## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНИВАНИЯ ТЕПЛИЦЕВЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ АДАПТИВНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Семеняка А.В., Рачков Д.С.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, 17, НИЦ ИИРЭСТ, тел. (057) 702-11-38,
e-mail: semandvik@gmail.com

Overview and comparative analysis of efficiency of various methods for Toeplitz covariance matrix estimation in regular systems of space-time signal processing are carried out. It is shown, that methods with an estimation of input process' partial correlation coefficients based on adaptive lattice filters are the most efficient in "speed – computational complexity" criteria among considered ones.

**Введение**. Основное направление совершенствования адаптивных систем пространственно-временной обработки сигналов связано с повышением их быстродействия, необходимого для эффективной работы в сложной и динамично меняющейся сигнально – помеховой обстановке. Решение этой задачи существенно зависит от качества используемых оценок априори неизвестных параметров входных воздействий. При доступном объеме обучающей выборки оно теоретически тем выше, чем меньше размерность вектора (матрицы) этих параметров. Важным источником снижения этой размерности служит учет достоверной априорной информации о структуре (в частности, регулярности) пространственных (временных) каналов приема, следствием которой может быть специфическая структура (теплицевость) эрмитовой корреляционной матрицы (**КМ**) гауссовых внешних воздействий на выходах этих каналов. Такая матрица полностью определяется элементами только первого (последнего) столбца, что создает предпосылки для повышения быстродействия адаптивной обработки в регулярных системах по сравнению с системами с произвольной структурой каналов приема (с **КМ** общего вида), в том числе и с центрально – симметричными системами (с персимметричными **КМ**).

В литературе последних десятилетий предложено большое число способов использования резервов, связанных с теплицевостью **КМ**, и их список продолжает пополняться. В этих условиях большое значение приобретают корректные сравнительные исследования различных методов, позволяющие дать обоснованные рекомендации по их выбору и практической реализации. Решению этих задач посвящен данный доклад.

**1 Разновидности анализируемых оценок.** Теплицевой $M \times M$ **КМ** $\mathbf{\Phi} = \{\varphi_{ij}\}_{i,j=1}^{M}$ называется эрмитова $\left(\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^*\right)$ положительно определенная матрица вида [2]

$$\mathbf{\Phi} = \{\varphi_{ij}\}_{i,j=1}^{M} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1^* & \cdots & \rho_{M-2}^* & \rho_{M-1}^* \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_1^* & \cdots & \rho_{M-2}^* \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_{M-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_0 & \rho_1^* \\ \rho_{M-1} & \rho_{M-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \varphi_{ij} = \rho_{i-j} = \varphi_{ji}^*, \\ \varphi_{i+1,j+1} = \varphi_{i,j}, \\ i,j \in 1, M-1, \end{array} \tag{1}$$

с равными элементами на диагоналях. Такая матрица полностью определяется элементами $\rho_i, i \in 0, M-1$ первого (последнего) столбца – автокорреляционной последовательностью (**АКП**) $\mathbf{t} = \{\rho_i\}_{i=0}^{M-1}$ стационарного процесса. **КМ** такого вида характерны для выходных сигналов "регулярных" систем пространственно-временной обработки (линейных эквидистантных антенных решеток из идентичных элементов, систем междупериодной обработки в импульсных **РЛС** с постоянным временным интервалом между зондированиями и т.п.) [2-5].

В подавляющем большинстве ситуаций определяющие **АКП** априори неизвестны, поэтому различные функции **КМ**, предусматриваемые алгоритмами обработки, формируются на основе тех или иных оценок $\hat{\mathbf{t}} = \{\hat{\rho}_i\}_{i=0}^{M-1}$ **АКП**, в общем случае не эквивалентных по эффективности и сложности.

В докладе сопоставляется эффективность различных методов оценивания теплицевых **КМ** (**ТКМ**). Полагается, что для использования в этих целях доступна классифицированная выборка $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^{K}$ объема $K$ $M$ - мерных комплексных нормальных взаимно независимых обучающих векторов

$$\mathbf{y}_i = \left\{ y_\ell^{(i)} \right\}_{\ell=1}^{m} \sim CN(\mathbf{0}, \mathbf{\Phi}), \ \overline{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_j^*} = \begin{cases} \mathbf{\Phi}, & i = j, \\ \mathbf{0}, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in 1, K \tag{2а}$$

с нулевым вектором средних значений и той же **КМ** (1). Здесь и далее черта сверху и "*" – символы статистического усреднения и эрмитового сопряжения (комплексного сопряжения и транспонирования) соответственно.

