Отсюда с учетом (26), (28)

$$F_{n-k}(B\circ g) = B\circ g\Phi_{n-k} = \langle B\circ g \rangle = B\circ g f_{n-k}^{-1} =$$
$$= B\circ\Phi^{-1} \langle B\circ g f_{n-k}^{-1} \rangle = B\circ f_1 f_2 \ldots f_{n-k-1} \in M^{n-k-1},$$

т. е. условие 1) на k-м шаге выполняется.

Покажем справедливость условия 4) теоремы. По доказанному,

$$F_n(B\circ g)\in M^{(n-1)},\ F_{n-1}F_n(B\circ g)\in M^{(n-2)},\ \ldots,\ F_{n-k+1}\times$$
$$\times F_{n-k+2}\cdots F_n(B\circ g)\in M^{(n-k)},\ F_{n-k} = F_{n-k+1}\cdots F_n\times$$
$$\times(B\circ g)\in M^{(n-k-1)},\ \ldots,\ F_1F_2\cdots F_n(B\circ g)\in M^{(0)} = M.$$

Следовательно, $F_1F_2\cdots F_n(B\circ g) = B\circ e = F(B\circ g)$. На основании произвольности изображения $B\circ g$ произведение $F_1F_2\ldots F_n$ является нормализатором множества $M\circ G$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть нормализатор F множества $M\circ G$ — суперпозиция частичных нормализаторов $F_1, F_2 \ldots F_n$, множеств соответственно $M\circ G_1, \ldots, M\circ G_n$,* где *$G_i$ ($i = 1,2, \ldots, n$) — подгруппы, группы G. Тогда $G = G_1G_2\ldots G_n$.*

Доказательство. Обозначим $\Phi_n \langle B\circ g \rangle = g_n$, $\Phi_{n-1}\times(B\circ gg_n) = g_{n-1}$, $\Phi_{n-2}\langle B\circ gg_ng_{n-1}\rangle = g_{n-2}, \ldots, \Phi_1\langle B\circ gg_1\times g_2\ldots g_n\rangle = g_1$. Тогда $B\circ e = F(B\circ g) = F_1F_2\ldots F_n(B\circ g) = F_1F_2\ldots F_{n-1}(B\circ gg_n) = F_1F_2\ldots F_{n-2}(B\circ gg_ng_{n-1}) = \ldots = F_1\times(B\circ g_ng_{n-1}\ldots g_2) = B\circ gg_ng_{n-1}\ldots g_1$.

Отсюда

$$g = (g_ng_{n-1}\ldots g_2g_1)^{-1} = g_1^{-1}g_2^{-1}\ldots g_{n-1}^{-1}g_n^{-1}. \tag{30}$$

Однако Φ_i — отображение вида $M\circ G\to G_i$ для всех $i = 1,2, \ldots, n$. Поэтому из (30) следует, что $g\in G_1G_2\ldots G_n$, т. е. $G\subseteq G_1G_2\ldots G_n$. Но $G_1G_2\ldots G_n\subseteq G$ (G_i — по условию подгруппы группы G, $i = 1, \ldots, n$); следовательно, $G = G_1G_2\ldots G_n$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Путятин Е. П. Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение I.— В сб.: Проблемы бионики. Вып. 11. Харьков, 1973, с. 19—28.
2. Путятин Е. П., Трепетин М. С. Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение II (см. ст. в настоящем сборнике).
3. Курош А. Г Теория групп. М., «Наука», 1967. 648 с.
4. Путятин Е П., Юрченко В. П., Левиков В. Б., Берман В. И. Нормализация изображений при аффинных преобразованиях.— В сб.: Проблемы бионики. Вып. 9. Харьков, 1972, с. 23—37.

УДК 62. 506. 2

Е. П. ПУТЯТИН, канд. техн. наук,
М. С. ТРЕПЕТИН, ст. науч. сотр.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ. *СООБЩЕНИЕ III*

Настоящее сообщение является завершением исследований, начатых в [1, 2]. Используются терминология и обозначения, принятые в [2].

Нормализация при коммутативных и слабо коммутативных разложениях

Пусть группа G разлагается в произведение подгрупп $G_1, \ldots, G_n$, а нормализатор F множества $M \cdot G$ можно представить в виде суперпозиции коммутирующих (см. ниже определение 2) частичных нормализаторов $F_1, F_2, \ldots, F_n$, соответствующих подгруппам G_i $(i = 1,2, \ldots, n)$. Покажем, что в этом случае подгруппы G_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ перестановочны (в смысле определения 1). Покажем также, что группа G в том и только в том случае является прямым произведением подгрупп G_i, когда нормализаторы F_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ взаимонезависимы (см. определение 4).

