрахунку коефіцієнтів кубічних сплайнів..

Δx - вектор інтервалів між суміжними абсцисами точок майбутньої кривої.

$$\text{OneMatrPart}(\Delta x) := \begin{cases} N \leftarrow \text{rows}(\Delta x) - 1 \\ \text{size} \leftarrow (N + 1) \cdot 4 - 1 \\ \text{for } i \in 0.. \text{size} \\ \quad \text{emptyRow}_i \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \begin{cases} P^{(2,i)} \leftarrow \text{emptyRow} \\ P^{(2,i+1)} \leftarrow \text{emptyRow} \\ (P^{(2,i)})_{4,i} \leftarrow 1 \\ (P^{(2,i+1)})_{4,i} \leftarrow 1 \\ (P^{(2,i+1)})_{4,i+1} \leftarrow \Delta x_i \\ (P^{(2,i+1)})_{4,i+2} \leftarrow (\Delta x_i)^2 \\ (P^{(2,i+1)})_{4,i+3} \leftarrow (\Delta x_i)^3 \end{cases} \\ \text{return } P \end{cases}$$

Макрос формує другу наступну частину матриці коефіцієнтів для системи лінійних рівнянь для розрахунку коефіцієнтів кубічних сплайнів..

v - вектор інтервалів між суміжними абсцисами точок майбутньої кривої.

```
TwoMatrPart( $\Delta x$ ) :=
  N  $\leftarrow$  rows( $\Delta x$ ) - 2
  size  $\leftarrow$  (N + 2)·4 - 1
  for i  $\in$  0..size
    emptyRowi  $\leftarrow$  0
  for i  $\in$  0..N
    P(i)  $\leftarrow$  emptyRow
    (P(i))4·i+1  $\leftarrow$  1
    (P(i))4·i+2  $\leftarrow$  2· $\Delta x_i$ 
    (P(i))4·i+3  $\leftarrow$  3·( $\Delta x_i$ )2
    (P(i))4·i+5  $\leftarrow$  -1
  return P
```

Макрос формує третю наступну частину матриці коефіцієнтів для системи лінійних рівнянь для розрахунку коефіцієнтів кубічних сплайнів..

v - вектор інтервалів між суміжними абсцисами точок майбутньої кривої.

```
ThrMatrPart( $\Delta x$ ) :=
  N  $\leftarrow$  rows( $\Delta x$ ) - 2
  size  $\leftarrow$  (N + 2)·4 - 1
  for i  $\in$  0..size
    emptyRowi  $\leftarrow$  0
  for i  $\in$  0..N
    P(i)  $\leftarrow$  emptyRow
    (P(i))4·i+2  $\leftarrow$  2
    (P(i))4·i+3  $\leftarrow$  6· $\Delta x_i$ 
    (P(i))4·i+6  $\leftarrow$  -2
  return P
```

Макрос формує четверту наступну частину матриці коефіцієнтів для системи лінійних рівнянь для розрахунку коефіцієнтів кубічних сплайнів..

v - вектор інтервалів між суміжними абсцисами точок майбутньої кривої.

```

ForMatrPart( $\Delta x$ ) :=
  N ← rows( $\Delta x$ ) - 2
  size ← (N + 2)·4 - 1
  for i ∈ 0.. size
    emptyRowi ← 0
  P<0> ← emptyRow
  (P<0>)2 ← 1
  P<1> ← emptyRow
  (P<1>)size-1 ← 1
  (P<1>)size ← 3· $\Delta x$ rows( $\Delta x$ )-1
  return P

```

Макрос формує вектор вільних членів для системи лінійних рівнянь для розрахунку коефіцієнтів кубічних сплайнів..

Q - матриця координат точок майбутньої кривої.

```

formVectorFree(Q) :=
  N ← rows(Q) - 1
  size ← N·2 - 1
  for i ∈ 0.. size
    emptyRowi ← 0
  y ← Q<1>
  for i ∈ 0.. N - 2
    x2,i ← yi+1
    x2,i+1 ← yi+1
  x ← stack(y0, x, yN)
  return stack(x, emptyRow)

```

Макрос створює функцію поліному сегмента кубічного сплайну.

a - вектор коефіцієнтів кубічного поліному;

g - вектор нижньої та верхньої граничних абсцис інтервалу сегмента сплайну;

x - змінна функції поліному.

$$\text{qubicSegment}(a, g, x) := \left[a_0 + a_1 \cdot (x - g_0) + a_2 \cdot (x - g_0)^2 + a_3 \cdot (x - g_0)^3 \right] : (g_0 \leq x \leq g_1)$$

Макрос створює функцію поліному сегмента кубічного сплайну.

Q - матриця координат точок майбутньої кривої;
 splineKoeff - вектор коефіцієнтів поліномів сегментів сплайнів;
 M - кількості точок на один сегмент сплайнів.

```
formMatpSplinePoints(Q, splineKoeff, M) :=
  N ← rows(Q) - 2
  z ← (0 0)
  x ← Q(0)
  for i ∈ 0..N + 0
    Δx ←  $\frac{x_{i+1} - x_i}{M}$ 
    for j ∈ 0..M - 0
      pj,0 ← xi + j · Δx
      splKoeff ← submatrix[splineKoeff, 4·i, 4·(i + 1) - 1, 0, 0]
      pj,1 ← cubicSegment[splKoeff, (xi xi+1)T, pj,0]
    z ← stack(z, p)
  z ← submatrix(z, 1, rows(z) - 1, 0, cols(z) - 1)
  return z
```

Макрос створює функцію інтерполяції табличних даних кубічними сплайнами.

