

Міністерство освіти та науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інфокомунікацій  
(повна назва)

Кафедра інформаційно-мережної інженерії  
(повна назва)

## КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

«Дослідження параметричної оцінки спектрів випадкових процесів  
методом факторизації»  
(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ІМІМ-21-1  
Рашевський О.С.  
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 172

"Телекомунікації та радіотехніка"  
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна  
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма інформаційно-  
мережна інженерія  
(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Тихонов В.А.  
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри \_\_\_\_\_  
(підпис)

Безрук В.М  
(прізвище, ініціали)

2022 р.

Не містить відомостей, заборонених  
до відкритого публікування

Керівник \_\_\_\_\_ / *В.А. Тихонов*

Студент \_\_\_\_\_ / *О.С. Рашевський*



3. Мультиплікативні моделі авторегресії

4 Застосування факторизації для вирішення задачі підвищення роздільної здатності параметричної оцінки спектральної щільності потужності

5. Перелік графічного матеріалу (із зазначенням обов'язкових креслень, плакатів)

Загальна структура універсальної моделі лінійного передбачення,

мультиплікативна модель у загальному випадку,

вираз для оцінки спектру моделі  $APKCS1$   $APKCS2$  ...  $APKCSk$ ,

мультиплікативні моделі  $AP$  другого порядку,

рівняння для розрахунку параметрів моделі  $AP1$   $AP2$ ,

параметрична спектральна оцінка моделі  $AP1$   $AP2$ ,

метод факторизації СЦП,

приклади експериментальних досліджень роздільної здатності з використанням факторизації

#### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Отримання завдання	25.10.2022	
2	Огляд літературних джерел	02.11-13.11.2022	
3	Розробка теоретичної частини	14.11-31.11.2022	
4	Алгоритми моделювання мультиплікативних процесів	01.12-05.12.2022	
5	Алгоритми моделювання факторизації	05.12-09.12.2022	
7	Оформлення пояснювальної записки	10.12-.19.12.2022	
8	Перевірка роботи	20.12-22.12.2022	
9	Підготовка до захисту	15.12-20.12.2022	

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_  
(підпис)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка кваліфікаційної роботи спеціаліста:

81 сторінок, 19 малюнків.

У кваліфікаційній роботі запропоновано методику та проведено дослідження роздільної здатності параметричних оцінок спектрів за допомогою факторизації.

Мета даної дипломної роботи полягає у розробці засобу підвищення роздільної здатності параметричної оцінки спектрів.

Метод проектування базується на використанні чисельних алгоритмів розрахунку оптимальних параметрів моделей лінійного передбачення.

Область застосування – параметричні спектри.

МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕСІЇ, ПАРАМЕТРИЧНА СЦП, ФАКТОРИЗАЦІЯ СЦП, РОЗДІЛЬНА ЗДАТНІСТЬ, ЧАСТОТА І ШИРИНА ТРАВНИНИ МОДИ СЦП, ГРАТЧАСТИЙ ФІЛЬТР, МЕТОД БЕРГА, МЕТОД ЮЛА.

## THE ABSTRACT

Explanatory note of the final qualification work of the specialist:

81 pages, 19 figures.

In the qualification work the methodology is proposed and the study of the resolution of parametric estimation of spectra by means of factorization is carried out.

The purpose of this thesis is to develop a means of improving the resolution of parametric estimation of spectra.

The design method is based on the use of numerical algorithms for calculating the optimal parameters of linear prediction models.

The field of application is parametric spectra.

AUTOREGRESSIVE MODEL, PARAMETRIC FFT, FFT  
FACTORIZATION, RESOLUTION, FREQUENCY AND WIDTH OF THE MODI  
MODI FFT, LATTICE FILTER, BERG METHOD, YULE METHOD.

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ.....	9
ВСТУП.....	10
1. Аналітичний огляд методів представлення випадкових процесів лінійними різничними стохастичними рівняннями .....	11
1.1 Різнісні моделі лінійного передбачення.....	11
1.2 Лінійні випадкові процеси у кореляційній теорії. Модель авторегресії.....	14
1.3 Алгоритм Левінсона-Дарбіна.....	18
1.4 Модель ковзного середнього.....	19
1.5 Модель авторегресії-ковзного середнього.....	20
1.6 Висновки до розділу та постановка задачі.....	23
2. Мультиплікативні моделі лінійного підказання випадкових процесів .....	25
2.1 Мономоделі та полімоделі лінійного передбачення .....	25
2.2 Мультиплікативні моделі АРКС другого рангу .....	29
3. Мультиплікативні моделі АР .....	36
3.1 Мультиплікативні моделі АР другого порядку .....	36
3.2 Мультиплікативні моделі АР третього порядку .....	42
3.3 Мультиплікативні моделі АР четвертого порядку .....	45
4. Застосування факторизації для рішення задачі підвищення дозвільної здібності параметричної оцінки СЦП .....	48
4.1 Основи синтезу моделі АР.....	48
ВИСНОВОК.....	69
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ.....	70
Додаток А – Слайди презентації.....	71

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АР - авторегресія

АРКС- авторегресія-ковзне середнє

АРПКС - авторегресія-проінтегроване ковзне середнє

БШ – білий шум

РФ – решітчастий фільтр

КС - ковзне середнє

ОКС - узагальнений ковзний середній

СКВ - середнє-квадратичне відхилення

СЩП - спектральна щільність потужності

УАР - узагальнена авторегресія

УАРКС - узагальнена авторегресія-ковзне середнє

## ВСТУП

Класичні моделі лінійного передбачення описують гаусові та негаусові процеси в рамках кореляційної теорії. Випадкові процеси повністю описуються або набором одномірних густин ймовірності, або спектрами вищих порядків. Моделі випадкових процесів дозволяють підвищити ефективність методів обробки. Особливо це важливо під час цифрової обробки випадкових процесів. Порядок моделі дорівнює числу коефіцієнтів моделі лінійного передбачення, що враховуються. Ранг моделі дорівнює порядку моментних функцій, якими розраховуються параметри лінійної моделі. Як показали дослідження, у ряді випадків раціонально використовувати моделі, що досить повно описують випадкові процеси одним лінійним різницеvim рівнянням.