Определение 1. *Подгруппы $G_1, G_2, \ldots, G_n$ называются перестановочными, если для всякой подстановки* $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_n \end{pmatrix}$ *выполнено* $G_1 G_2 \ldots G_n = G_{\varphi 1} G_{\varphi 2} \ldots G_{\varphi n}$. Для случая $n = 2$ соответствующее определение приведено в монографии [3].

Таким образом, подгруппы $G_1, \ldots, G_n$ группы G перестановочны, если для всякого набора $q_1, \ldots, q_n$ $(q_m \in G_m,\ m = 1,2, \ldots, n)$ и произвольной подстановки $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_n \end{pmatrix}$ найдутся элементы $\overset{1}{q}_{\varphi 1}, \ldots \overset{1}{q}_{\varphi n}$ $(q_{\varphi m} \in G_{\varphi m},\ m = 1,2, \ldots, n)$ такие, что $q_1 \ldots q_n = \overset{1}{q}_{\varphi 1} \ldots \overset{1}{q}_{\varphi n}$.

Нетрудно показать, что справедливо обратное, т. е. если подгруппы $G_1, \ldots, G_n$ группы G таковы, что для произвольного набора $q_1 \ldots q_n$ $(q_m \in G_m.\ m = 1, 2, \ldots, n)$ и любой подстановки $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_n \end{pmatrix}$ существует набор $\overset{1}{q}_{\varphi 1}, \ldots \overset{1}{q}_{\varphi n}$ элементов подгрупп соответственно $G_{\varphi 1}, \ldots, G_{\varphi n}$ таких, что $q_1 \ldots q_n = \overset{1}{q}_{\varphi 1} \ldots \overset{1}{q}_{\varphi n}$, то $G_{\varphi 1} \ldots G_{\varphi n} = G_1 \ldots G_n$ и подгруппы $G_1, \ldots, G_n$ перестановочны.

Определение 2. *Будем считать, что нормализатор F множества $M \cdot G$ можно представить в виде суперпозиции коммутирующих частичных нормализаторов F_i, соответствующих подгруппам G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$* группы G, *если для любой подстановки* $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_n \end{pmatrix}$ *удовлетворяется условие*

$$F_{\varphi 1} F_{\varphi 2} \ldots F_{\varphi n} = F. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть группа G — произведение перестановочных подгрупп G_i $(i = 1, \ldots, n)$ с однозначным разложением элементов группы G на множители по подгруппам G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$* (см. определение 3 в [2]). *Тогда нормализатор F представляется в виде суперпозиции коммутирующих частичных нормализаторов F_i, соответствующих подгруппам G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ группы G.*

Доказательство. Согласно теореме 1, приведенной в работе [2], представим нормализатор в виде суперпозиции нормализаторов F_i, соответствующих подгруппам G_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Покажем, что нормализаторы F_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) коммутируют. Пусть $B \circ g \in \in M \circ G$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_n \end{pmatrix}$ — некоторая перестановка элементов $1, 2, \ldots, n$. Покажем, что $F_{\varphi 1} F_{\varphi 2} \ldots F_{\varphi n} (B \circ g) = F_1 F_2 \ldots F_n \times \times (B \circ g)$.

В самом деле, так как $G_1, G_2, \ldots, G_n$ перестановочны, $G_{\varphi 1} G_{\varphi 2} \ldots G_{\varphi n} = G_1 G_2 \ldots G_n$. Пусть q — любой элемент из G и $q_{\varphi 1} q_{\varphi 2} \ldots q_{\varphi n}$ — его некоторое разложение ($q_{\varphi m} \in G_{\varphi m}, m = 1, 2, \ldots n$). Пусть $\Phi_{\varphi m}$ — отображение вида $M \circ G \to G_{\varphi m}$, определенное формулой

$$\Phi_{\varphi m} \langle B \bullet q_{\varphi 1} q_{\varphi 2} \ldots q_{\varphi n} \rangle = \overset{-1}{q_{\varphi m}} \, (m = 1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

В силу однозначности разложения элементов в группе G отображения $\Phi_{\varphi m}$ ($m = 1, 2, \ldots, n$) определены корректно.