Q - матриця координат точок майбутньої кривої;
 M - кількості точок на один сегмент сплайнів.

```
splineFun(Q, M) :=
  Δx ← ΔV(Q(0))
  splineMatr ← stack(OneMatrPart(Δx)T, TwoMatrPart(Δx)T)
  splineMatr ← stack(splineMatr, ThrMatrPart(Δx)T)
  splineMatr ← stack(splineMatr, ForMatrPart(Δx)T)
  VectorFree ← formVectorFree(Q)
  splineKoeff ← Isolve(splineMatr, VectorFree)
  z ← formMatpSplinePoints(Q, splineKoeff, M)
  return z
```

На рис. 3.1 та рис. 3.2 наведені графічні результати інтерполяції функцій кубічними сплайнами.

Визначити кількість точок на ділянку M := 20

Створити матрицю точок функції, що інтерполюється

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 9 & 11 & 14 & 17 & 19 & 20 & 22 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 34 \\ -8 & -5 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 4 & 1 & -4 & -6 & -7 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T$$

Створення інтерполяції кубічними сплайнами splineInterp := splineFun(f, M)

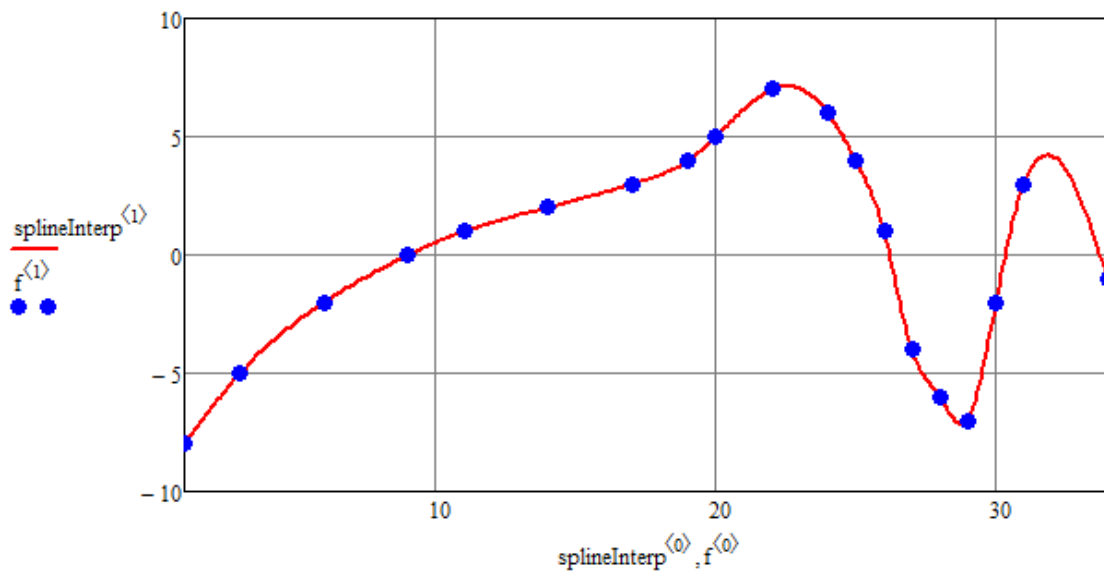


Рисунок 3.1 – Тестові результати інтерполяції функцій кубічними сплайнами

Визначити кількість точок на ділянку $M := 20$

Створити матрицю точок функції, що інтерполюється

$$f := \begin{pmatrix} -8 & -7 & -5 & -3 & -2 & -1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 12 & 15 & 17 & 20 & 21 & 23 & 25 \\ 3 & -2 & -5 & -1 & 5 & 7 & 5 & -3 & -7 & -4 & -5 & -1 & 5 & 10 & 1 & -3 & -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T$$

Створення інтерполяції кубічними сплайнами $\text{splineInterp} := \text{splineFun}(f, M)$

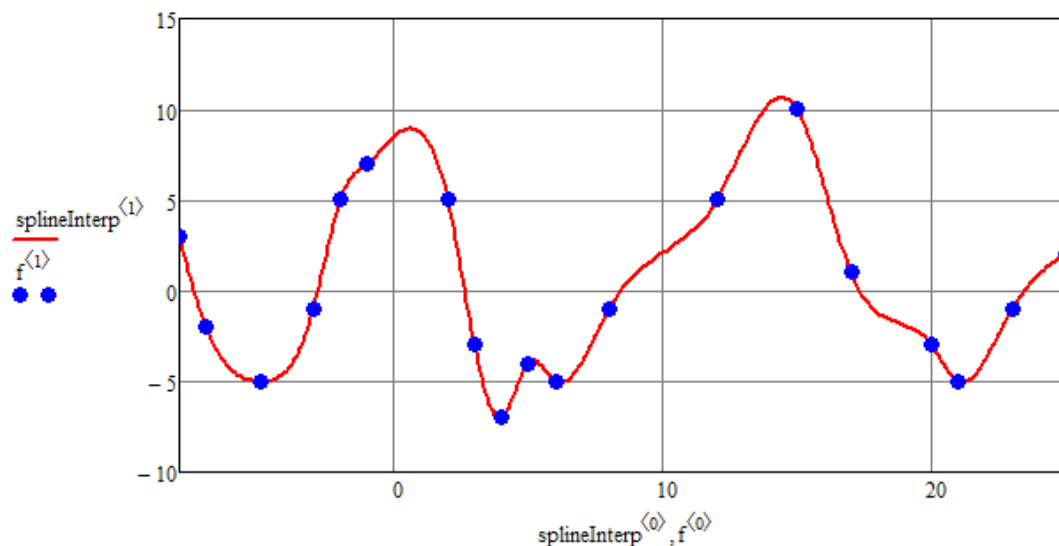


Рисунок 3.2 – Тестові результати інтерполяції функцій кубічними сплайнами

Тестові випробування свідчать про те, що інтерполяція поліноміальними сплайнами не накладає обмежень на кількість вузлів інтерполяції, надає гладку функцію та не має значних відхилень від досліджуваної функції.