**1.1 МП оценки КМ и их регуляризованные модификации**.

**1⁰**. Эффективность рассматриваемых оценок теплицевых **КМ** сравнивается с эффективностью использования выборочной **КМ**

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \{\varphi_{kl}\}_{k,l=1}^{M} = K^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{K} \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i^*, \tag{2б}$$

в условиях (2а) и $K \geq M$ являющейся максимально правдоподобной (**МП**) оценкой **КМ** **общего** вида [1], не учитывающей специфику (теплицевость) **КМ** (1).

При $K < M$ оценка (2б) вырождена, поэтому адаптация на основе матрицы, обратной к ней, может начаться только после накопления $K \geq M$ обучающих векторов.

**2⁰**. Этот недостаток преодолевается теми или иными способами "регуляризации", в частности, дополнением (2б) скалярной (пропорциональной единичной) матрицей [3]:

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_P = c1 \cdot \mathbf{I}_M + \hat{\mathbf{\Phi}}, \tag{3}$$

где $c1 > 0$ – скалярный параметр регуляризации. Такая оценка невырождена уже при $K \geq 1$.

**3⁰**. Информация о специфике истинной **КМ** частично учитывается **МП** оценкой

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_\Pi = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{\Phi}} + \mathbf{\Pi} \cdot \hat{\mathbf{\Phi}}^{\sim} \cdot \mathbf{\Pi}\right) = \frac{1}{2K} \sum_{i=1}^{K} \left(\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i^* + \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{y}_i^{\sim} \cdot \mathbf{y}_i^T \cdot \mathbf{\Pi}\right) \tag{4}$$

персимметричной (симметричной относительно побочной диагонали) **КМ** (**ПКМ**). Здесь $\mathbf{\Pi}$ – симметричная $M \times M$ матрица перестановок с единицами на побочной диагонали, знаки "~" и "$T$" – символы комплексного сопряжения и транспонирования соответственно.

Оценка (4) положительно определена уже при $K \geq M/2$, поэтому для начала адаптации на ее основе требуется вдвое меньший, чем в (2б) объем обучающей выборки.

**4⁰**. Аналогично **2⁰** диагональная регуляризация (4) [3]

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_{P\Pi} = c2 \cdot \mathbf{I}_M + \hat{\mathbf{\Phi}}_\Pi \tag{5}$$

с $c2 > 0$ приводит к невырожденной и положительно определенной оценке уже при $K \geq 1$.

Рассматриваемые ниже методы предназначались их авторами для более полного учета специфики **КМ** (1). Для удобства изложения мы условно разделяем их на "**прямые**" и "**косвенные**".

**1.2 "Прямые" методы оценивания теплицевых КМ.** К ним относятся методы, непосредственно формирующие оценочную **АКП**. Примерами методов этой группы являются следующие.

**5⁰**. В роли **АКП** $\mathbf{t}1 = \{\rho_i\}_{i=0}^{M-1}$ используется первый столбец оценки (2б):

$$\mathbf{t}1 = \hat{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathbf{e}_1, \quad \rho_i = \hat{\varphi}_{i+1,1}, \quad i \in 0, M-1, \tag{6}$$

где $\mathbf{e}_m$ – $m$–й, $m \in 1, M$ столбец единичной $M \times M$ матрицы $\mathbf{I}_M$. Полученная таким образом оценка $\hat{\mathbf{\Phi}}_T$ матрицы $\mathbf{\Phi}$ (1) асимптотически (при $K \to \infty$) несмещена и состоятельна, однако гарантии ее положительной определенности нет.

**6⁰**. Элементами $\rho_i$ **АКП** $\mathbf{t}2=\{\rho_i\}_{i=0}^{M-1}$ служат средние арифметические значения элементов $i$- й диагонали оценки (2б):

$$\rho_i=\frac{1}{M-i}\cdot\sum_{k=1}^{M-i}\hat{\mathbf{\Phi}}_{i+k,k},\quad i\in 0,M-1. \qquad (7)$$

Построенная по ней теплицева **КМ** также асимптотически несмещена и состоятельна, но она гарантированно положительно определенна только при $M=2$.