Последовательно применяя нормализаторы $F_{\varphi 1}, F_{\varphi 2}, \ldots, F_{\varphi n}$, на основании (3) получаем

$$F_{\varphi 1} \ldots F_{\varphi n} (B \circ q) = F_{\varphi 1} \ldots F_{\varphi n-1} (B \circ q \Phi_n \langle B \circ q \rangle) =$$
$$= F_{\varphi 1} \ldots F_{\varphi n-1} (B \circ q_{\varphi 1} q_{\varphi 2} \ldots q_{\varphi n} \Phi_n \langle B \circ q \rangle) =$$
$$= F_{\varphi 1} \ldots F_{\varphi n} (B \circ q_{\varphi 1} q_{\varphi 2} \ldots q_{\varphi n} \overset{-1}{q_{\varphi n}}) =$$
$$= F_{\varphi 1} \ldots F_{\varphi n-1} (B \circ q_{\varphi 1} q_{\varphi 2} \ldots q_{\varphi n-1}) = \ldots = F_{\varphi 1} (B \circ q_{\varphi 1}) = B \circ e.$$

Следовательно, $F_{\varphi 1} F_{\varphi 2} F_{\varphi n} (B \circ q) = F_1 F_2 \ldots F_n$.

Теорема доказана.

Теорема 1 допускает обращение.

Теорема 2. *Пусть нормализатор F представлен в виде суперпозиции коммутирующих частичных нормализаторов F_i, соответствующих подгруппам G_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)* группы G. *Тогда подгруппы G_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — перестановочны, а группа G — их произведение.*

Доказательство. Пусть $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ — некоторая подстановка. Покажем, что $G_{\varphi 1} G_{\varphi 2} \ldots G_{\varphi n} = G$. Отсюда из $G = G_1 G_2 \ldots G_n$ и теоремы 2 [2] следует требуемое. Обозначим $F_{\varphi 1} = F_1, \ldots F_{\varphi n} = F^1_m$, $G_{\varphi 1} = G^1_{\varphi 1}, \ldots, G_{\varphi n} = G^1_n$. Тогда с учетом условия теоремы 2 [2], имеем $F^1_1 \ldots F^1_n = F$. Кроме того, на основании той же теоремы, $G = G^1_1 \ldots G'_n$. Следовательно, $G_{\varphi 1} G_{\varphi 2} \ldots G_{\varphi n} = G$. Теорема доказана.

Теорему 2 можно усилить, введя

Определение 3. *Пусть F_i — частичные нормализаторы множеств $M \circ G_i$ и Φ_i — отображение вида $M \bullet G \to G_i$, соответствующие F_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), причем удовлетворяется условие*

$$F_i (B \bullet q) = B \circ q \Phi_i \langle B \, q \rangle \; (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (5)$$

Нормализаторы F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются устойчивыми, если из $q = q_{\varphi 1} q_{\varphi 2} \ldots {}_{\varphi m} \in G$ для некоторых $q_{\varphi s} \in G_{\varphi s}$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ следует

$$\Phi_k \langle B \cdot q \rangle = e \tag{6}$$

для всех $k \neq \varphi s$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$.

Условие (6) имеет следующий физический смысл. Считается, что нормализаторы $F_1, \ldots, F_n$ устойчивы в нормализации, если из того, что нормализатор F_k на некотором шаге не меняет изображение, следует, что применение F_k на любом другом шаге не изменяет изображение.

Теорема 3. *Пусть нормализатор F множества $M \cdot G$ можно представить в виде суперпозиции устойчивых коммутирующих нормализаторов $F_1, F_2, \ldots, F_n$ множеств соответственно $M \cdot G_1, \ldots, M \cdot G_n$. Тогда группа G разлагается в произведение попарно перестановочных подгрупп $G_1, \ldots, G_n$.*

Доказательство. Как установлено в процессе доказательства теоремы 2, имеет место разложение $G = G_1 G_2 \ldots G_n$. Покажем, что подгруппы G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ попарно перестановочны, т. е. $G_i G_j = G_j G_i$ для всяких $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $q_i \in G_i$, $q_j \in G_j$ $(i \neq j)$. Убедимся, что $q_i q_j = \overset{1}{q}_j \overset{1}{q}_i$ для подходящих $\overset{1}{q}_j \in G_j$, $\overset{1}{q}_i \in G_i$.