4 ВИПРОБУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК

Маємо для випробування три групи методів інтерполяції ВАХ радіоелектронних елементів:

- інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона;
- поліноміальна інтерполяція;
- інтерполяція кубічними сплайнами.

За допомогою всіх означених методів проведемо інтерполяцію характеристик таких напівпровідникових елементів як: діод, біполярний транзистор та польовий транзистор.

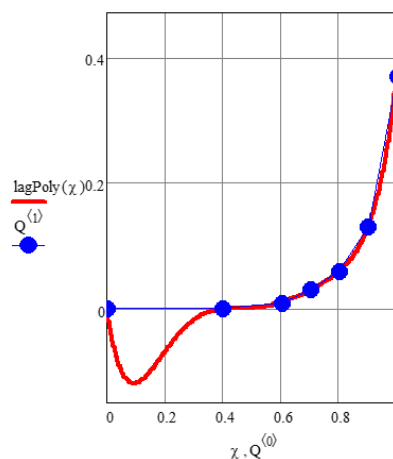
Як відомо напівпровідниковий діод має всього одну ВАХ – це залежність струму, що протікає через нього, до прикладеної до нього напруги.

З довідникових джерел оберемо дані вимірювання ВАХ діода, які зведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Дані вимірювання ВАХ діода

№	1	2	3	4	5	6	7
U, В	0,0	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
I, А	0,0	0,0	0,01	0,03	0,06	0,13	0,37

Інтерполяція поліном Лагранжа



Інтерполяція поліномом Ньютона

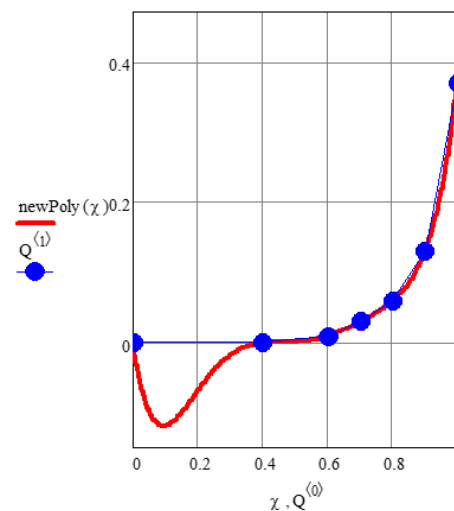
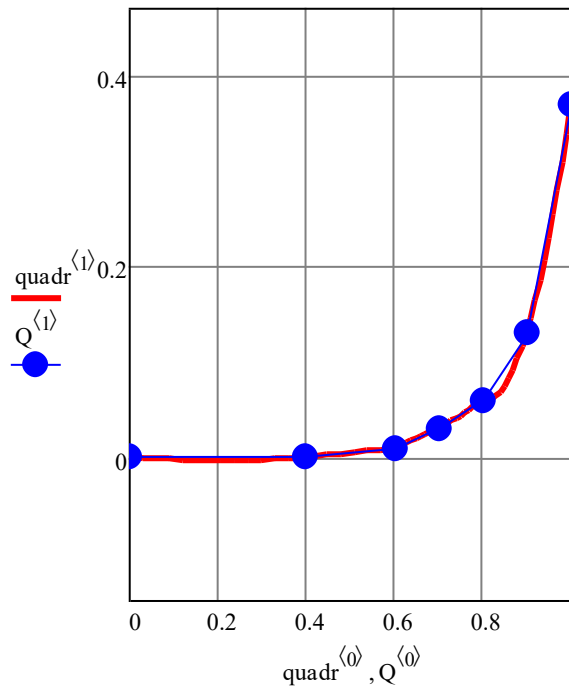


Рисунок 4.1 – Результати інтерполяції ВАХ діода поліномами Лагранжа та Ньютона

Інтерполяція квадратичними поліномами



Інтерполяція кубічними поліномами

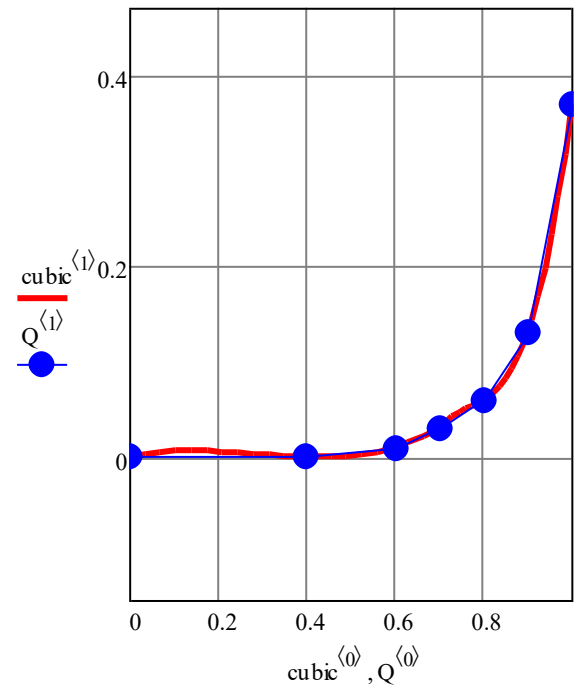


Рисунок 4.2 – Результати інтерполяції ВАХ діода квадратичними та кубічними поліномами

