УДК 517.9:532.5

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РАСЧЕТУ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ СТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ЛАМТЮГОВА С.Н.

(Системы и процессы управления)

Рассматривается и обосновывается применение методов *R*-функций, последовательных приближений и Бубнова-Галёркина к расчету стационарного обтекания тел вращения и цилиндрических тел вязкой несжимаемой жидкостью.

Ключевые слова: вязкая жидкость, функция тока, метод *R*-функций, метод последовательных приближений, метод Бубнова-Галёркина.

Key words: viscous fluid, stream function, the *R*-functions method, the method of successive approximations, the Bubnov-Galerkin method.

Введение

Актуальность исследования. В последнее время математическое моделирование и численный анализ все активнее используются при изучении динамики вязкой жидкости. Необходимость моделировать вязкие течения возникает, например, в гидроаэродинамике, теплоэнергетике, химической кинетике, биомедицине и т.д. Описывающие их уравнения Навье-Стокса [1 – 3] имеют существенные особенности – нелинейность и наличие малого параметра при старшей производной. Поэтому часто на предварительном этапе анализа ограничиваются линейным приближением. Полное пренебрежение нелинейными членами в системе уравнений Навье-Стокса приводит к системе уравнений Стокса [4, 5]. Однако для задачи двумерного поперечного обтекания цилиндра потоком неограниченной жидкости не существует решения уравнений Стокса (парадокс Стокса) [5, 6]. В этом случае используют линейную систему уравнений Озеена [5].

Если рассматриваемая задача обладает свойствами симметрии и может быть сведена к двумерной, то вместо компонент скоростей жидкости удобно ввести функцию тока [4, 6, 7]. Методы решения внешних задач для уравнения относительно функции тока разработаны недостаточно, что объясняется высоким порядком этого уравнения, его нелинейностью и неограниченностью области, в которой уравнение рассматривается. На наш взгляд привлекательным является использование для решения этого класса задач проекционных методов, поскольку они дают приближенное решение в аналитическом виде, что облегчает дальнейшее использование функции тока для нахождения различных характеристик течения. При этом точно учесть геометрическую информацию, входящую в постановку задачи, позволит использование конструктивного аппарата теории *R*-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [8].

Метод *R*-функций в задачах гидродинамики использовался в работах [9 – 13], но задачи внешнего обтекания тел вязкой жидкостью с использованием метода *R*-функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования и численного анализа стационарных задач обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью методом *R*-функций является актуальной научной проблемой.

Эта работа опирается на применение метода *R*-функций к расчету стационарных задач обтекания тел идеальной жидкостью [14].

Цели и задачи исследования. Целью данной работы является разработка и обоснование нового метода численного анализа стационарных задач обтекания тел вращения и цилиндрических тел вязкой несжимаемой жидкостью. Этот метод основан на совместном применении метода последовательных приближений, структурного метода *R*-функций и проекционного метода Бубнова-Галёркина.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- построить на основании методов теории *R*-функций полную структуру решения краевых задач для функции тока;
- применить метод Бубнова-Галёркина для аппроксимации неопределенных компонент в структуре линейных задач;
- применить метод последовательных приближений и метод Бубнова-Галёркина для аппроксимации неопределенных компонент в структуре нелинейных задач;
- исследовать вопросы сходимости предложенных методов.

1. Описание области течения

Основная сложность при построении численного метода анализа в задачах обтекания связана с бесконечностью области, в которой рассматривается течение. Для построения вычислительного алгоритма, который бы позволил вести расчеты в конечной области, нам понадобится функция [14]

$$f_M(x)=\begin{cases}1-\exp\dfrac{Mx}{x-M}, & 0\le x<M;\\ 1, & x\ge M\ \ (M=\mathrm{const}>0).\end{cases}$$

Легко проверить, что она удовлетворяет следующим условиям:

а) $f_M(0)=0$; б) $f'_M(0)=1$;

в) $f'_M(x)\ge 0\ \forall x\ge 0$; г) $f_M(x)\equiv 1\ \forall x\ge M$.

Кроме того, $f_M(x)\in C^{\infty}[0,+\infty)$.

Пусть Ω – область течения, а $\partial\Omega$ – граница обтекаемого тела. Если с помощью конструктивного аппарата теории *R*-функций построена достаточно гладкая функция ω такая, что $\omega=0$ – нормализованное уравнение $\partial\Omega$, то функция $\omega_M=f_M(\omega)$ такова, что:

1) $\omega_M>0$ в Ω; 2) $\omega_M\big|_{\partial\Omega}=0$;

3) $\left.\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=-1$, где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$;

4) $\omega_M\equiv 1$, если $\omega_M\ge M$.

Обобщенные решения рассмотренных далее задач будем искать в классе F функций v, которые имеют обобщенные производные до второго порядка включительно и квадратично суммируемы вместе с производными по Ω_1, где Ω_1 – любая конечная часть Ω; на границе $\partial\Omega$ они удовлетворяют однородным краевым условиям соответствующих задач [15].