В силу идемпотентности и перестановочности F_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ можно считать их попарно различными. При этом из условия теоремы непосредственно следует, что для всякой подстановки $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ выполнено

$$F_{\varphi 1} F_{\varphi 2} \ldots F_{\varphi n} (B \circ q) = F(B \circ g)\, B \cdot e = B. \tag{7}$$

Вследствие перестановочности нормализаторов $F_1, \ldots, F_n$ выберем $F_{\varphi 1} = F_j$, $F_{\varphi 2} = F_i$. Так как F_k попарно различны, индексы φ_r $(r = 3, 4, \ldots, n)$ отличны от i, j. Тогда из (6) следует

$$F_{\varphi r} (B \cdot q_i q_j) = B \circ q_i q_j \Phi \langle B \cdot q_i q_j \rangle = B \circ q_i q_j e = B \cdot q_i q_j. \tag{8}$$

Отсюда и из $\varphi 1 = j$, $\varphi 2 = i$ получаем

$$F_{\varphi 1} F_{\varphi 2} \ldots F_{\varphi n} (B \cdot q_i q_j) = F_{\varphi 1} F_{\varphi 2} (B \cdot q_i q_j) = F_j F_i (B \cdot q_i q_j). \tag{9}$$

Обозначим

$$\Phi_i \langle B \cdot q_i q_j \rangle = \tilde{q}_i; \; \Phi_j \langle B \cdot q_i q_j \tilde{q}_i \rangle = \tilde{q}_j. \tag{10}$$

Теперь в силу (5) имеем

$$F_j F_i (B \circ q_i q_j) = F_j (B \cdot q_i q_j q_i) = B \circ g_i g_j \tilde{g}_i \tilde{g}_j \tag{11}$$

Наконец, из (7), (9), (10) выводим $e = q_i q_j \tilde{q}_i \tilde{q}_j$ и $q_i q_j = \tilde{q}_j^{-1} \tilde{q}_i^{-1}$. Однако $\tilde{q}_j^{-1} \in G_j$, $\tilde{q}_i^{-1} \in G_i$. Следовательно, $q_i q_j \in G_j G_i$ и $G_i G_j \leqslant G_j G_i$. Аналогично получаем $G_j G_i \leqslant G_i G_j$, т. е. $G_i G_j = G_j G_i$. Теорема доказана.

Лемма. *Пусть нормализаторы F_i множеств $M \circ G_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) устойчивы. Тогда для всякого $k = 2, 3, \ldots, n$ выполнено*

$$G_1 G_2 \ldots G_{k-1} \cap G_k = e. \tag{12}$$

Доказательство. Предположим противное и пусть $g \in G_1 \ldots G_{k-1} \cap G_k \setminus e$. Так как F_k — нормализатор множества $M \circ G_k$, $F_k(B \circ g) = B \circ e$ для всякого $B \in M$. С другой стороны, в силу (7) и устойчивости нормализаторов имеем $\Phi_k \langle B \circ q_1 \ldots g_{k-1} \rangle = e$ для любого набора $q_i \in G_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k-1$). В частности, $\Phi_k \langle B \circ g \rangle = e$. Отсюда и из (5) получаем $F_k(B \circ g) = B \circ g \Phi_k \langle B \circ g \rangle = B \circ qe = B \circ g$, т. е. $g = e$, вопреки предположению. На основании полученного противоречия утверждение леммы доказано.

Теорема 4. *Пусть нормализатор F множества $M \cdot G$ представляется в виде суперпозиции коммутирующих устойчивых нормализаторов $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (множеств соответственно $M \cdot G_1, M \circ G_2, \ldots, M \circ G_n$). Тогда элементы группы G единственным образом разлагаются на множители из соответствующих подгрупп $G_1, \ldots, G_n$.*

Доказательство. Из условий данной теоремы и теоремы 2 имеем $G = G_1 G_2 \ldots G_n = G_{\varphi 1} G_{\varphi 2} \ldots G_{\varphi n}$ для произвольной подстановки $\varphi = \begin{pmatrix} 1\,2 \ldots n \\ i_1\, i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}$. Пусть $g_{\varphi 1} g_{\varphi 2} \ldots g_{\varphi n} = f_{\varphi 1} f_{\varphi 2} \ldots f_{\varphi n}$ для некоторых $g_{\varphi m}$, $f_{\varphi m} \in G_{\varphi m}$ ($m = 1, 2, \ldots, n$). Покажем, что $g_{\varphi m} = f_{\varphi m}$ ($m = 1, 2, \ldots, n$). Предположим противное и пусть $g_{\varphi l} \neq f_{\varphi l}$ для некоторого $l \leqslant n$.