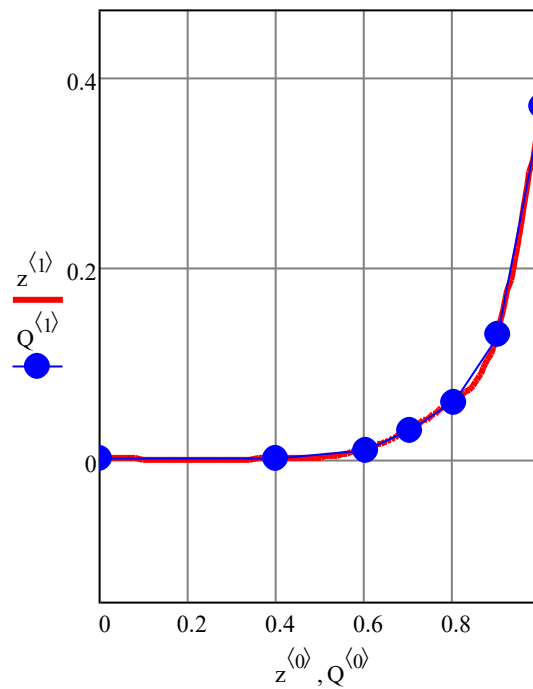


Рисунок 4.3 – Результати інтерполяції ВАХ діода кубічними сплайнами

Результати проведення інтерполяції ВАХ тунельного діода відображені графіками, що наведені на рис. 4.1 – рис. 4.3.

Як відомо тунельний діод також має всього одну ВАХ – це залежність струму, що протікає через нього, до прикладеної до нього напруги.

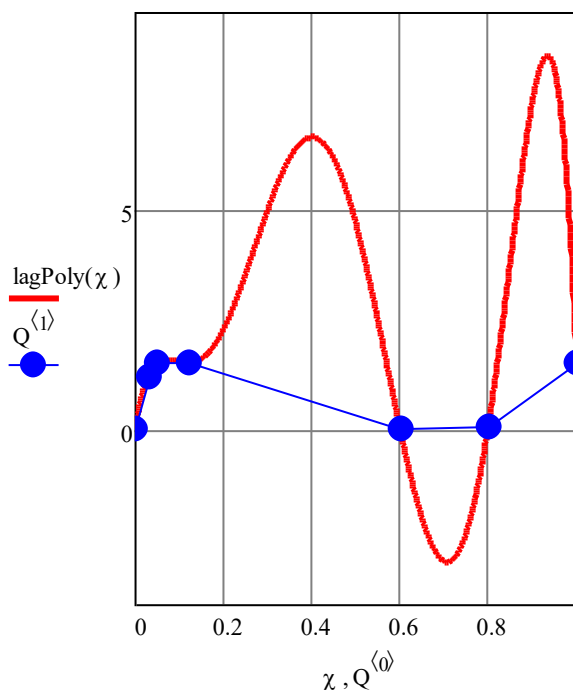
З довідникових джерел оберемо дані вимірювання ВАХ тунельний діода, які зведені в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Дані вимірювання ВАХ тунельного діода

№	1	2	3	4	5	6	7
U, В	0,0	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
I, А	0,0	0,0	0,01	0,03	0,06	0,13	0,37

Результати проведення інтерполяції ВАХ тунельного діода відображені графіками, що наведені на рис. 4.4 – рис. 4.6.

Інтерполяція поліном Лагранжа



Інтерполяція поліномом Ньютона

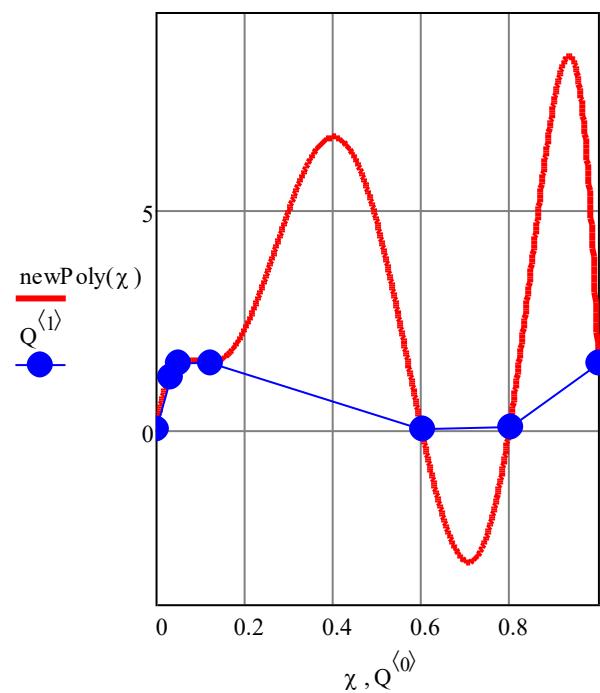
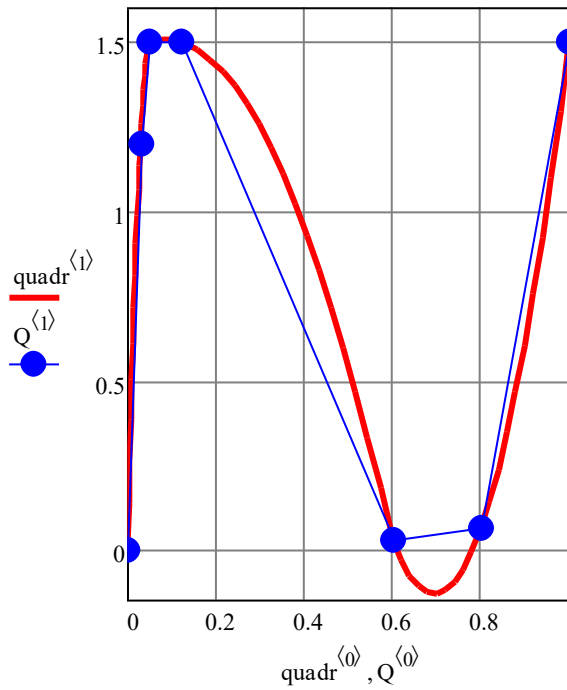


Рисунок 4.4– Результати інтерполяції ВАХ тунельного діода поліномами Лагранжа та Ньютона