Виходячи з властивостей процесу та в залежності від умов задачі, для її вирішення вибирається модель деякого рангу. Якщо ранг моделі дорівнює двом, вона може бути класичною моделлю лінійного передбачення. Класична модель характеризується однією раціональною системною функцією. Тому такі моделі називатимемо мономоделями лінійного передбачення.

Випадкові процеси, що досліджуються у статистичній радіотехніці, можуть бути сформовані в результаті послідовного (мультиплікативного) лінійного або нелінійного інерційного перетворення вхідного процесу. Такі процеси, що описуються набором моделей лінійного передбачення, називатимемо полімоделями лінійного передбачення в загальному випадку негаусових процесів. Як показує аналіз наукової літератури, ці класи моделей лінійного прогнозу ще мало досліджено, оскільки складно знаходити параметри таких моделей.

Дослідження випадкових процесів, проведені в кваліфікаційній роботі, показують, що класичні моделі лінійного передбачення, що описуються одним формуючим лінійним фільтром, можуть бути розширені на довільне число формуючих фільтрів з дробно-раціональними системними функціями. У цьому випадку фільтри, що формують, можуть з'єднуватися каскадно (послідовно).

Повна системна функція такого складового формуючого фільтра у першому випадку представляється (факторизується) добутком системних функцій.

Найчастіше для випадкових процесів використовується модель авторегресії. Оскільки кожна модель лінійного передбачення, що характеризується своїми коефіцієнтами авторегресії, визначає СЦП, можна цю полімодель у вигляді мультиплікативної, тобто. послідовної моделі. Представивши цю мультиплікативну багатомодову модель набором мономоделей зі СЦП, що містить одну або кілька мод, можна факторизувати багатомодову СЦП на окремі моди, проаналізувати вплив різних факторів формування СЦП. Процес факторизації показаний на прикладі моделі авторегресії, що використовується при дослідженні роздільної здатності.

Мета даної кваліфікаційної роботи полягає у розробці засобу підвищення роздільної здатності параметричної оцінки спектрів.

*Об'єктом* дослідження – є гаусові та негаусові випадкові процеси та сигнали та їх статистична обробка.

*Предмет* дослідження – властивості факторизації спектрів моделі авторегресії лінійного передбачення гаусових та негаусових процесів.

# 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД МЕТОДІВ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ЛІНІЙНИМИ РІЗНИЧНИМИ СТОХАСТИЧНИМИ РІВНЯННЯМИ

## 1.1 Різнісні моделі лінійного передбачення

Випадкові процеси лінійного передбачення відносяться до класу лінійних стохастичних різницевих рівнянь, що широко використовуються в методах дослідження статистичної радіотехніки та радіофізики [1, 2]. Дослідження цих процесів справило значний вплив на розвиток сучасних цифрових методів спектрального аналізу та обробки сигналів. У спеціальній літературі широкий клас процесів лінійного передбачення прийнято називати моделями лінійного передбачення корельованих випадкових процесів. Тому при подальшому викладі матеріалів кваліфікаційної роботи перевага віддаватиметься терміну “моделі”, що включає не тільки рівняння, що описують фізичні процеси радіотехнічними методами, але й умову оптимальності моделей, способи і вираження для оцінювання параметрів моделей, характеристики моделей.

Цей розділ присвячений огляду класичних моделей лінійного передбачення, які описують гаусові та негаусові випадкові процеси в рамках кореляційної теорії. Також розглянуто узагальнені моделі лінійного передбачення, параметри яких розраховуються за допомогою кумулянтних та моментних функцій. Ці моделі, засновані на статистиках вищих порядків, використовують із аналізу негаусових випадкових процесів.

У першій частині огляду розглянуті відомі моделі авторегресії, ковзного середнього та авторегресії-ковзного середнього лінійного передбачення для аналізу випадкових процесів. У другій частині огляду показані узагальнені моделі лінійного передбачення, які досить точно описують випадкові негаусові процеси. Значну увагу приділено практичному застосуванню на вирішення різних завдань.

У роботах Х. Вольда та Слуцького Є.Є. отримала розвиток теорія лінійних моделей дискретних часових рядів. Було запропоновано модель на

основі статистичного різницевого рівняння для дискретних часових рядів, введено поняття «лінійна авторегресія», «ковзне середнє», а рівняння для розрахунку параметрів авторегресійної моделі названо «рівнянням Юла – Уокера».

У кваліфікаційній роботі магістра розглядаються складні процеси, що описуються моделями лінійного передбачення, які представлені у вигляді складових, що є виходами послідовно включених формують фільтрів. Складові складного процесу видаються різницевами рівняннями лінійного передбачення. Таке уявлення, у певному сенсі, відповідає ідеї канонічного розкладання випадкових процесів.

З іншого боку, у кваліфікаційній роботі складний випадковий процес із багатомодовим спектром, пропонується розкласти на окремі складові у вигляді системних функцій складових моделей або спектральних складових із простими одномодовими спектрами. Це уявлення ближче по ідеї до полігаусового розкладання [4] негаусового процесу.

У роботі запропоновано також представляти негаусовий процес у вигляді суми процесів або їх моделей лінійного передбачення, що враховують статистичні зв'язки різних порядків. Точність такого розкладання визначається деякою помилкою, яка називається помилкою передбачення. Оскільки полімоделі лінійного передбачення розвивають теорію розкладання випадкового процесу на окремі складові та є ефективним методом аналізу випадкових процесів.