Пусть k — наибольшее из тех l, для которых отмеченное неравенство выполняется. Сокращая соотношение $g_{\varphi 1} \ldots g_{\varphi n} = f_{\varphi 1} \ldots f_{\varphi n}$ на $g_{\varphi k+1} \ldots g_{\varphi n} = f_{\varphi k+1} \ldots f_{\varphi n}$, получаем $g_{\varphi 1} \ldots g_{\varphi k} = f_{\varphi 1} \ldots f_{\varphi k}$, откуда

$$\begin{aligned} & f_{\varphi k-1}^{-1} \ldots f_{\varphi 1}^{-1} g_{\varphi 1} \ldots g_{\varphi k-1} = \\ & = (f_{\varphi 1} \ldots f_{\varphi k-1})^{-1} g_{\varphi 1} \ldots g_{\varphi k-1} = f_{\varphi k} g_{\varphi k}^{-1}. \end{aligned} \tag{13}$$

В силу попарной коммутативности подгрупп $G_{\varphi 1}, \ldots, G_{\varphi k}$ равенство (13) можно преобразовать к виду $h_1 h_2 \ldots h_{k-1} = h_k$, где $h_i = ((f_{\varphi i}^{-1}) g_{\varphi i})'$ для некоторых $(f_{\varphi i}^{-1})' \in G_{\varphi i}$ ($i = 1, 2, \ldots, k-1$; $h_k = f_{\varphi k} g_{\varphi k}^{-1}$). При этом $h_k \neq e$ ввиду $f_{\varphi k} \neq g_{\varphi k}$.

Для завершения доказательства перенумеруем подгруппы $G_{\varphi i}$ и нормализаторы $F_{\varphi i}$, полагая $G_{\varphi i} = G'_i$, $F_{\varphi i} = F'_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда $e \neq h_k = h_1 h_2 \ldots h_{k-1}$ и, значит, $G'_k \cap G'_1 G'_2 \ldots G'_{k-1} \neq e$, вопреки утверждению леммы. Вследствие полученного противоречия теорема доказана.

Определение 4. *Коммутирующие устойчивые нормализаторы $F_1, \ldots, F_n$ (множеств соответственно $M \circ G_1, \ldots, M \circ G_n$) называются независимыми, если для любых изображений $B \circ g \in$*

$\in M \cdot G$ *и индексов* $m, i_1, i_2, \ldots, (i_k = 1, 2, \ldots, n;\ m \neq i_1, \ldots, i_k)$ *удовлетворяется условие*

$$\Phi_m \langle B \cdot q \rangle = \Phi_m \langle F_{i_1} F_{i_2} \ldots F_{i_k} (B \cdot q) \rangle . \qquad (14)$$

Физически (14) означает, что частичные нормализаторы $F_1, \ldots, F_n$ действуют независимо в том числе, если независимо от своего положения в произведении $F_1 F_2 \ldots F_n$ нормализатор F_m $(m = 1,2, \ldots, n)$ полностью нейтрализует воздействие группы G_m. При этом действие нормализатора F_m не зависит от того, действует ли он первым в нормализующей последовательности или применяется после некоторого числа частичных нормализаторов.

Теорема 5. *Нормализатор* F *множества* $M \circ G$ *тогда и только тогда можно представить в виде суперпозиции взаимно-независимых нормализаторов* $F_1, \ldots, F_n$ *множеств соответственно* $M \circ G_1, \ldots$, *когда группа* G *является прямым произведением подгруппы* $G_1, \ldots, G_n$.

Доказательство. Допустим, что группа G — прямое произведение подгрупп G_i $(i = 1,2, \ldots, n;\ G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n)$. Тогда из теорем 2, 3 следует, что нормализатор F множества $M \circ G$ представляет собой произведение некоторых коммутирующих нормализаторов $F_1, F_2, \ldots \ldots, F_n$. Пусть отображения Φ_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ действуют по формуле

$$\Phi_i < B \circ g_1 g_2 \ldots g_{i-1} g_i g_{i+1} \ldots g_n > = g_i^{-1} . \qquad (15)$$

Тогда из определения прямого произведения и из формул (5), (15) следует справедливость условия (14). Очевидно также, что $F_{\varphi 1} F_{\varphi 2} \ldots F_{\varphi n} (B \circ g) = B \cdot e = F (B \cdot g)$ для произвольной подстановки φ. При доказательстве этого факта вычисления (4) повторяются, поэтому они опущены. Таким образом, нормализаторы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ взаимно-перестановочны в силу определения 3. Поэтому одна часть теоремы доказана.