Інтерполяція квадратичними
поліномами



Інтерполяція кубічними поліномами

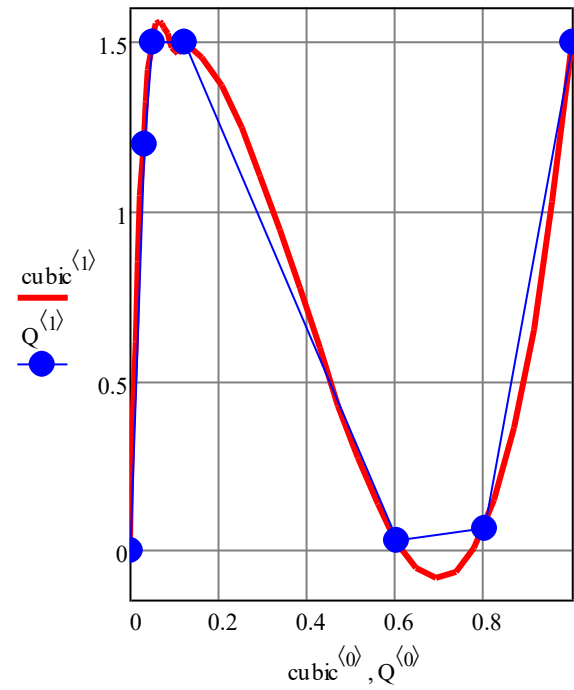


Рисунок 4.5 – Результати інтерполяції ВАХ тунельного діода квадратичними та кубічними поліномами

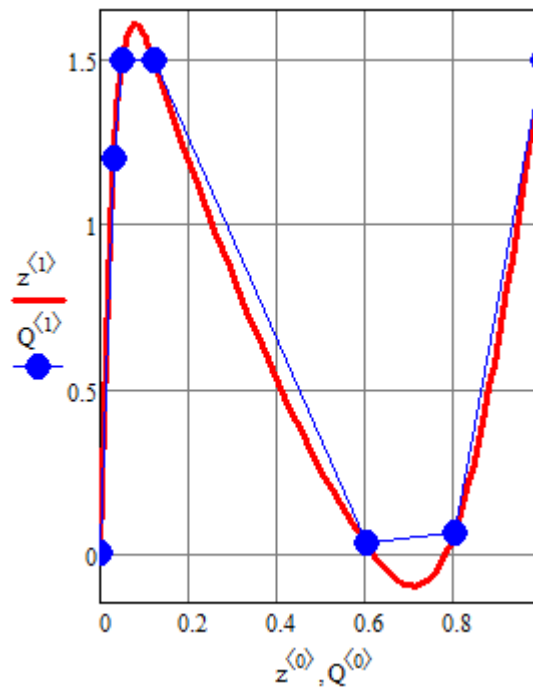


Рисунок 4.6 – Результати інтерполяції ВАХ тунельного діода кубічними сплайнами

Як відомо біполярний транзистор має більш ніж одну ВАХ, тому розглянемо тільки вихідну ВАХ: залежність струму колектора від напруги колектор-емітер при фіксованому значенні напруги база-емітер.

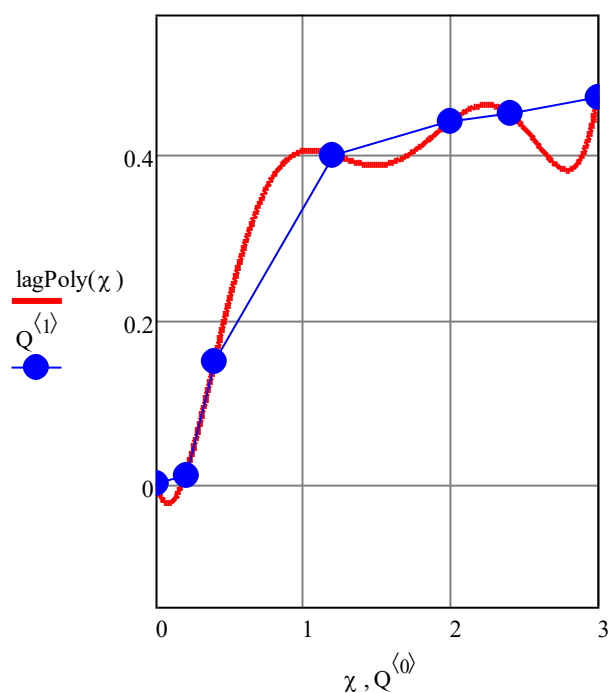
З довідникових джерел оберемо дані вимірювання вихідної ВАХ біполярного транзистора, які зведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Дані вимірювання вихідної ВАХ біполярного транзистора

№	1	2	3	4	5	6	7
U, B	0,0	0,2	0,4	1,2	2,0	2,4	3,0
I, A	0,0	0,01	0,15	0,4	0,44	0,45	0,47

Результати проведення інтерполяції ВАХ біполярного транзистора відображені графіками, що наведені на рис. 4.7 – рис. 4.9.