2. Метод численного анализа задачи расчета обтекания цилиндрического тела

Рассмотрим стационарное обтекание цилиндрического тела потоком вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат (r, φ, z) [3, 4]. В этом случае вектор скорости можно искать в виде

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\ v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r},\ v_z = 0,$$

где $\psi = \psi(r,\varphi)$ – функция тока.

В линейном приближении (линеаризация Озеена) течение описывается следующей задачей для ψ:

$$\nu\Delta^2\psi + U_\infty A\left(\Delta\psi\right) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\psi\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \psi\cdot r^{-1} = U_\infty \sin\varphi, \tag{3}$$

где ν – коэффициент вязкости, Δ – оператор Лапласа, $A\zeta = -\cos\varphi\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

В задаче (1) – (3) сделаем замену

$$\psi = \omega_M^2\psi_0 + u,$$

где $\psi_0 = U_\infty(r - R^2r^{-1})\sin\varphi$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R, u – новая неизвестная функция.

Выбор такой замены обусловлен тем, что функция $\omega_M^2\psi_0$ удовлетворяет краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3).

Тогда функция u является решением задачи

$$\nu\,\Delta^2 u + U_\infty\, A(\Delta u) = f \text{ в } \Omega, \tag{4}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{r\to+\infty} r^{-1}u = 0, \tag{6}$$

где $f = -\nu\,\Delta^2(\omega_M^2\,\psi_0) - U_\infty\, A(\Delta(\omega_M^2\,\psi_0))$. Заметим, что $f \equiv 0$ в области $\{\omega(r,\varphi) \ge M\}$.

Обобщенным решением задачи (4) – (6) назовем функцию $u \in F$, удовлетворяющую для любой $v \in F$ интегральному тождеству

$$\int_\Omega (\nu\,\Delta u\cdot\Delta v - U_\infty\,\Delta u\cdot Av + \nu\,\Delta(\omega_M^2\psi_0)\cdot\Delta v -$$
$$-U_\infty\,\Delta(\omega_M^2\psi_0)\cdot Av)d\Omega = 0.$$

Обобщенное решение u найдем как предел при $n\to\infty$ решений u_n уравнения (4), рассматриваемого в $\Omega_n = \{(x,y)\in\Omega \big| 0 < \omega(x,y) < M_n\} \subset \Omega$. Здесь $\{M_n\}$ – любая возрастающая неограниченная сверху последовательность. Таким образом, последовательность областей $\{\Omega_n\}$ является монотонным исчерпыванием бесконечной области Ω.

В областях Ω_n рассмотрим краевые задачи

$$\nu\,\Delta^2 u_n + U_\infty\, A(\Delta u_n) = f \text{ в } \Omega_n, \tag{7}$$

$$u_n\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u_n}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

причем u_n, следуя О.А. Ладыженской [16], продолжены нулем вне Ω_n.

Для решения задач (7) – (8) применим метод Бубнова-Галёркина [17]. Оператор этих краевых задач представим в виде $B = \nu A_0 + U_\infty K$, где $A_0 = \Delta^2$, $K = A(\Delta)$. Оператор A_0 будем рассматривать на множестве $D_0 \subset L_2(\Omega_n)$ функций $u \in C^4(\Omega_n)\bigcap C^1(\bar{\Omega}_n)$, удовлетворяющих краевым условиям (8). На D_0 введем скалярное произведение $[u,v] = \int_\Omega \Delta u\Delta v\, d\Omega$. Пополнив D_0 в метрике, порожденной этим скалярным произведением, получим энергетическое пространство H_0 с нормой $\|u\|_0^2 = \int_{\Omega_n} (\Delta u)^2\, d\Omega$. Как следует из результатов работы [17] оператор A_0 является симметричным, положительно-определенным.

Выберем координатную систему $\{\varphi_k\}$, подчинив ее следующим условиям:

1) $\{\varphi_k\} \in H_0$;

2) $\forall N$ элементы $\varphi_1,...,\varphi_N$ – линейно независимы;

3) координатная система $\{\varphi_k\}$ полна в H_0.

Приближенное решение задач (7) – (8) согласно методу Бубнова-Галёркина будем искать в виде

$$u_{n,N} = \sum_{j=1}^{N} c_{n,j}\varphi_j, \tag{9}$$

где $c_{n,j}$, $j = 1,...,N$, – решение СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{N} c_{n,j}\{\nu[\varphi_j,\varphi_i] + U_\infty(K\varphi_j,\varphi_i)\} = (f,\varphi_i), \tag{10}$$

$$(f,\varphi_i) = -\nu\int_{\Omega_n} \Delta(\omega_M^2\psi_0)\cdot\Delta\varphi_i d\Omega +$$
$$+U_\infty\cdot\int_{\Omega_n} \Delta(\omega_M^2\psi_0)\cdot A\varphi_i d\Omega,\quad i = \overline{1,N}.$$