Напротив, пусть нормализатор F — произведение взаимно-независимых нормализаторов $F_1, F_2, \ldots, F_n$ множеств соответственно $M \circ G_1, \ldots, M \circ G_n$. Тогда по теореме 3 [2] группа G разлагается в произведение попарно перестановочных подгрупп $G_1, \ldots, G_n$. Покажем, что в действительности это произведение является прямым. В этих целях установим, что $g_i g_j = g_j g_i$ для всяких $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$ $(i, j = 1,2, \ldots, n)$, и воспользуемся утверждением леммы.

В процессе доказательства теоремы 3 были выведены формулы (7), (8). Полагаем в них $\varphi = \begin{pmatrix} 1 2 & 3 & \ldots & n \\ i\ j & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$. Обозначаем $\Phi_j < B \cdot q_i q_j > = q_j$, $\Phi_i < B \cdot q_i q_j q_j > = q_i$. Тогда в силу вычислений, выполненных в (9), (11), получаем

$$B \circ e = F_1 F_2 \ldots F_n (B \circ q) = F_{\varphi 1} F_{\varphi 2} \ldots F_{\varphi n} (B \cdot q) = B \cdot g_i g_j g_j g_i . \qquad (16)$$

Отсюда $e \cdot g_i g_j \tilde{g}_j \tilde{g}_i$ и $g_j \tilde{g}_i = \overset{-1}{g_i}\,\overset{\sim -1}{g_i}$. Так как $G_i \cap G_j = e$ по лемме, $\tilde{g}_j g_j = e$. Вследствие этого

$$\Phi_j < B \circ g_i g_j > = \tilde{g}_j = \overset{-1}{g_j}. \qquad (17)$$

Пусть, как и в условии (7), $\varphi 1 = 1$, $\varphi 2 = i$. Тогда из (7) — (11) следует

$$B \circ e = B \circ g_i g_j \tilde{g}_i \tilde{g}_j. \qquad (18)$$

Покажем, что $\tilde{g}_i = \overset{-1}{g_i}$, $\tilde{g}_j = \overset{-1}{g_j}$. Действительно, в силу (10), (14) и (5) имеем $\Phi_i < B \circ g_i g_j > = \Phi_i < F_j\,(B \circ g_i g_j) > = \Phi_i < B \circ g_i g_j \Phi_j < B \circ g_i g_j >>$. Отсюда с учетом условия (17) выводим $\Phi_i < B \circ g_i g_j > = \Phi_i < B \circ g_i >$. Так как F_i — нормализатор множества $M \circ G_i$, $B\ e = F_i\,(B \circ g_i) = B \circ g_i\,\Phi < B \circ g_i >$ и, следовательно, $\Phi_i < B \circ g_i > = g_i$, т. е.

$$\tilde{g}_i = \Phi_i \langle B \circ g_i g_j \rangle = g_i^{-1}. \qquad (19)$$

Из (10), (14),(17) следует $\tilde{g}_j = \Phi_j \langle B \circ g_i g_j \tilde{g}_i \rangle = \Phi_j \langle F_i\,(B \circ g_i g_j) \rangle = \Phi_j \langle B \circ g_i g_j \rangle = g_j^{-1}$. Наконец, из (18) и сказанного заключаем, что $g_i g_j = \tilde{g}_j^{-1}\,\tilde{g}_i^{-1} = g_j g_i$. Теорема доказана.

Опишем некоторые нормализаторы, обладающие отмеченными свойствами. В работе [4] представлена суперпозиция некоммутативных операторов, которая предназначена для нормализации изображений, подвергающихся преобразованиям из аффинной группы. Согласно теореме 2 [2], такой суперпозиции будет соответствовать некоммутативное разложение группы аффинных преобразований.

Приведем пример суперпозиции коммутирующих частичных нормализаторов. Всевозможные смещения и повороты изображений образуют, как известно, евклидову группу преобразований. Пусть U и C — соответственно группы вращений и смещений, а $u \in U$ и $c \in C$ — их элементы. Легко проверить, что U и C перестановочны. При этом $uc = c'u$. Действительно, если l, m — параметры преобразования C, а θ — параметр вращения, то $B = B_0 \circ cu = B_0\,(x \cos\theta + y \sin\theta - l,\ - x \sin\theta + y \cos\theta - m)$. С другой стороны, $B = B_0 \circ u'c' = B_0\,[(x - l') \cos\theta' + (y - m') \sin\theta',\ -(x - l) \sin\theta' + (y - m') \cos\theta']$. Результирующие изображения будут совпадать, т. е. $B_0 \circ uc = B_0 \circ u'c'$, если $l = l' \cos\theta + m' \sin\theta$, $m = - l' \sin\theta + m' \cos\theta$ $(\theta = \theta')$.