Моделі лінійного передбачення відносяться до досить широкого класу лінійних процесів. До них зокрема відносяться: лінійні періодично корельовані процеси [5], випадкові процеси з незалежними приростами та лінійні безмежно поділені випадкові процеси [6, 7], марківські та немарківські процеси [7]. В тому числі., що розробляються у кваліфікаційній роботі полімоделі лінійного передбачення, відносяться до моделей лінійних випадкових процесів, що досить широко досліджуються у статистичній радіофізиці.

## 1.2 Лінійні випадкові процеси у кореляційній теорії. Модель авторегресії

Моделі, розроблені у кваліфікаційній роботі, належать до моделей лінійного передбачення. У 1927 р. модель авторегресії (АР) другого порядку була запропонована Юлом для опису коливань маятника, котрий рухався у повітряному середовищі під впливом випадкової сили. Пізніше модель АР застосували для дослідження загасаючих синусоїдальних тимчасових рядів. Потім цю модель розглядали як рівняння передбачення процесу за попередніми відліками з адитивним шумом та розробили ймовірнісну інтерпретацію цієї моделі.

Використання кореляційної функції, що описує статистичні зв'язки першого порядку, для розрахунку параметрів моделі дозволяє вирішувати методом лінійного передбачення широке коло прикладних завдань. На основі класичних моделей лінійного передбачення синтезуються фільтри, що обеляють і формують, вирішується завдання прогнозування, отримують параметричні спектральні оцінки і т. д.

Дискретні випадкові процеси із вузькосмуговим спектром описують за допомогою моделей АР. Кореляція відліку випадкового процесу в даний час з деяким кінцевим або нескінченним числом відліків в попередні моменти часу покладена в основу моделі АР. Кореляційні зв'язки дозволяють регресію поточного відліку на попередні відліки. Така регресія називається авторегресією. Для моделі АР поточний відлік  $x[t]$  стаціонарного випадкового процесу з нульовим середнім виражається через попередні  $x[t-j]$  з деякими коефіцієнтами ваги

$$x[t] = \sum_{i=1}^p \Phi[i]x[t-i] + a[t], \quad (1.1)$$

де  $\Phi[j]$  - коефіцієнти АР,  $p$  - порядок моделі АР,

$a[t]$ - некорельовані випадкові відліки. Коефіцієнти АР та дисперсія помилки передбачення визначаються за допомогою системи лінійних рівнянь

$$R[i] - \sum_{j=1}^p \Phi[j]R[j-i] = 0, \quad i = 1 \div p, \quad (1.2a)$$

$$R[0] - \sum_{j=1}^p \Phi[j]R[j] = D_a, \quad (1.2б)$$

де  $R[j] = E\{x[t]x[t-j]\}$  - значення функції кореляції випадкового процесу,

$D_a = \sigma_a^2$  - дисперсія помилок передбачення моделі АР,

$R[0]$  - дисперсія випадкового процесу  $x[t]$ .

Набір рівнянь (1.2a) та (1.2б) – це повна система рівнянь Юла-Уокера. Вони можуть бути виражені у матричному вигляді з використанням кореляційної матриці. Коефіцієнти АР та дисперсія помилок передбачення є розв'язанням цієї системи рівнянь.

Значний внесок у дослідження рівнянь моделей лінійного передбачення було зроблено О. Теплицем [8]. Теплицева матриця є дуже важливою у параметричному спектральному аналізі. Усі елементи цієї матриці, які розташовані на будь-якій діагоналі, рівні. Оскільки кореляційна матриця є теплицевою, то рівняння Юла-Уокера в матричному вигляді відноситься до ермітових теплиць рівнянь.

У [9] були запропоновані вирази, що зв'язують коефіцієнти АР і параметри спектральної щільності потужності (СЩП). Для цього вважають, що різницеве рівняння АР визначає систему з декількома власними частотами та відповідними декрементами згасання. Рішення різницевого рівняння виражаються через коріння характеристичного рівняння, яке у разі збігається з рівнянням (1.1). Представимо характеристичне рівняння для різницевого рівняння (1.1) як

$$\prod_{i=1}^p (c - c[i]) = 0 \quad (1.3)$$

З (1.3) і (1.1) випливає, що характеристичне рівняння можна записати так

$$c^p - \Phi[1]c^{p-1} - \dots - \Phi[p] = \prod_{i=1}^p (c - c[i]) = 0 \quad (1.4)$$

Порівнюючи в (1.4) коефіцієнти при однакових ступенях  $c$ , отримують зв'язок між коефіцієнтами АР та корінням  $c[i]$ . Наведемо відповідні формули для

$p = 1 \div 4$ :

$$\Phi[1,1] = c[1],$$

$$\Phi[2,1] = c[2,1] + c[2,2],$$

$$\Phi[2,2] = -c[2,1]c[2,2],$$

(1.5)

$$\Phi[3,1] = c[3,1] + c[3,2] + c[3,3],$$

$$\Phi[3,2] = -(c[3,1]c[3,2] + c[3,1]c[3,3] + c[3,2]c[3,3]);$$

$$\Phi[3,3] = c[3,1]c[3,2]c[3,3],$$

$$\Phi[4,1] = c[4,1] + c[4,2] + c[4,3] + c[4,4];$$

$$\Phi[4,2] = -(c[4,3]c[4,4] + c[4,2]c[4,3] + c[4,1]c[4,3] + c[4,4]c[4,1] + c[4,2]c[4,3] + c[4,2]c[4,4])$$

$$\Phi[4,3] = c[4,1]c[4,3]c[4,4] + c[4,2]c[4,3]c[4,4] + c[4,1]c[4,2]c[4,3] + c[4,1]c[4,2]c[4,4];$$

$$\Phi[4,4] = -c[4,1]c[4,2]c[4,3]c[4,4].$$

У (1.5) перший індекс квадратних дужках вказує на відповідний порядок моделі. Отримані формули виявляються дуже корисними визначення коефіцієнтів АР по заданим характеристикам піків СЦП випадкового процесу.