В работе [17] было доказано, что оператор A_0 имеет дискретный спектр, а оператор A_0^{-1} вполне непрерывен в пространстве $L_2(\Omega_n)$. Тогда из результатов статьи С.Г. Михлина [18] следует, что оператор

$A_0^{-1}K$ вполне непрерывен в H_0. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 1. Галеркинские приближения $u_{n,N}$ вида (9) при $N \to \infty$ сходятся к обобщенному решению задач (7) – (8), которое определяется интегральным тождеством

$$\int_{\Omega_n} \Big(\nu\, \Delta u_n \cdot \Delta v - U_\infty\, \Delta u_n \cdot Av + \nu\, \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \cdot \Delta v -$$

$$- U_\infty\, \Delta(\omega_M^2 \psi_0) \cdot Av \Big) d\Omega = 0\,. \qquad (11)$$

Оценим решение задач (7) – (8) в норме $\|\cdot\|_0$.

Умножив (7) в $L_2(\Omega_n)$ на u_n, получим

$$\nu \|u_n\|_0^2 = -U_\infty\, (A(\Delta u_n), u_n)_{L_2(\Omega_n)} + (f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}\,.$$

Применяя первую формулу Грина, формулу Остроградского-Гаусса и учитывая краевые условия, получим, что $(A(\Delta u_n), u_n)_{L_2(\Omega_n)} = 0$. Тогда

$$\nu \|u_n\|_0^2 = (f, u_n)_{L_2(\Omega_n)}\,.$$

Применив неравенство Коши-Буняковского, неравенство [16]

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega_n)} \le c_1 \|\Delta u\|_{L_2(\Omega_n)} = c_1 \|u\|_0 \qquad (12)$$

и неравенство Юнга, получим оценку

$$\|u_n\|_0 \le \frac{c_1}{\nu} \|f\|_{L_2(\Omega_n)}\,.$$

Для построения координатной последовательности воспользуемся полной системой частных решений уравнения $\Delta^2 u = 0$ [19] и структурным методом *R*-функций [8].

Теорема 2 [20, 21]. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \cdot r^{-1} \to 0$ при $r \to +\infty$) краевым условиям (5) и условию на бесконечности (6) точно удовлетворяет функция вида

$$u = \omega_M^2 \Phi_1 + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2\,. \qquad (13)$$

Аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 структуры (13) будем искать в виде $\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k$, $\Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j$, где

$$\{\varphi_k(r,\varphi)\} = \{r^{-k} \cos k\varphi, r^{-k} \sin k\varphi; k = 1, 2, ...;$$

$$r^{2-k} \cos k\varphi, r^{2-k} \sin k\varphi,\ k = 3, 4, ...\}\,,$$

$$\{\tau_j(r,\varphi)\} = \{\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, r^j \cos j\varphi, r^j \sin j\varphi,$$

$$r^{j+2} \cos j\varphi, r^{j+2} \sin j\varphi, j = 1, 2, ...\}\,.$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\{\varphi_i(r,\varphi)\} = \{\omega_M^2(r,\varphi)\varphi_k(r,\varphi),$$

$$\omega_M^2(r,\varphi)(1 - \omega_M(r,\varphi))\tau_j(r,\varphi)\}\,. \qquad (14)$$

Значения коэффициентов α_k $(k = 1, 2, ..., m_1)$ и β_j $(j = 1, 2, ..., m_2)$ в соответствии с методом Бубнова-Галёркина найдем из условия ортогональности невязки первым N $(N = m_1 + m_2)$ элементам последовательности (14). Это приводит к СЛАУ вида (10).

Последовательность $\{u_n\}$ является слабо компактной в H_0, значит, из неё можно выделить сходящуюся к некоторой $u^* \in H_0$ подпоследовательность. Переходя по этой подпоследовательности к пределу в интегральном тождестве (11), получим, что u^* является обобщенным решением задачи (4) – (6). Кроме того, из результатов работы [16] следует единственность решения линейной задачи (4) – (6), а значит, вся последовательность $\{u_n\}$ сходится к u^*.

Теорема 3. Функции u_n при $M_n \to \infty$ сходятся к единственному обобщенному решению задачи (4) – (6).

Рассмотрим теперь общую (нелинейную) задачу для ψ [7]:

$$\nu \Delta^2 \psi = J(\Delta\psi, \psi) \text{ в } \Omega\,, \qquad (15)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0\,, \qquad (16)$$

$$\lim_{r \to +\infty} \psi \cdot r^{-1} = U_\infty \sin\varphi\,, \qquad (17)$$

где $J(\Delta\psi, \psi)$ – якобиан функций $\Delta\psi$ и ψ.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методами последовательных приближений, *R*-функций и Бубнова-Галёркина.