**7⁰**. Элементами $\rho_i$ **АКП** $\mathbf{t}3=\{\rho_i\}_{i=0}^{M-1}$ служат средние арифметические значения элементов $i$- й диагонали оценки (2б), взвешенные окном Бартлетта:

$$\rho_i=\frac{1}{M}\cdot\sum_{k=1}^{M-i}\hat{\mathbf{\Phi}}_{i+k,k},\quad i\in 0,M-1. \qquad (8)$$

**АКП** (8) порождает положительно определенную, но смещенную оценочную **ТКМ**.

**8⁰** . К этой же группе отнесем обобщенный на комплексные **КМ** метод "обратных итераций" (**ОИ**), предложенный в [2]. Его сущность заключается в рекуррентном отыскании решения нелинейного матричного уравнения, корнем которого является искомая **МП** оценка **ТКМ.** Каждое новое приближение строится по "базовым" оценкам (2б) или (3) и матрице, обратной оценке предыдущего шага. В качестве начального приближения может выступать любая эрмитова теплицева матрица. В [2] ее роли выступает единичная.

**1.3 "Косвенные" методы оценивания теплицевых КМ.** К этой группе отнесены методы, в которых в роли оцениваемых выступают не элементы **АКП** непосредственно, а параметры тех или иных представлений **ТКМ**, в том числе параметры обратной ей матрицы, наиболее часто требующейся для решения задач адаптивной обработки. Примерами методов этой группы являются следующие.

**9⁰**. Метод Ю.И. Абрамовича, Д.З. Арова, В.Г. Качура (**ААК**) [3]. В нем используется известная формула Гохберга - Семенцула восстановления матрицы, обратной **ТКМ**, по ее последней строке. В роли этой строки используется последняя строка матриц, обратных оценочным **КМ** (2б) – (5), если корни полинома, коэффициентами которого являются элементы этой строки, лежат внутри единичного круга. Если же среди них есть корни, лежащие вне единичного круга, то они заменяются на обратные, а элементами последней строки служат коэффициенты полинома, корнями которого служат новые корни, все лежащие внутри единичного круга.

**10⁰**. Оценивание методом Берга [4] коэффициентов "частной" корреляции, выступающих в роли параметров адаптивных решетчатых фильтров (**АРФ**) [5] с треугольными матричными импульсными характеристиками (**МИХ**), которые полагаются множителями Холецкого матрицы, обратной искомой оценке теплицевой **КМ**.

**11⁰**. Диагональная регуляризация оценки (4) на основе **АРФ** [5].

**12⁰**. "Ленточная" регуляризация (4) на основе **АРФ** [5] за счет снижения числа его ступеней до $m<M$ .

**13⁰**. "Ленточно-диагональная" регуляризация оценок (3), (5) на основе **АРФ** [5].

Перечисленные методы далеко не исчерпывают весь арсенал предложенных к настоящему времени методов оценивания теплицевых **КМ**. Однако в силу ограниченности объема доклада далее рассматриваются наиболее известные из них, приведенные выше.

**2 Методика сравнительного анализа оценок ТКМ.** При анализе полагается, что полученные оценки **ТКМ** используются для формирования весового вектора $\hat{\mathbf{r}}$ (импульсной характеристики) линейной обработки

$$p=\mathbf{u}^*\cdot\hat{\mathbf{r}},\quad \hat{\mathbf{r}}=\hat{\mathbf{\Psi}}\cdot\mathbf{x},\quad \hat{\mathbf{\Psi}}=\hat{\mathbf{\Phi}}^{-1} \qquad (9)$$

$M$- мерного вектора (пачки) комплексных амплитуд аддитивной смеси $\mathbf{u}=\{u_i\}_{i=1}^{M}=\mathbf{y}+\gamma\cdot\mathbf{s}$ $(\gamma=0,1)$ взаимно независимых гауссовых помех $\mathbf{y}=\{y_i\}_{i=1}^{M}$ с **КМ** $\mathbf{\Phi}$ и, возможно (при $\gamma=1$), полезного гауссового сигнала $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=1}^{M}$. Здесь $\hat{\mathbf{\Psi}}$ – оценка $M\times M$

матрицы, обратной априори неизвестной **КМ** помехи $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{x}(f) = \left\{e^{j\cdot 2\pi \cdot f \cdot i}\right\}_{i=1}^{M}$ – опорный вектор когерентного полезного сигнала.