Надалі співвідношення (1.5) широко використовуватимуться для імітаційного моделювання в даній роботі.

Зазначимо, що коріння характеристичного рівняння повністю описує модель АР. Властивості моделі залежать параметрів, якими вони виражаються. Якщо коріння дійсне, їх можна у вигляді експоненційної функції [9]

$$c[i] = e^{-h_i T},$$

де  $h_i$  - коефіцієнт демпфування рівний  $h_i = \pi \Delta f_i$ ,

де  $\Delta f_i$  - ширина полоси  $i$ -го піку СЦП.

Тоді дійсне коріння характеристичного рівняння залежить від ширини смуги виразом виду

$$c[i] = e^{-\pi \Delta f_i T}. \quad (1.6)$$

Комплексне коріння характеристичного рівняння описується виразами

$$c[i] = e^{-\pi \Delta f_i T - j \omega_{hi} T}, \quad c[i+1] = e^{-\pi \Delta f_i T + j \omega_{hi} T}, \quad (1.7)$$

де  $\omega_{hi}$  - власна частота моделі АР з поправкою на демпфування, відповідна  $i$ -тому піку СЦП.

Залежно від порядку моделі, підставляючи (1.6) або (1.7) формули (1.5) визначаються коефіцієнти АР. Нижче показано, що розраховані таким чином коефіцієнти АР можна використовувати для генерації імітаційних процесів АР із заданими характеристиками СЦП, а також для отримання поліпроцесів, що складаються з декількох процесів лінійного передбачення.

### 1.3 Алгоритм Левінсона-Дарбіна

Процеси АР можна характеризувати кінцевим числом значень функції, що визначається за кореляційною функцією процесу. Така функція має назву приватної автокореляційної функції. Її можна висловити через  $p$  коефіцієнтів АР, рівних останнім коефіцієнтам АР для порядків від одиниці до  $p$ . Значення приватної автокореляційної функції вважаються рівними

$$K[j] = \Phi[j, j], 1 \leq j \leq p. \quad (1.9)$$

Можна показати, що перші три значення приватної автокореляційної функції описуються виразами виду

$$K[1] = \Phi[1,1] = r[1],$$

$$K[2] = \Phi[2,2] = (r[2] - r^2[1]) / (1 - r^2[1]),$$

$$K[3] = \Phi[3,3] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & R[1] & R[1] \\ R[1] & 1 & R[2] \\ R[2] & R[2] & R[3] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & R[1] & R[2] \\ R[1] & 1 & R[1] \\ R[2] & R[1] & 1 \end{vmatrix}},$$

де перший індекс квадратних дужках вказує на порядок моделі, а другий індекс є номером коефіцієнта АР. Перевагою приватної автокореляційної функції (1.9) порівняно з автокореляційною функцією є її кінцева довжина. Вона може бути значно меншою за довжину кореляційної функції, але при цьому відображати практично всю інформацію про випадковий процес у рамках кореляційної теорії. Як показав Бартлетт, значення вибіркової приватної автокореляційної функції під час зсуву  $(p+1)$  можна вважати рівним нулю, якщо воно задовольняє нерівності  $\Phi[p+1, p+1] \leq 1/\sqrt{N}$ , де  $N$  - довжина реалізації, по якій проводилася оцінка значень функції кореляції. Таким чином проводиться оцінка порядку  $p$  моделі АР методом Бартлетта.

Н. Левінсоном [8] були запропоновані методи вирішення рівняння Юла – Уокера на основі теплицьових властивостей кореляційної матриці. Ці методи дозволяють рекурентно обчислювати коефіцієнти АР:

$$\Phi_n[n] = -\frac{R[n] + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{n-1}[i]R[n-i]}{\left(\sigma_{a,n-1}\right)^2}, \quad n = 2, \dots, p,$$

$$\Phi_n[i] = \Phi_{n-1}[i] + \Phi_n[n]\Phi_{n-1}[n-i], \quad \left(\sigma_{a,n}\right)^2 = \left(1 - \Phi_n^2[n]\right)\left(\sigma_{a,n-1}\right)^2,$$

з ініціацією

$$\Phi_1[1] = \frac{-R_1}{\left(\sigma_x\right)^2}, \quad \left(\sigma_{a,1}\right)^2 = \left(1 - \Phi_1^2[1]\right)\left(\sigma_x\right)^2,$$

де  $\sigma_x$  - СКО процесу,

$\sigma_{a,n}$  - СКО помилки передбачення для моделі АР  $n$ -го порядку.

Порядок моделі – нижній індекс у коефіцієнта АР.

#### 1.4 Модель ковзного середнього

Модель ковзного середнього (КС) була розроблена для аналізу тимчасових рядів з широкосмуговим спектром [8]. Модель КС описується різницеvim рівнянням

$$x[t] = -\sum_{i=1}^q Q[i]a[t-i] + a[t], \quad (1.8)$$

де  $Q[i]$  - коефіцієнти,

$q$  - порядок моделі КС.

Система нелінійних рівнянь до розрахунку коефіцієнтів КС представляється як

$$r[j] = \begin{cases} \frac{-Q[j] + Q[1]Q[j+1] + \dots + Q[q-j]Q[q]}{1 + \sum_{i=1}^q Q^2[i]}, & 1 \leq j \leq q, \\ 0, & j > q, \end{cases} \quad (1.9)$$

де  $r[j]$  - нормовані значення функції кореляції.

Якщо припустити, що коефіцієнти КС дорівнюють коефіцієнтам АР, то  $P_{CC}(f) = P_{AP}(f)^{-1}$ . Тоді частоти піків в спектрі АР будуть збігатися з частотами мінімумів в спектрі КС, а ширина смуги спектра АР за рівнем 0,5 буде відповідати ширині смуги мінімуму спектру КС. Такий зв'язок спектральних щільностей моделей КС і АР можна використовуватиме розрахунку коефіцієнтів КС за заданими характеристиками спектра [10]. Щоб обчислити коефіцієнти КС, необхідно встановити частоти мінімумів і ширину смуг мінімумів спектрів моделі КС і розрахувати корені характеристичного рівняння (1.4). Підставляючи знайдені таким способом коріння (1.5), обчислюють коефіцієнти АР і вважають їх рівними коефіцієнтам КС.