В задаче (15) – (17) сделаем замену $\psi = u_0 + u$, где u – новая неизвестная функция, а u_0 – решение задачи:

$$\nu \Delta^2 u_0 + U_\infty A(\Delta u_0) = 0 \text{ в } \Omega\,, \qquad (18)$$

$$u_0\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0\,, \qquad (19)$$

$$\lim_{r \to +\infty} r^{-1} u_0 = U_\infty \sin\varphi\,. \qquad (20)$$

Задача (18) – (20) может быть решена с помощью метода, описанного выше.

Тогда для функции u получим краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\nu \Delta^2 u = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u) + U_\infty A(\Delta u_0) \text{ в } \Omega\,, \qquad (21)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0\,, \qquad (22)$$

$$\lim_{r \to +\infty} r^{-1} u = 0\,. \qquad (23)$$

Обобщенным решением задачи (21) – (23) назовём функцию $u \in F$, удовлетворяющую для любой $v \in F$ интегральному тождеству

$$\nu \int_\Omega \Delta u \Delta v\, d\Omega = \int_\Omega J(u_0 + u, v) \Delta(u_0 + u)\, d\Omega +$$

$$+ U_\infty \int_\Omega A u_0 \Delta v\, d\Omega\,. \qquad (24)$$

Обобщенное решение u задачи (21) – (23) найдем как предел при $n \to \infty$ решений u_n уравнения (21), рассматриваемого в последовательности областей $\{\Omega_n\}$, которая является монотонным исчерпыванием бесконечной области Ω.

Для решения задачи (21) – (23) в области Ω_n построим итерационный процесс последовательных приближений по нелинейности. Пусть начальное приближение $u_n^{(0)}$ задано. Если k-е приближение $u_n^{(k)}$ построено, то новое $(k+1)$-е приближение $u_n^{(k+1)}$ находим как решение линейной задачи

$$\nu\Delta^2 u_n^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) + \\ + U_\infty\, A(\Delta u_0) \text{ в } \Omega_n, \tag{25}$$

$$u_n^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_n^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{26}$$

продолженное нулем вне Ω_n.

Умножив уравнение (25) скалярно в $L_2(\Omega_n)$ на $u_n^{(k+1)}$, используя свойство якобиана [22]: для любых $u, v \in W_2^2(\Omega)$, $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega J(u,v)\, w dxdy = \int_\Omega J(v,w)\, u dxdy, \tag{27}$$

вторую формулу Грина для последнего слагаемого, получим:

$$\nu\left\|u_n^{(k+1)}\right\|_0^2 = \left(J(u_0 + u_n^{(k)}, u_n^{(k+1)}), \Delta(u_0 + u_n^{(k)})\right)_{L_2(\Omega_n)} + \\ + U_\infty (Au_0, \Delta u_n^{(k+1)})_{L_2(\Omega_n)}, \tag{28}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (28) используем неравенство [22]

$$\left|(J(u,v), \Delta u)_{L_2(\Omega_n)}\right| \le \\ \le c\|v\|_{W_2^2(\Omega_n)} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_n)} \|\Delta u\|_{L_2(\Omega_n)}, \quad u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_n),$$

неравенство (12) и неравенство Юнга, второе слагаемое справа оценим, используя неравенство Коши-Буняковского и неравенство Юнга. В результате получим оценку

$$\left\|u_n^{(k+1)}\right\|_0^2 \le \frac{8c^2c_1^4}{\nu^2}\left(\|u_0\|_0^4 + \left\|u_n^{(k)}\right\|_0^4\right) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2}\|u_0\|_0^2.$$

Пусть $\|u_0\|_0 \le L_0$, $\left\|u_n^{(k)}\right\|_0 \le L$, тогда

$$\left\|u_n^{(k+1)}\right\|_0^2 \le \frac{8c^2c_1^4}{\nu^2}(L_0^4 + L^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2} L_0^2.$$

Значит, условие ограниченности $\left\|u_n^{(k+1)}\right\|_0 \le L$ будет выполнено, если $\frac{8c^2c_1^4}{\nu^2}(L_0^4 + L^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2} L_0^2 \le L^2$, откуда

$$\frac{1}{\nu} \le \frac{L}{2c_1\sqrt{2c^2c_1^2(L_0^4 + L^4) + U_\infty^2 L_0^2}}. \tag{29}$$

Таким образом, при соответствующем выборе начального приближения $u_n^{(0)}$ и при выполнении условия (29) решение $u_n^{(k+1)}$ на каждом шаге итерационного процесса (25) – (26) ограничено в норме $\|\cdot\|_0$.