Эффективность рассматриваемых методов характеризуется зависимостью случайной величины [1]

$$\chi(K) = \frac{\hat{\mu}(K)}{\mu}, \quad \hat{\mu}(K) = \frac{\left|\hat{\mathbf{r}}^*(K)\cdot \mathbf{x}\right|^2}{\hat{\mathbf{r}}^*(K)\cdot \mathbf{\Phi}\cdot \hat{\mathbf{r}}(K)}, \quad \mu = \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{\Psi}\cdot \mathbf{x}, \quad \chi \in 0,1 \tag{10}$$

от объема обучающей выборки $K$. Она имеет смысл потерь выходного отношения сигнал/(помеха+шум) (**ОСПШ**) $\hat{\mu}(K)$ адаптивного фильтра по сравнению с его максимальным значением $\mu$, полученным по оптимальному весовому вектору $\mathbf{r} = \mathbf{\Psi}\cdot \mathbf{x}$ в гипотетической ситуации известной **КМ** $\mathbf{\Phi}$ гауссовой помехи.

Потери (10) рассчитываются для помех от точечных источников непрерывных шумовых излучений с дискретными спектрами и непрерывными спектрами процессов авторегрессии (**АР**) целого порядка $p \geq 1$ с произвольными формой и коэффициентом корреляции помех смежных каналов приема $\rho_1$ [5].

**Краткий анализ результатов и выводы.** По результатам проведенных теоретических и экспериментальных исследований методом математического моделирования показано, что алгоритмы "теплицизации" **5⁰** – **7⁰**, предназначенные для учета априорной информации о теплицевости истинной **КМ**, но не гарантирующие положительную определенность или несмещенность оценки **ТКМ**, уступают **МП** оценкам **КМ** общего вида **1⁰**, персимметричных **КМ 3⁰** и их модификациям **2⁰** и **4⁰**, в которых такая специфика игнорируется, но положительная определенность и несмещенность гарантируются. Поэтому оценки **5⁰** – **7⁰** практически непригодны.

"Энергетическое" быстродействие методов "обратных итераций" **8⁰** и **ААК 9⁰** выше "энергетического" быстродействия **МП** оценок **1⁰** – **4⁰**, однако из-за высокой вычислительной сложности они представляют скорее теоретический, чем практический интерес.

Среди рассмотренных методов наилучшими по указанному критерию являются модификации **11⁰** – **13⁰** на основе **ленточных**, **диагональных** и **ленточно-диагонально** регуляризованных оценок параметров **АРФ**. Наряду с высоким "энергетическим" быстродействием они обладают высокой вычислительной эффективностью, что позволяет рекомендовать их для эффективного решения широкого круга задач адаптивной пространственно-временной обработки сигналов в **РЛС** с регулярной структурой каналов приема. Простейшая модификация этих оценок позволяет эффективно использовать **АРФ** и в **РЛС** с произвольной структурой каналов приема (**КМ** общего вида).

**Литература**

1. I.S. Reed, J.D. Mallett and L.E. Brennan. Rapid Convergence Rate in Adaptive Arrays // IEEE Transactions on Aerospace Electronic System. – November, 1974. – Vol. ES–10. – PP. 853–863.

2. Берг Дж.П., Люнбергер Д.Г., Венгер Д.Л. Оценивание ковариационных матриц с заданной структурой // ТИИЭР. – Т. 70, № 9. – 1982. – С. 63–77.

3. Абрамович Ю.И., Аров Д.З., Качур В.Г. Адаптивные фильтры компенсации стационарных помех, соответствующие теплицевой структуре корреляционной матрицы // Радиотехника и электроника. – М., 1986. – Т. 32, № 12. – С. 2525–2533.

4. Фридландер Б. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных // ТИИЭР. – Т. 70, № 8. – 1982. – С. 54–97.

5. Леховицкий Д.И., Абрамович Ю.И., Жуга Г.А., Рачков Д.С. Ленточно-диагональная регуляризация МП оценок корреляционных матриц гауссовых помех в алгоритмах адаптации антенных решеток. – Харьков: Прикладная радиоэлектроника. Т. 1, 2010, №1. – С. 107–121.