### 1.5 Модель авторегресії-ковзного середнього

Змішана модель АРКС є найповнішою моделлю лінійного передбачення стаціонарних випадкових процесів. Вона описується різницеvim рівнянням

$$x[t] = \sum_{i=1}^p \Phi[i]x[t-i] - \sum_{n=1}^q Q[n]a[t-n] + a[t]. \quad (1.10)$$

Модель АРКС процесів АР та КС дозволяє отримати параметричну модель деяких випадкових процесів з нижчим порядком, ніж за допомогою моделей АР або КС. Теорема розкладання, згідно з якою, будь-який стаціонарний

випадковий процес можна подати у вигляді суми детермінованої компоненти та процесу КС, що породжується білого шуму (БШ), була запропонована Х. Вольдом.

Для знаходження параметрів моделі використовується система рівнянь, яка зв'язує значення кореляційної функції процесу АРКС та невідомі параметри моделі. Помноживши ліву та праву частини (1.10) на  $x[t-j]$  та взявши математичне очікування, отримаємо рівняння для розрахунку параметрів моделі

$$R[j] = \Phi[1]R[j-1] + \Phi[2]R[j-2] + \dots + \Phi[p]R[j-p] + \dots + R_{xa}[j] - Q[1]R_{xa}[j-1] - \dots - Q[q]R_{xa}[j-q], \quad (1.11)$$

де  $R_{xa}[j]$  - взаємна кореляційна функція процесів  $x[t]$  і  $a[t]$ , рівна

$$R_{xa}[j] = E\{x[t-j]a[t]\}. \quad (1.12)$$

Відповідно до (1.12), взаємна кореляційна функція задовольняє співвідношенням

$$R_{xa}[j] = 0, \quad j > 0, \\ R_{xa}[j] \neq 0, \quad j \leq 0. \quad (1.13)$$

З урахуванням (1.11), з (1.13) випливає, що

$$R[j] = \Phi[1]R[j-1] + \Phi[2]R[j-2] + \dots + \Phi[p]R[j-p], \quad j \geq q+1,$$

або

$$r[j] = \Phi[1]r[j-1] + \Phi[2]r[j-2] + \dots + \Phi[p]r[j-p], j \geq q+1.$$

Вираз для дисперсії процесу АРКС можна знайти з (1.11), поклавши  $j = 0$

$$\begin{aligned} R[0] = & \Phi[1]R[1] + \Phi[2]R[2] + \dots + \Phi[p]R[p] - Q[1]R_{xa}[-1] - \\ & - Q[2]R_{xa}[-2] - \dots - Q[q]R_{xa}[-q] + D_a. \end{aligned}$$

Відповідно до огляду літератури, розвиток теорії моделей лінійного передбачення обмежалося змішаною моделлю АРКС, тобто. комбінацією моделей АР та КС. Інші комбінації, наприклад АР1АР2 або КС1КС2 не розглядалися. Однак складні випадкові процеси можуть бути сформовані внаслідок мультиплікативного або адитивного перетворення окремих випадкових процесів. Для аналізу таких процесів часто більш ефективно використовувати систему різницевих рівнянь, що описують різні складові складного процесу. Побудова таких складних моделей вимагає створення загальніших підходів до вирішення задачі лінійного передбачення. Вирішенню завдання синтезу моделей лінійного передбачення складових процесів присвячено кваліфікаційну роботу.

Використання моделей АР та КС для параметричного спектрального аналізу запропоновано об [11]. СЦП моделі АРКС визначається виразом [12, 13]

$$P(f) = \frac{\left| 1 - \sum_{n=1}^q Q[n] e^{-j2\pi fnT} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i] e^{-j2\pi fiT} \right|^2} D_a. \quad (1.14)$$

Спектр процесу АРКС містить вузькосмугові та широкосмугові максимуми. [8] показано, що використання параметричної оцінки спектрів має

у багатьох випадках переваги, порівняно з корелограмним або періодограмним методами оцінок СЦП. Це пов'язано з відсутністю бічних пелюсток у спектрі та високою спектральною роздільною здатністю при коротких реалізаціях. Параметричне спектральне оцінювання набуло широкого поширення та розвитку лише після робіт Д. Берга [14], який запропонував методи отримання високого спектрального дозволу для вибірок обмеженої довжини.

## 1.6 Висновки до розділу та постановка задачі

У кваліфікаційній роботі розглянуто можливості факторизації параметричної СЦП за моделлю авторегресії лінійного передбачення з багатомодовим спектром для вирішення задачі підвищення роздільної здатності спектра. Тут під факторизацією розуміється розкладання багатомодової СЦП більш прості одномодові складові. Факторизація дозволяє не тільки розкласти складну багатомодову СЦП на прості одномодові складові, але і більш точно проводити аналіз низькочастотних, середньочастотних та високочастотних СЦП. Останнє, наприклад, важливо для виявлення захворювань ритму серця щодо аналізу спектра ритмограм серця. Основну увагу приділено дослідженню завдання підвищення роздільної здатності оцінки СЦП методом Юла-Уокера та Берга шляхом її факторизації.

Спектральний аналіз умовно поділяють на два види: параметричний та непараметричний. До параметричних спектрів належать методи оцінювання СЦП, які вимагають попередньої оцінки стаціонарних параметрів моделі лінійного передбачення. Параметричні оцінки СЦП ґрунтуються на моделях: АР, КС, АРКС. Якщо для моделювання корисного сигналу або корелированої перешкоди погано підходять зазначені вище моделі, то точність їхньої параметричної оцінки СЦП невелика. В іншому випадку оцінка СЦП, розрахована за параметрами лінійного передбачення, має ряд переваг у порівнянні з непараметричними методами, що базуються на перетворенні Фур'є.