Для доказательства сходимости последовательности $u_n^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, рассмотрим разности $\delta u_n^{(k+1)} = u_n^{(k+1)} - u_n^{(k)}$. Они удовлетворяют уравнению

$$\nu\Delta^2 \delta u_n^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u_n^{(k)}), u_0 + u_n^{(k)}) - \\ - J(\Delta(u_0 + u_n^{(k-1)}), u_0 + u_n^{(k-1)}) \text{ в } \Omega_n,$$

и краевым условиям

$$\delta u_n^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \delta u_n^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega} = 0.$$

Для оценки $\delta u_n^{(k+1)}$ по норме $\|\cdot\|_0$ было использовано равенство

$$J(u_1, v_1) - J(u_2, v_2) = J(u_1, v_1 - v_2) + J(u_1 - u_2, v_2),$$

свойство (27), неравенство [22]

$$\left|(J(u,v), w)_{L_2(\Omega)}\right| \le c_0 \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_2(\Omega)},$$

$$u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega), \quad w \in L_2(\Omega),$$

и неравенство Юнга. Получено, что

$$\left\|\delta u_n^{(k+1)}\right\|_0 \le \frac{2c_0}{\nu}(L_0 + L)\left\|\delta u_n^{(k)}\right\|.$$

Пусть $\frac{2c_0(L_0 + L)}{\nu} \le \alpha < 1$, то есть

$$\frac{1}{\nu} \le \frac{\alpha}{2c_0(L_0 + L)}. \tag{30}$$

Тогда $\left\|\delta u_n^{(k+1)}\right\|_0 \le \alpha\left\|\delta u_n^{(k)}\right\|_0 \le \dots \le \alpha^k \left\|\delta u_n^{(1)}\right\|_0$ и

$$\left\|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\right\|_0 < \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\gamma, \tag{31}$$

где $\gamma = \left\|\delta u_n^{(1)}\right\|_0$. Поскольку $\alpha < 1$, то $\left\|u_n^{(k+p)} - u_n^{(k)}\right\|_0 \to 0$ при $k \to \infty$, то есть последовательность $\{u_n^{(k)}\}$ является фундаментальной. В силу полноты пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_n)$ это означает, что последовательность $\{u_n^{(k)}\}$ сходится (с геометрической скоростью), то есть существует функция $u_n^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega_n)$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_n^{(k)} = u_n^*$.

Устремив в неравенстве (31) p к ∞, получим оценку для k-го приближения:

$$\left\|u_n^* - u_n^{(k)}\right\|_0 \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\gamma. \tag{32}$$

Предельная функция u_n^* является единственным обобщенным решением задачи (21) – (23) в ограниченной области Ω_n, имеет место равенство

$$\nu\left\|u_n^*\right\|_0^2 = \left(J(u_0 + u_n^*, u_n^*), \Delta(u_0 + u_n^*)\right)_{L_2(\Omega_n)} +$$

$$+U_\infty (Au_0, \Delta u_n^*)_{L_2(\Omega_n)}$$

и оценка

$$\left\|u_n^*\right\|_0^2 \le \frac{8c^2c_1^4}{\nu^2}(L_0^4 + L^4) + \frac{4U_\infty^2 c_1^2}{\nu^2} L_0^2 . \qquad (33)$$

Объединяя условия (29) и (30) для $1/\nu \sim \mathrm{Re}$ получим оценку

$$1/\nu < \qquad (34)$$

$$< \min\left\{\frac{L}{2c_1\sqrt{2c^2c_1^2(L_0^4+L^4)+U_\infty^2 L_0^2}}, \frac{\alpha}{2c_0(L_0+L)}\right\}.$$

Таким образом, имеет место теорема.

Теорема 4. Последовательные приближения, формируемые по схеме (25) – (26), сходятся при малых числах Рейнольдса к единственному обобщенному решению $u_n^* \in F$ задачи (21) – (23), рассматриваемой в ограниченной области Ω_n, причем для k-го приближения оценка погрешности имеет вид (32). Условие малости формулируется в виде неравенства (34).

Структура решения краевой задачи (21) – (23) имеет вид (13). Неопределенные компоненты структуры аппроксимируем как и в линейной задаче. Итак, на каждой итерации в области Ω_n приближенное решение задачи (25) – (26) будем искать в виде

$$u_{n,N}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{N} c_{n,j}^{(k+1)} \varphi_j ,$$

где $c_{n,j}^{(k+1)}$, $j = 1,..., N$, являются решением СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{N} c_{n,j}^{(k+1)} \nu[\varphi_j, \varphi_i] = (f^{(k+1)}, \varphi_i), \; i = \overline{1, N}, \qquad (35)$$

где

$$(f^{(k+1)}, \varphi_i) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_n} [J(u_0 + u_n^{(k)}, \varphi_i)\Delta(u_0 + u_n^{(k)}) + U_\infty Au_0 \Delta\varphi_i] d\Omega .$$

Отметим, что матрица системы (35) не изменяется от итерации к итерации, вычисляется лишь один раз на первой итерации, а затем на каждой итерации пересчитывается лишь правая часть $(f^{(k+1)}, \varphi_i)$.

Из теорем сходимости метода Бубнова-Галёркина [17] и результатов для линейной задачи следует, что при $N \to \infty$ последовательность $u_{n,N}^{(k)}$ сходится к $u_n^{(k)}$, а $u_n^{(k)}$ при числах Рейнольдса, удовлетворяющих (34), сходится к u_n^*, причем функция u_n^* удовлетворяет интегральному тождеству (24), записанному для Ω_n, и имеет место оценка (33).