Інтерполяція поліномом Лагранжа



Інтерполяція поліномом Ньютона

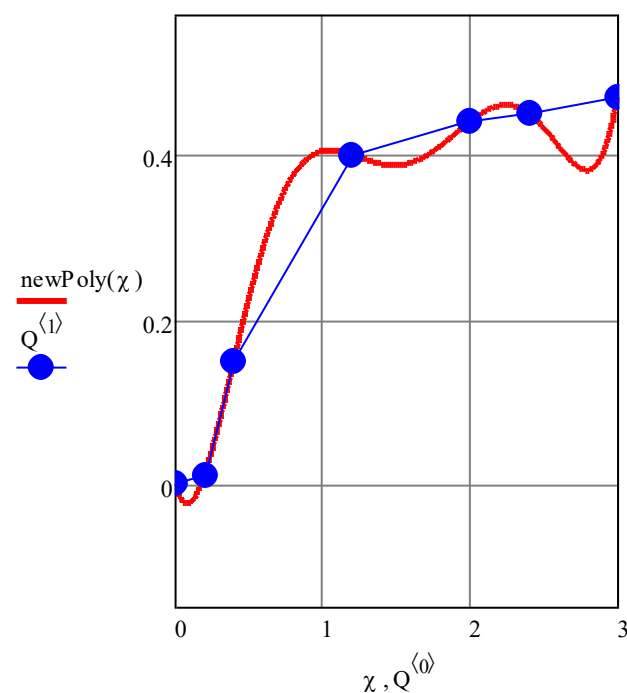
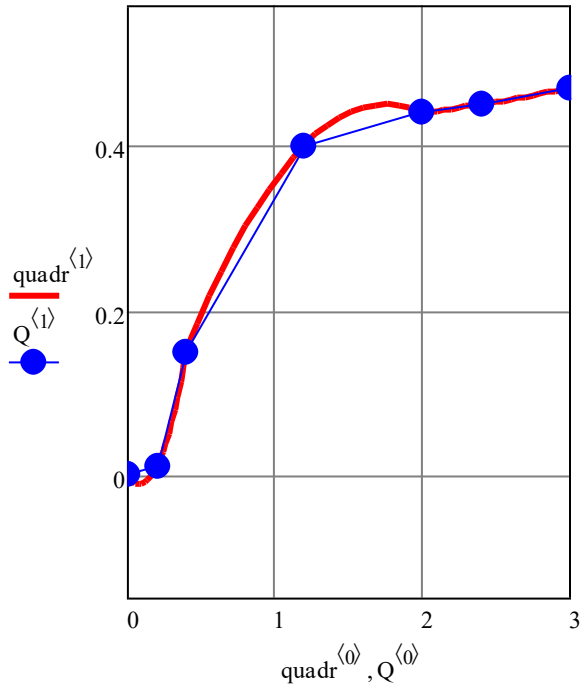


Рисунок 4.7 – Результати інтерполяції вихідної ВАХ біполярного транзистора поліномами Лагранжа та Ньютона

Інтерполяція квадратичними
поліномами



Інтерполяція кубічними поліномами

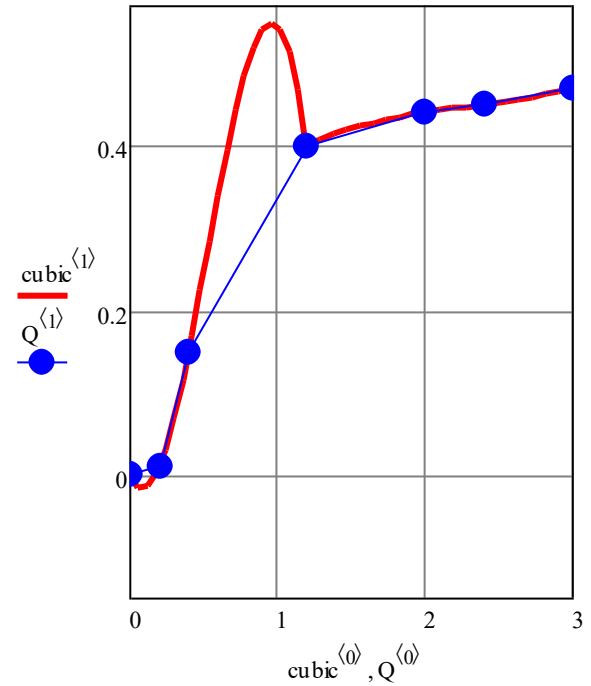


Рисунок 4.8 – Результати інтерполяції вихідної ВАХ біполярного транзистора квадратичними та кубічними поліномами

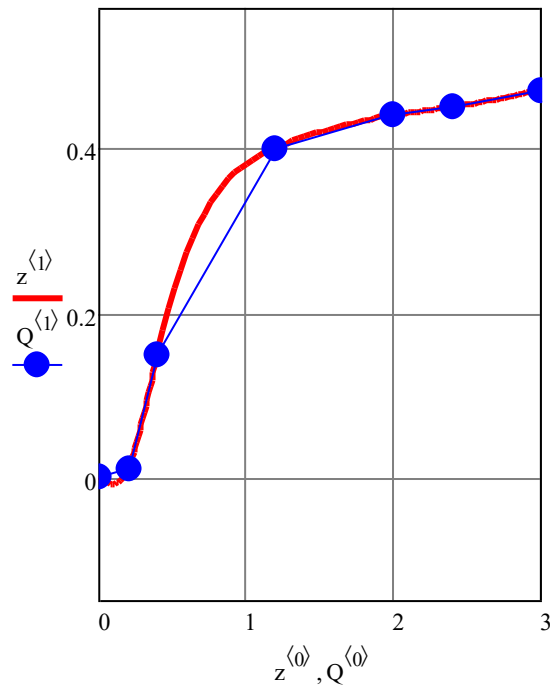


Рисунок 4.9 – Результати інтерполяції вихідної ВАХ біполярного транзистора кубічними сплайнами

Як відомо польовий транзистор, наприклад МДН з індукованим каналом, також має більш ніж одну ВАХ, тому розглянемо тільки вихідну ВАХ: залежність струму стоку від напруги стік-витік при фіксованому значенні напруги стік-затвор.

З довідникових джерел оберемо дані вимірювання вихідної ВАХ польовий МДН транзистору з індукованим каналом, які зведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.4 – Дані вимірювання вихідної ВАХ польового МДН транзистору з індукованим каналом

№	1	2	3	4	5	6	7
U, B	0	20	30	40	60	110	180
I, A	0,00	0,55	0,88	1,09	1,20	1,20	1,20

Результати проведення інтерполяції ВАХ польового МДН транзистору з індукованим каналом відображені графіками, що наведені на рис. 4.10 – рис. 4.12.