Серед моделей лінійного прогнозу найпопулярніша модель АР, т.к. вона має ряд характеристик, що спрощують її застосування у прикладних задачах. Модель АР, яка ефективно описує вузькосмугові випадкові процеси, може використовуватися також для вирішення задачі підвищення роздільної здатності при коротких реалізаціях. У цьому випадку висока роздільна здатність пов'язана з неявним застосуванням прогнозування кореляційної функції. Розроблена дослідниками факторизація СЦП дозволяє підвищити роздільну здатність спектра.

Проведений огляд наукової літератури на тему кваліфікаційної роботи дозволяє сформулювати такі завдання:

1. Сформулювати завдання спектрального аналізу процесів лінійного передбачення в статистичній радіотехніці для їх подальшого використання у задачі факторизації.
2. Обґрунтувати та навести приклади імітаційного моделювання випадкових сигналів із заданими характеристиками спектрів.
3. Встановити можливість факторизації мультиплікативної моделі авторегресії.
4. Провести імітаційні експерименти щодо підвищення роздільної здатності методом факторизації спектра.

## 2 МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПІДКАЗАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

### 2.1 Мономоделі та полімоделі лінійного передбачення

Розвиток непараметричного опису статистик другого порядку дозволило вирішити широке коло завдань статистичної радіофізики. Для вирішення деяких складних завдань статистичної радіофізики запропоновано параметричне опис статистик другого та вищих порядків випадкових сигналів та процесів. Важливе місце у статистичній радіофізиці займають класи процесів лінійного передбачення гаусових та негаусових випадкових процесів. Такі процеси отримують за допомогою формуючого фільтра з дробно-раціональною системною функцією, на вхід якої подається гауси або негауси білий шум.

Дослідження випадкових процесів, проведені в кваліфікаційній роботі, показують, що класичні та узагальнені моделі лінійного передбачення, що описуються одним формуючим лінійним фільтром, можуть бути розширені на довільне число формують фільтрів з дробно-раціональними системними функціями. У цьому випадку фільтри, що формують, можуть з'єднуватися каскадно (послідовно) або паралельно. Повна системна функція такого складового формуючого фільтра в першому випадку представляється (факторизується) добутком системних функцій, що складають фільтра, що формують, а в другому випадку сумою системних функцій.

У другому розділі кваліфікації розроблено теорію універсальної моделі, яка представляється мономоделями та полімоделями. Полімоделі складаються з мультиплікативних та адитивних моделей лінійного передбачення гаусових та негаусових процесів, що описуються системами різницевого рівнянь. Такі класи моделей запропоновано називати полімоделями лінійного передбачення. На відміну них мономоделі описують прості і складові процеси інтегрально, тобто. одним різницевою рівнянням лінійного передбачення.

У цьому розділі розглянуто принципи побудови мультиплікативної моделі  $APKC1 \times APCK2 \times \dots \times APCKk$ . Запропоновано різницеve рівняння для такої моделі у загальному вигляді, наведено рівняння моделі в операторному вигляді, знайдено ефективні рівняння для розрахунку параметрів моделі. Виведено вираз спектральної оцінки моделі  $APKC1 \times APCK2 \times \dots \times APCKk$ .

Також у цьому розділі розглянуто узагальнені мультиплікативні моделі  $UAPKC1 \times UAPKC2 \times \dots \times UAPKCs$  довільного рангу, а також комбіновані мультиплікативні моделі. Запропоновано методи подання помилок передбачення мультиплікативними моделями різних рангів. У розділі на численних прикладах показано принципи побудови різних комбінацій мультиплікативних полімоделей.

Класичні та узагальнені моделі лінійного передбачення описують одним різницеvim рівнянням прості та складові випадкові процеси. Тому такі моделі називатимемо мономоделями лінійного передбачення. Багато випадкових процесів, що досліджуються в статистичній радіотехніці, сформовані в результаті послідовного (мультиплікативного) або паралельного (адитивного) лінійного перетворення вхідного процесу. Узагальним поняття моделей лінійного передбачення такі процеси. У кваліфікації досліджувалися статистично пов'язані гаусові та негаусові процеси лінійного передбачення, отримані за допомогою набору послідовно або паралельно включених формують фільтрів. Як породжувальний процес використовувався гауси або негауси білий шум. Такі моделі лінійного передбачення, що описуються набором різницеvих рівнянь, називатимемо полімоделями лінійного передбачення. Мультиплікативні та адитивні моделі лінійного передбачення є класами полімоделей. Як показує аналіз наукової літератури, ці класи моделей ще розроблялися. Нижче буде розглянуто полімоделі лінійного передбачення, для яких знайдено рівняння для розрахунку параметрів моделей. Параметри мультиплікативних та адитивних моделей лінійного передбачення можуть розраховуватися за класичними або узагальненими моделями.

Моделі лінійного передбачення, які представляються комбінацією мультиплікативної та адитивної складовими, називатимемо адитивно-мультиплікативними моделями. Мультиплікативні, адитивні та адитивно-мультиплікативні моделі, які представлені одним класом моделей (авторегресії, ковзного середнього, авторегресії - ковзного середнього), будемо називати приєднаними моделями лінійного передбачення. Якщо ж мультиплікативні, адитивні та адитивно - мультиплікативні моделі представлені різними класами моделей, тобто. їх комбінацією, то такі моделі називатимемо комбінованими моделями лінійного передбачення.