Следуя работам О.А. Ладыженской [15, 16], из последовательности $\{u_n^*\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{u_{n_j}^*\}$. Переходя к пределу при $n_j \to \infty$ в интегральном тождестве, определяющем решение $u_{n_j}^*$, получим, что предельная функция u^* удовлетворяет тождеству (24) при любой $v \in F$, т.е. является обобщенным решением задачи (21) – (23).

Теорема 5. Функции u_n при $M_n \to \infty$ сходятся к обобщенному решению задачи (21) – (23).

Вычислительный эксперимент [20] показал, что в задачах обтекания кругового и эллиптического цилиндров последовательные приближения сходятся при $\mathrm{Re} \le 10$. При реализации метода последовательных приближений в качестве $u_n^{(0)}$ выбирались решения линейных задач, полученные в [20].

3. Метод численного анализа задачи расчета обтекания тел вращения

Рассмотрим теперь стационарное обтекание тела вращения потоком вязкой несжимаемой жидкости в сферической системе координат (r, θ, φ) [3, 4]. В этом случае вектор скорости можно искать в виде

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \; v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \; v_\varphi = 0,$$

где $\psi = \psi(r,\theta)$ – функция тока.

В линейном приближении (линеаризация Стокса) течение описывается следующей задачей для ψ [3, 4]:

$$E^2\psi = 0 \text{ в } \Omega, \qquad (36)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \; \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (37)$$

$$\lim_{r\to+\infty} \psi \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2\theta, \qquad (38)$$

а общая (нелинейная) задача для ψ имеет вид [5 – 7]

$$\nu E^2\psi = B\psi \text{ в } \Omega, \qquad (39)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \; \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (40)$$

$$\lim_{r\to+\infty} \psi \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2\theta . \qquad (41)$$

Здесь ν – коэффициент вязкости, U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности,

$$E\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right),$$

$$B\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial E\psi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial E\psi}{\partial\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)E\psi .$$

Исследование разрешимости задач (36) – (38) и (39) – (41), а также исследование применимости методов *R*-функций, последовательных приближений и Бубнова-Галёркина проводится по аналогичным п. 2 схемам.

В линейной задаче (36) – (38) делаем замену

$$\psi = \omega_M^2 \psi_0 + u,$$

где $\psi_0 = 0,25U_\infty (r-R)^2 (2 + Rr^{-1}) \sin^2\theta$ – решение Стокса для задачи про обтекание сферы радиуса R, u – новая неизвестная функция.

Тогда линейная задача в ограниченной области Ω_n имеет вид:

$$E^2 u_n = f \text{ в } \Omega_n, \quad (42)$$

$$u_n|_{\partial\Omega} = 0, \left.\frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (43)$$

где $f = -E^2(\omega_M^2 \psi_0)$, u_n продолжены нулем вне Ω_n.

Для решения задачи (42) – (43) также имеет место теорема о сходимости галёркинских приближений и справедлива оценка

$$\|u_n\|_0 \le c_1 \|f\|_{L_2(\Omega_n)}.$$

Для нелинейной задачи (39) – (41) делаем замену $\psi = u_0 + u$, где u – новая неизвестная функция, а u_0 – решение задачи:

$$E^2 u_0 = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = 0, \left.\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\lim_{r\to+\infty} r^{-2} u_0 = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2\theta.$$

Тогда получим нелинейную задачу в ограниченной области

$$\nu E^2 u = B(u_0 + u) \text{ в } \Omega_n, \quad (44)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (45)$$

Итерационный процесс решения задачи (44), (45) строится аналогично схеме (25), (26). Имеет место теорема о сходимости последовательных приближений при малых числах Рейнольдса в конечной области Ω_n. Условие малости числа Рейнольдса имеет вид

$$\frac{1}{\nu} < \min\left\{ \frac{L}{2\sqrt{c_0^2 + 4c_3^2 c_1^4}\,(1 + c_2 c_1)(L_0^2 + L^2)}, \frac{\alpha}{4(1 + c_2 c_1)(L_0 + L)\sqrt{c_0^2 + 2c_3^2 c_1^4}} \right\}.$$

Структура решения задач (36) – (38) и (39) – (41) также дается формулой (13). Неопределенные компоненты аппроксимируются функциями, построенными на основании полной системы частных решений уравнения $E^2 u = 0$ [4, 23].

Вычислительный эксперимент показал, что в задачах обтекания сферы и эллипсоида вращения последовательные приближения сходятся при $Re < 10$. При реализации метода последовательных приближений в качестве $u_n^{(0)}$ выбирались решения линейных задач, полученные в [23].