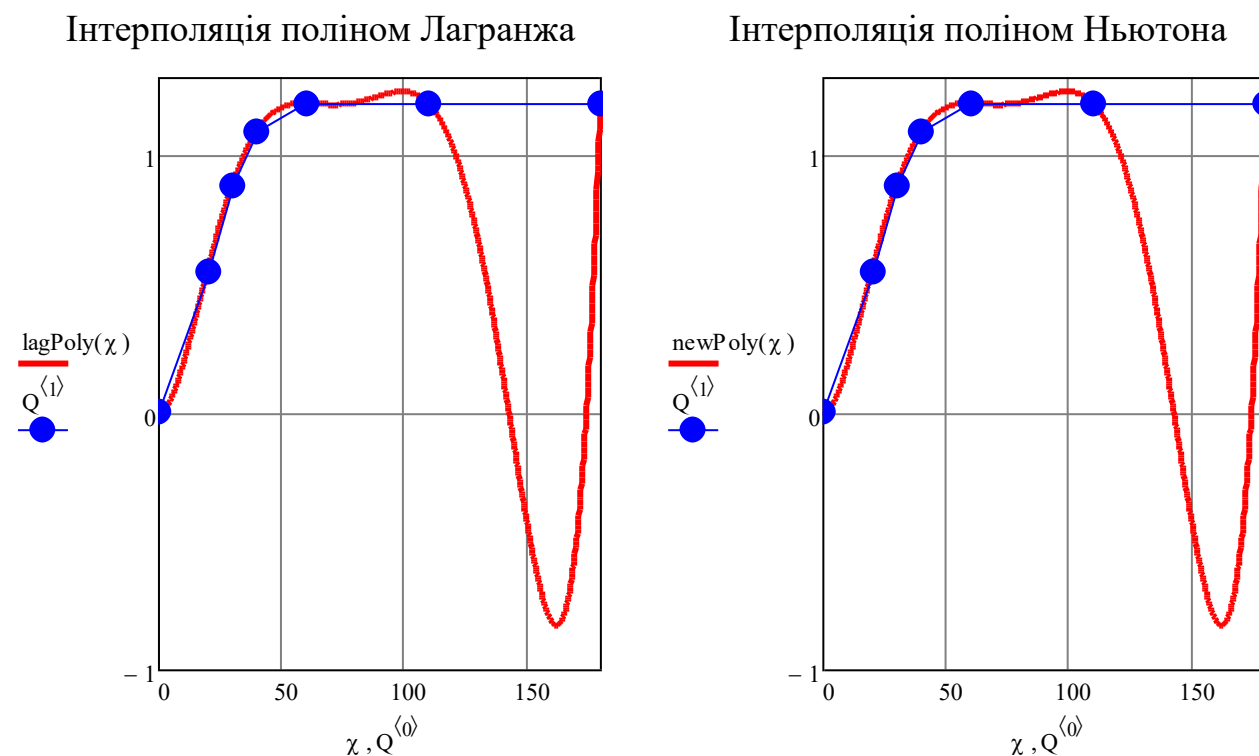
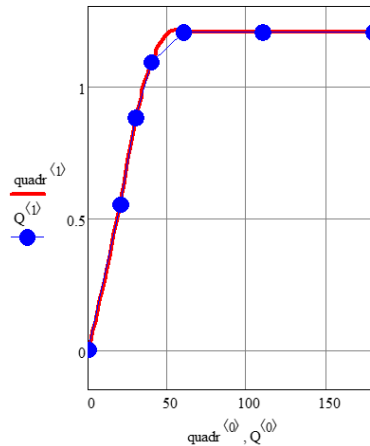


Рисунок 4.10 – Результати інтерполяції вихідної ВАХ польового МДН транзистору з індукованим каналом поліномами Лагранжа та Ньютона

Інтерполяція квадратичними поліномами



Інтерполяція кубічними поліномами

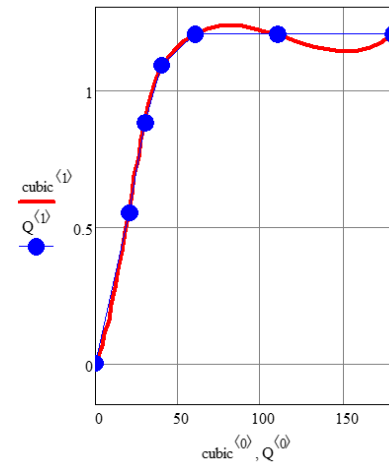


Рисунок 4.11 – Результати інтерполяції вихідної ВАХ польового МДН транзистору з індукованим каналом квадратичними та кубічними поліномами

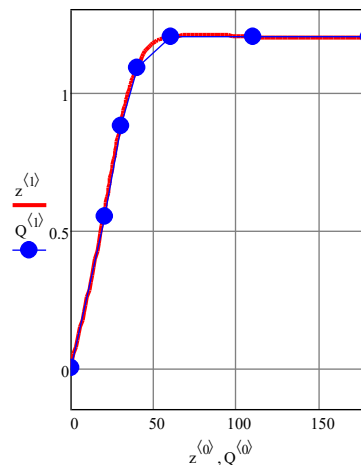


Рисунок 4.12 – Результати інтерполяції вихідної ВАХ польового МДН транзистору з індукованим каналом кубічними сплайнами

Найкращий результат надає метод інтерполяції кубічними сплайнами. Методи поліномів Лагранжа та Ньютона показують незадовільні результати. При поліноміальній інтерполяції важко віддати перевагу якомусь з двох розглянутих методів.