На рис. 2.1 показано структуру запропонованої універсальної моделі лінійного передбачення. Вона складається з мономоделей та полімоделей лінійного передбачення. Мономоделі включають класичні та узагальнені моделі. Полімоделі представлені мультиплікативними та адитивними моделями. Мультиплікативні та адитивні моделі, у свою чергу, поділяються на приєднані та комбіновані моделі. Запропонована структура універсальної моделі дозволяє систематизувати можливі варіанти побудови моделей. Синтезовані полімоделі складаються з таких класів мономоделей: АР, КС, АРКС, АРПКС, УАР, ОКС і УАРКС чи його комбінацій.

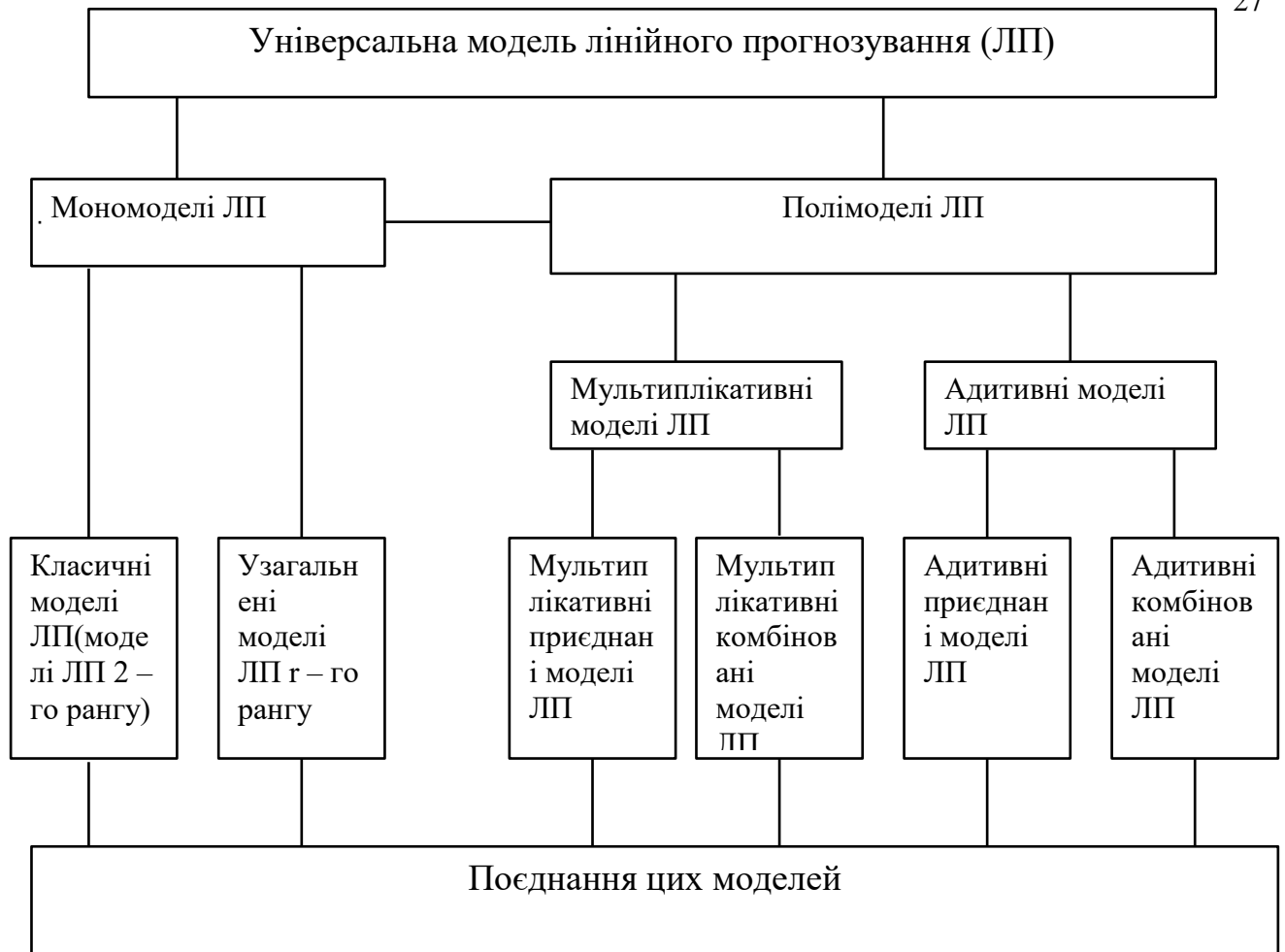


Рисунок 2.1 - Загальна структура універсальної моделі лінійного передбачення

Полімоделі можуть використовуватись для вирішення двох класів завдань. До першого класу відносяться завдання синтезу складових моделей складного випадкового процесу, отриманого в результаті послідовного перетворення вхідного процесу, або підсумовування декількох процесів. Отже, у разі потрібно знайти параметри простих систем, знаючи параметри виходу системи. До другого класу належить завдання уявлення складної моделі випадкового процесу з багатомодовим спектром сукупністю простіших моделей з одномодовими спектрами. Таке уявлення дозволяє отримати точніший опис складного радіофізичного процесу. Відмінність цих підходів у тому, що у першому випадку складний процес було фізично отримано послідовним чи паралельним багаторазовим перетворенням вхідного процесу,

Процеси, що описуються полімоделями лінійного передбачення, виходять, якщо на вхід складеного формуючого фільтра подається гауси або негауси

білий шум. Виходом є корельовані випадкові чи процеси зі статистичними зв'язками вищих порядків. Параметри складових фільтрів результуючого формуючого фільтра мультиплікативних і адитивних моделей лінійного передбачення можуть розраховуватися за класичними або узагальненими моделями. Для опису негаусових процесів використовуються статистики як другого порядку, а й статистики вищих порядків.

## 2.2 Мультиплікативні моделі АРКС другого рангу

Розглянемо гаусові та негаусові процеси, які виходять в результаті послідовного перетворення декількома фільтрами породжувального процесу [15]. Якщо для таких процесів вибрати як породжувальний процес гауси або негауси БШ і вважати, що фільтри лінійні і мають раціональну передатну функцію, то вони описуються моделями лінійного передбачення. Схема формуючого фільтрів таких процесів представлена рис. 2.2.