Выводы

В работе впервые предложен и обоснован численный метод расчета стационарного обтекания тел вращения и цилиндрических тел вязкой несжимаемой жидкостью, основанный на совместном применении методов последовательных приближений, R-функций и Галёркина, который отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает все краевые условия задачи, в том числе и условие на бесконечности. Разработанный метод позволяет проводить математическое моделирование разных технологических и физико-механических процессов. Следует также отметить, что благодаря использованию структуры (13) получаемые приближенные решения u_n определены и вне Ω_n, причем на бесконечности выходят на асимптотику, которая входит в постановку задачи.

Сказанное выше и определяет *научную новизну* и *практическую значимость* полученных результатов.

Литература: **1.** *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: РХД, 2003. Т. 1. 452 с.; Т. 2. 452 с. **2.** *Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003. 736 с. **3.** *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. **4.** *Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А.* Химическая гидродинамика. М.: Квантум, 1996. 336 с. **5.** *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с. **6.** *Шкадов В.Я., Запрянов З.Д.* Течения вязкой жидкости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 200 с. **7.** *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с. **8.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. **9.** *Колосова С.В.* Применение проекционных методов и метода *R*-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. … к.ф.-м.н.: 01.01.07 Вычислительная математика. Харьков: ХИРЭ, 1972. 85 с. **10.** *Колосова С.В., Сидоров М.В.* Применение метода *R*–функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. 2003. № 602. С. 61–67. **11.** *Суворова И.Г.* Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. Харьков, 2004. № 31. С. 141–148. **12.** *Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В.* Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 2. С. 50–57. **13.** *Максименко-Шейко К.В.* Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом *R*-функций // Доп. НАН України. 2005. № 9. С. 41–46. **14.** *Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л.* Про один метод розв’язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. № 9. 1972. С. 837–839. **15.** *Киселев А.А., Ладыженская О.А.* О решении линеаризованных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости // ДАН СССР. 1954. Т. XCV, № 6. С. 1161–1164. **16.** *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

288 с. **17.** *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. **18.** *Михлин С.Г.* Некоторые достаточные условия сходимости метода Галеркина // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. н. 1950. Вып. 21, № 135. С. 3–23. **19.** *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с. **20.** *Ламтюгова С.Н., Сидоров М.В.* Математическое моделирование задач обтекания в цилиндрической системе координат // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2014. №1105, вип. 24. С. 111–121. **21.** *Lamtyugova S.N., Sidorov M.V.* Numerical analysis of the problem of flow past a cylindrical body applying the R-functions method and the Galerkin method // Econtechmod. 2014. Vol. 3, No. 3. Pp. 43-50. **22.** *Chueshov I., Duan J., Schmalfuss B.* Probabilistic dynamics of two-layer geophysical flows // Stochastics and dynamics. 2001. Vol. 1, No. 4. Pp. 451–475. **23.** *Lamtyugova S.N., Sidorov M.V.* Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R-function method // Journal of Engineering Mathematics, 2015. V. 91, No. 1. Pp. 59–79. (DOI: 10.1007/s10665-014-9746-x).

Транслитерированный список литературы.