Пусть имеются частичные нормализаторы F_c и F_n, однозначно определенные отображениями

$$\Phi_c = \Phi_c\,(x_0,\ Y_0) = \Phi_c \left(\frac{\iint\limits_D B\,(x,y)\,x dx dy}{\iint\limits_D B\,(x,y)\,dx dy}\ \frac{\iint\limits_D B\,(x,y)\,y dx dy}{\iint\limits_D B\,(x,y)\,dx dy} \right); \qquad (20)$$

$$\Phi_u = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\iint\limits_D B(x,y)(x-X_0)(y-Y_0)\,dxdy}{\iint\limits_D B(x,y)[(x-X_0)^2-(y-Y_0)^2]\,dxdy}. \qquad (21)$$

Нормализаторы F_c и F_u — коммутирующие. Убедимся в этом. Пусть, например, первым применяется нормализатор смещения F_c. Вычислим значения функционалов X_0, Y_0, определяющие отображения Φ_c. Эталонные значения функционалов X_0, Y_0 Φ_u положим равными нулю.

Для произвольного изображения из евклидовой группы, связанного с эталонным ссотношением $B = B_0 \circ CU$, имеем

$$X_0 = \frac{\iint\limits_D B_0 \circ cux\,dxdy}{\iint\limits_D B_0 \circ cu\,dxdy} = \frac{\iint\limits_D B_0(uv)[(u+l)\cos\theta-(v+m)\sin\theta]\,dudv}{\iint\limits_D B_0(uv)\,dudv} =$$

$$= l\cos\theta - m\sin\theta:$$

$$Y_0 = \frac{\iint\limits_D B_0\left[cu\left(\frac{x}{y}\right)\right]y\,dxdy}{\iint\limits_D B\left[cu\left(\frac{x}{y}\right)\right]dxdy} = l\sin\theta + m\cos\theta.$$

В результате действия нормализатора F_c изображение $B = B_0 \circ cu$ будет приведено к виду

$$F_c = (B \circ cu) = B_0 \circ cu\Phi_c = B_0[(x+X_0)\cos\Theta + (y+Y_0)\sin\Theta - l;$$
$$-(x+X_0)\sin\Theta + (y+Y_0)\cos\Theta - m] =$$
$$= B_0(x\cos\Theta + y\sin\Theta, -x\sin\Theta + y\cos\Theta) = B_0 \circ u.$$

Функционал Φ_u от этого изображения с учетом эталонных значений составляет

$$\Phi_u(B_0 \circ u) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\iint\limits_D B_0\left[u\left(\frac{x}{y}\right)\right]xy\,dxdy}{\iint\limits_D B_0\left[u\left(\frac{x}{y}\right)\right](x^2-y^2)\,dxdy} = \Theta.$$

Применяя нормализатор F_u, получаем эталонное изображение $F_u(B_0 \circ u) = B_0 \circ u\Phi_u = B_0$. Перестановка операторов F_c и F_u также пригодна для нормализации. В самом деле, учитывая, что функционал Φ_u в этом случае также равен углу Θ, записываем

$$F_u(B_0 \circ cu) = B_0 \circ cu\Phi_u = B_0\left[cu\Phi_u\left(\frac{x}{y}\right)\right] = B_0[(x\cos\Phi_u -$$
$$- y\sin\Phi_u)\cos\Theta + (x\sin\Phi_u + y\cos\Phi_u)\sin\Theta - l;$$
$$(-x\cos\Phi_u + y\sin\Phi_u)\sin\Theta + (x\sin\Phi_u +$$
$$+ y\cos\Phi_u)\cos\Theta - m] = B_0 \circ c.$$

Используя для полученного изображения оператор нормализации F_c, определяем эталонное изображение B_0. Функционалы X_0 и Y_0 в этом случае соответственно равны l и m.

Нормализаторы F_u и F_c — не только коммутирующие в смысле определения 2, но и устойчивые, так как $\Phi_c(B \circ u) = e$, $\Phi_u(B \circ c) = e$, что согласуется с определением 3.