Також можна стверджувати, що збільшення кількості точок в наборі досліджуваної характеристики для всіх методів окрім поліномів Лагранжа та Ньютона збільшить наближення інтерполяційних характеристик до реальних.

ВИСНОВКИ

Сучасні телекомунікаційні мережі є складними технічними системами. З цієї причини проектування обладнання телекомунікацій потребує широкого застосування комп'ютерної техніки та спеціалізованих програмних пакетів. Також комп'ютерні системи автоматичного проектування надають можливість моделювання роботи спроектованого обладнання з метою виявлення помилок, тестування, вдосконалення та оптимізації.

Таким чином зрозуміло, що до складу спеціалізованих програмних пакетів повинні входити модулі математичних моделей електронних елементів, з яких будується апаратура. Це повинні бути математичні моделі наприклад таких елементів як: діоди та транзистори тощо.

Програмно-математичні моделі діодів та транзисторів треба будувати на підґрунті притаманних їм вольт-амперних характеристик. Відомо, що діод має всього одну ВАХ як залежність струму, що через нього протікає, від прикладеної напруги, а транзистори мають дві ВАХ, які мають назву вхідної та вихідної і також пов'язують струм з напругою.

Оскільки ВАХ реальних елементів формуються шляхом вимірювань та подаються даними в таблицях, актуальним є застосування методів інтерполяції з метою одержання аналітичних записів для ВАХ.

Результати досліджень призводять до наступних висновків:

- 1) застосування методів інтерполяції ВАХ радіоелектронних елементів для побудови моделей комплексів автоматичного проектування є актуальним;
- 2) проведено дослідження наступних методів інтерполяції: інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона, кускова інтерполяція квадратичними та кубічними поліномами, кубічні сплайни;
- 3) інтерполяція поліномами Лагранжа та Ньютона може мати дуже обмежене використання та може надавати значні відхилення від реальних залежностей;
- 4) інтерполяція квадратичними та кубічними поліномами краще підходить до залежностей, що мають повільний характер зміни та невеликі відстані між вузлами інтерполяції;
- 5) інтерполяція квадратичними та кубічними поліномами формує негладкі залежності на відміну від інтерполяції сплайнами;
- 6) інтерполяція кубічними сплайнами найменше відхиляється від реальної характеристики, є гладкою, тому переважає інші досліджені методи.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ

1. Л. Н. Беркман, Л. О. Комарова, Н. С. Чумак. Системи електрозв'язку та сигнали навчальний посібник. [Текст]. – Київ: ДУТ ННІТІ, – 2015.
2. Панфілов І. П., Дирда В. Ю., Капацін А. В. Теорія електричного зв'язку. [Текст]. – Київ: Техніка, 1998. – 322 с.
3. Волочій Б.Ю. Передавання сигналів у інформаційних системах. Ч.1.: Навч. Посібник. [Текст]. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. -196 с.
4. Бабак В. П., Хандецький В. С., Шрюфер Е. Обробка сигналів [Текст]. – К.:Либідь, 1999. – 496 с.
5. Стеклов В. К., Беркман Л. Н. Проектування телекомунікаційних мереж. [Текст]. – Київ: Техніка, 2002. – 792 с.
5. Основи електроніки : навч. посіб. / Васюра А.С., Дорощенко Г.Д., Кожем'яко В.П., Лисенко Г.Л. [Текст]. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 197 с.
6. Левитський С.М. Напівпровідникові прилади. Навчальний посібник для студентів радіофізичного факультету. [Текст]. – Київ: Видавничий центр “Київський університет” 2014. – 247 с.
7. Гуржій А.М. Електротехніка та основи електроніки: підручник для здобувачів професійної (професійно-технічної) освіти / А. М. Гуржій, С. К. Мещанінов, А. Т. Нельга, В. М. Співак. [Текст]. – Київ : Літера ЛТД, 2020. – 288 с.
8. Фізика напівпровідників. Частина 1. Основи фізики напівпровідників : навч. посіб. для студентів ЗВО / О. В. Глухов, О. О. Кравчук, Є. В. Левченко, О. В. Грицунов, В. В. Ануфрієв; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. [Текст]. – Харків : ХНУРЕ, 2023. – 110 с.
9. Ніколайчук Г.П. Н 63 Фізичні основи напівпровідникових приладів / Г.П. Ніколайчук . [Текст]. – Харків : НТУ «ХП», 2023. – 112 с.
10. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Математика для економістів: Теорія ймовірностей та математична статистика. [Текст]. – Київ: Нац. акад. управління, 1997. – 225 с.
11. Крилик, Л. В. К82 Обчислювальна математика. Інтерполяція та апроксимація табличних даних : навчальний посібник / Л. В. Крилик, І. В. Богач, М. О. Прокопова. [Текст]. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 111 с.

12. Шелевицький І.В., Шутко М.О., Шутко В.М., Колганова О.О. Сплайни в цифровій обробці даних і сигналів [Текст]. – Кривий Ріг: Видавничий дім 2007р. – 232., іл.

13. Довгий Б.П. Д Слайн-функції та їх застосування / Б.П.Довгий, А.В.Ловейкін, Є.С.Вакал, Ю.Є.Вакал. [Текст]. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2016. – 117 с.

14. Математичні методи моделювання: навчальний посібник / О. П. Чорний, В. К. Титюк, Н. М. Істоміна та ін. ; заг. ред. О. П. Чорний. [Текст]. – Кременчук : ПП Щербатих О. В., 2016. – 232 с. :

15. Методичні вказівки до дипломного проектування бакалаврів для студентів усіх форм навчання напряму 6.05903 «Телекомунікації» по кафедрі «Мережі зв'язку» [Текст] / Упоряд. В.В.Ємельянов, Ю.М. Бідний, І.А. Філіппенко. – Харків: ХНУРЕ, 2009. – 36 с.