1. *Lamb G.* Gidrodinamika. M.: RHD, 2003. T. 1. 452 p.; T. 2. 452 p. **2.** *Landau L.F., Lifshic E.M.* Teoreticheskaja fizika. V 10 t. T. VI. Gidrodinamika. M.: Fizmatlit, 2003. 736 p. **3.** *Lojcjanskij L.G.* Mehanika zhidkosti i gaza. M.: Drofa, 2003. 840 p. **4.** *Kutepov A.M., Poljanin A.D., Zaprjanov Z.D., Vjaz'min A.V., Kazenin D.A.* Himicheskaja gidrodinamika. M.: Kvantum, 1996. 336 p. **5.** *Happel' Dzh., Brenner G.* Gidrodinamika pri malyh chislah Rejnol'dsa. M.: Mir, 1976. 630 p. **6.** *Shkadov V.Ja., Zaprjanov Z.D.* Techenija vjazkoj zhidkosti. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1984. 200 p. **7.** *Poljanin A.D., Zajcev V.F.* Spravochnik po nelinejnym uravnenijam matematicheskoj fiziki: Tochnye reshenija. M.: Fizmatlit, 2002. 432 p. **8.** *Rvachev V.L.* Teorija R-funkcij i nekotorye ee prilozhenija. K.: Nauk. dumka, 1982. 552 p. **9.** *Kolosova S.V.* Primenenie proekcionnyh metodov i metoda R-funkcij k resheniju kraevyh zadach v besko-nechnyh oblastjah. Diss. … k.f.-m.n.: 01.01.07 Vychislitel'naja matematika. Har'kov: HIRJe, 1972. 85 p. **10.** *Kolosova S.V., Sidorov M.V.* Primenenie metoda R–funkcij k raschetu ploskih techenij vjazkoj zhidkosti // Visn. HNU. Ser. Prikl. matem. i meh. 2003. № 602. Pp. 61–67. **11.** *Suvorova I.G.* Komp'juternoe modelirovanie osesimmetrichnyh techenij zhidkosti v kanalah slozhnoj formy // Vestn. NTU HPI. Har'kov, 2004. № 31. Pp. 141–148. **12.** *Tevjashev A.D., Gibkina N.V., Sidorov M.V.* Ob odnom podhode k matematicheskomu modelirovaniju ploskih stacionarnyh techenij vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti v ko-nechnyh odnosvjaznyh oblastjah // Radiojelektronika i in-formatika. 2007. № 2. Pp. 50–57. **13.** *Maksimenko-Shejko K.V.* Matematicheskoe modelirovanie teploobmena pri dvizhenii zhidkosti po kanalam s vintovym tipom simmetrii metodom R-funkcij // Dop. NAN Ukraïni. 2005. № 9. Pp. 41–46. **14.** *Strel'chenko A.J., Kolosova S.V., Rvachov V.L.* Pro odin metod rozv'jazuvannja krajovih zadach // Dop. AN URSR, ser. A. № 9. 1972. Pp. 837–839. **15.** *Kiselev A.A., Ladyzhenskaja O.A.* O reshenii linearizovannyh uravnenij ploskogo nestacionarnogo techenija vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti // DAN SSSR. 1954. T. XCV, № 6. Pp. 1161–1164. **16.** *Ladyzhenskaja O.A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. M.: Nauka, 1970. 288 p. **17.** *Mihlin S.G.* Variacionnye metody v matematicheskoj fizike. M.: Nauka, 1970. 512 p. **18.** *Mihlin S.G.* Nekotorye dostatochnye uslovija shodimosti metoda Galerkina // Uch. zap. LGU. Ser. mat. n. 1950. Vyp. 21, № 135. Pp. 3–23. **19.** *Poljanin A.D.* Spravochnik po linejnym uravnenijam matematicheskoj fiziki. M.: Fizmatlit, 2001. 576 з. **20.** *Lamtjugova S.N., Sidorov M.V.* Matematicheskoe modelirovanie zadach obtekanija v cilindricheskoj sisteme koordinat // Visnik HNU im. V.N. Karazina. Ser. Matematichne modeljuvannja. Informacijni tehnologiï. Avtomatizovani sistemi upravlinnja. 2014. №1105, vip. 24. Pp. 111–121. **21.** *Lamtyugova S.N., Sidorov M.V.* Numerical analysis of the problem of flow past a cylindrical body applying the R-functions method and the Galerkin method // Econtechmod. 2014. Vol. 3, No. 3. Pp. 43-50. **22.** *Chueshov I., Duan J., Schmalfuss B.* Probabilistic dynamics of two-layer geophysical flows // Stochastics and dynamics. 2001. Vol. 1, No. 4. Pp. 451–475. **23.** *Lamtyugova S.N., Sidorov M.V.* Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R-function method // Journal of Engineering Mathematics, 2015. V. 91, No. 1. Pp. 59–79. (DOI: 10.1007/s10665-014-9746-x).

Поступила в редколлегию 15.06.2015
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Ламтюгова Светлана Николаевна, аспирант каф. прикладной математики ХНУРЭ, ассистент каф. высшей математики ХНУГХ им. А.Н. Бекетова. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория *R*-функций и её приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. +38 (057) 7021436.

Lamtyugova Svetlana Nikolaevna, PhD student of Department of Applied Mathematics KhNURE, Assistant of Department of Advanced Mathematics O.M. Beketov NUUE in Kharkiv. Research interests: mathematical modeling, numerical methods, mathematical physics, the theory of *R*-functions and its applications. Address: Ukraine, 61166, Kharkov, Lenin Ave, 14, phone +38 (057) 7021436.

УДК 517.9:532.5

Застосування ітераційних методів до розрахунку обтікання тіл стаціонарним потоком в'язкої рідини / С.М. Ламтюгова // Радіоелектроніка та інформатика. 2015. № 2. С. 000 – 000.

Розглянуто і обґрунтовано застосування методів *R*-функцій, послідовних наближень і Бубнова-Гальоркіна до розрахунку обтікання тіл обертання і циліндричних тіл стаціонарним потоком в’язкої рідини. Доведено збіжність побудованого ітераційного процесу при малих числах Рейнольдса, отримані оцінки швидкості збіжності і оцінки розв’язків у енергетичній нормі.

Бібліогр.: 23 назв.

UDC 517.9:532.5

The iterative methods application for calculating the flow over body by stationary current of viscous fluid / S.N. Lamtyugova // Radioelektronica i informatika. 2015. № 2. P. 000–000.

The application of the *R*-functions method, the successive approximations method and the Bubnov-Galerkin method to calculate the flow over bodies of revolution and around cylindrical bodies by stationary current of viscous fluid was considered and substantiated. The convergence of the iterative process, constructed at low Reynolds numbers, was proved. The estimates of the convergence rate and solutions assessments in the energy norm were derived.

Ref.: 23 items.