Более того, нормализатор F_u независим (см. определение 4), так как вне зависимости от того, применяется ли он первым или вторым, значение функционала Φ_u не изменяется и равно углу Θ. В то же время отображение Φ_c, как вытекает из изложенного, зависит от места использования нормализатора F_c в суперпозиции. Условие (14) для этого отображения не выполняется, и, следовательно, нормализатор F_c не является независимым. С практической точки зрения предпочтение следует отдать суперпозиции F_uF_c, так как в этом случае функционал Φ_u имеет более простой вид.

Примерами коммутативных разложений группы преобразований в свои подгруппы являются приведенные в [2] различные представления диагональной матрицы. При этом матрица P изменения масштаба по осям координат (преобразование подобия) коммутирует со всеми подгруппами аффинной группы.

Рассмотрим суперпозицию коммутативных преобразований, образующих диагональную матрицу:

$$I_xI_yQP = \begin{pmatrix} \operatorname{sing}\lambda & 0 \\ \text{o} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \text{a} & \operatorname{sing}\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{g} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = D.$$

Здесь I_x, I_y — преобразования зеркального отражения относительно осей абсцисс и ординат, определенные в [1]; $q = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}$; $p = \sqrt{\lambda\mu}$.

Для нормализации центрированных изображений вида $B(x, y) = B_0(\lambda x, \mu y)$ (параметры λ и μ имеют произвольный знак) можно воспользоваться суперпозицией четырех нормализаторов F_{jx}, F_{iy}, F_q, F_p, отвечающих приведенному выше разложению. Зададим соответствующие отображения

$$\Phi_p = \sqrt{\left|\iint_D B(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|}; \qquad \Phi_g = \sqrt[4]{\frac{\iint_D B(x,y)\,x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D B(x,y)\,y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}};$$

$$\Phi_{ix} = \operatorname{sign} X_\text{г}; \quad \Phi_{iy} = \operatorname{sign} Y_\text{г}.$$

Здесь $X_\text{г}$, $Y_\text{г}$ — координаты любой другой точки, отличной от центра тяжести. Всякая суперпозиция операторов F_{ix}, F_{iy}, F_q, F_p будет нормализующей. Эти нормализаторы устойчивы. В самом деле:

$$\Phi_p = \sqrt{\left|\iint_D \left[B_0I_xI_yQ\left(\frac{x}{y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right.} = e = 1;$$

$$\Phi_q = \sqrt{\frac{\iint\limits_D \left[B_0 \circ I_x I_y P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \left[B_0 \circ I_x I_y P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}} = e = 1.$$

Функционалы Φ_{ix}, Φ_{iy} также равны единице для отображений вида $B = B_0 \circ PQ$.

Легко также убедиться, что $\Phi_p = (B_0 \circ D) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{1}{p}$; $\Phi_q = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} = \frac{1}{q}$ и значения этих функционалов, как и Φ_{ix}, Φ_{iy}, не зависят от места применения соответствующих нормализаторов в суперпозиции. Поэтому, согласно определению 4, нормализаторы F_{ix}, F_{iy}, F_q, F_p независимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Путятин Е. П. Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение I.— В сб.: Проблемы бионики. Вып. 10. Харьков, 1973, с. 47—51.
2. Курош А. Г. Теория групп. М., «Наука», 1967. 648 с.
3. Баккельман И. Я. Высшая геометрия. М., «Просвещение», 1967. 367 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., «Наука», 1970. 400 с.

УДК 62.506.2

И. В. ШУЛЬГИН, канд. техн. наук,
Б. К. ЛОПАТЧЕНКО, *Б. В. ПИЛЬЩИКОВ*, инженеры

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЗМОВ ЗРИТЕЛЬНОЙ РЕЦЕПЦИИ

Математические модели зрения можно строить двумя основными способами. Первый позволяет устанавливать алгоритмы работы глаза в процессе изучения принципов его работы, что вызывает необходимость исследования внутренней структуры глаза. При втором способе используется метод «черного ящика», благодаря которому можно, не изучая глубоко анатомо-физиологическое строение глаза, использовать только результаты наблюдений психических функций человека, связанных со зрительной рецепцией.

Знание физиологических процессов, лежащих в основе психических функций человека, дает возможность определять их закономерности. Однако сведения о физиологических механизмах органов чувств крайне недостаточны, не говоря уже о высших психических функциях — памяти, мышлении, воле и т. д. Имеются лишь данные психологических исследований этих процессов. В частности, описаны некоторые психические функции памя-