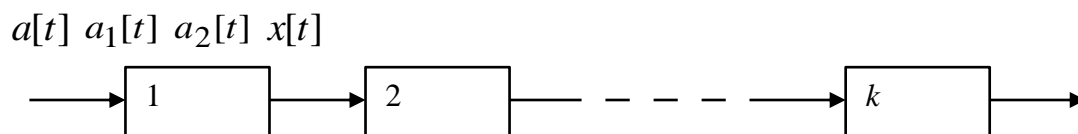


Рисунок 2.2 - Блок-схема формувача мультиплікативного процесу лінійного передбачення. 1, 2, ..., k – лінійні фільтри з раціональною системною функцією  $H(z)$

Формуючі фільтри 1, 2, ..., k представлені на рис. 2.2 можуть бути формуючими фільтрами АР, КС або АРКС. Параметри цих фільтрів задаються або, виходячи з форми спектра вихідного процесу  $x[t]$ , або обчислюються заздалегідь як вибірккові значення реального процесу, що моделюється. На рис.

2.2  $a[t]$  - породжує процес типу білого шуму. Процеси  $a_i[t]$  є виходами фільтрів, за винятком останнього, для якого введено позначення  $x[t] = a_k[t] \cdot$

Вони належать до класу корельованих випадкових процесів.  $a[t]$  і  $a_i[t]$  є породжувальними процесами складових моделей загальної мультиплікативної моделі і тому позначені однією й тією ж літерою [16].

У випадках, коли гаусів чи негаусов процес досить описувати з допомогою статистик другого порядку, тобто. в рамках кореляційної теорії можна використовувати модель  $АРКС1 \times АРКС2 \times \dots \times АРКСk$ . Для такої моделі ранг дорівнює двом. Мультиплікативна модель у загальному випадку описується системою різницевих рівнянь [17]:

$$\begin{aligned}
 a_1[t] &= \sum_{i=1}^{p_1} \Phi_1[i]a_1[t-i] - \sum_{n=1}^{q_1} Q_1[n]a_1[t-n] + a_1[t] \\
 a_2[t] &= \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i]a_2[t-i] - \sum_{n=1}^{q_2} Q_2[n]a_1[t-n] + a_1[t] \\
 &\vdots \\
 a_{k-1}[t] &= \sum_{i=1}^{p_{k-1}} \Phi_{k-1}[i]a_{k-1}[t-i] - \sum_{n=1}^{q_{k-1}} Q_{k-1}[n]a_{k-2}[n] + a_{k-2}[t] \\
 x[t] &= \sum_{i=1}^{p_k} \Phi_k[i]x[t-i] - \sum_{n=1}^{q_k} Q_k[n]a_{k-1}[t-n] + a_{k-1}[t]
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

де нижній індекс коефіцієнтів та порядків моделі позначає номер моделі.

Зазначимо деякі характерні риси мультиплікативної полімоделі. З рівнянь (2.1) видно, що проміжні процеси  $a_1[t]$ ,  $a_2[t]$ , ...,  $a_{k-1}[t]$  не є помилками передбачення складових моделей. Ці процеси неможливо отримати, доки знайдено параметри складових моделей. Вони є корельованими залишками передбачення відповідних складових моделей. Підкреслимо, що окремі рівняння системи не є моделями лінійного передбачення у загальноприйнятому розумінні, тому вони не мають помилок передбачення і тому не дають змоги знайти рівняння для розрахунку параметрів моделі. Але система різницевих

рівнянь має всі властивості моделі лінійного передбачення. Як показано нижче, мультиплікативна модель нелінійна щодо своїх коефіцієнтів. Тому система лінійних рівнянь для розрахунку параметрів моделі нелінійна щодо невідомих параметрів і може бути вирішена комбінацією аналітичного та чисельного методів.

Рівняння для розрахунку параметрів моделі можна отримати, якщо з різницевого рівняння виключити всі проміжні процеси-залишки передбачення. Для цього необхідно перш за все вибрати порядки складових моделей. Порядок вибирається з апіорної інформації про складові підсистем повної системи формуючого фільтра мультиплікативної моделі. Наприклад, якщо підсистема формує один пік у СЦП процесу, то в залежності від положення піку на осі частот порядок буде, як правило,  $p_n = 1$  або  $p_n = 2$ . Якщо підсистема формує двомодову СЦП, але порядок відповідної моделі може бути  $p_n = 3$  або  $p_n = 4$ . Залежно від умов або вимог до завдання моделювання можна вибрати необхідний порядок моделі. У розділі 5 розглянуто завдання розкладання багатомодового СЦП на одномодові складові. І тут порядок вибирався рівним  $p_n = 1$  або  $p_n = 2$ .

Введемо оператори АР і КС, щоб подати в операторному вигляді різниці рівняння (1.1) та (1.8):

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i]z^{-i},$$

$$Q(z) = 1 - \sum_{n=1}^q Q[n]z^{-n},$$

де дія оператора зсуву  $z^{-k}$  визначається виразом

$$z^{-k} x[t] = x[t - k].$$

Вирази для системних функцій АР і КС впливають із формул (1.1) та (1.8)

$$H_{AP}(z) = \Phi^{-1}(z) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i]z^{-i}\right)^{-1} . \quad (2.2)$$

$$H_{CC}(z) = Q(z) = 1 - \sum_{n=1}^q Q[n]z^{-n} . \quad (2.3)$$

Добуток системних функцій моделей АР і КС складають системну функцію моделі АРКС

$$H(z) = H_{CC}(z)H_{AP}(z) = \frac{1 - \sum_{n=1}^q Q[n]z^{-n}}{1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i]z^{-i}} . \quad (2.4)$$

Система рівнянь (2.1) для моделі АРКС<sub>1</sub> × АРКС<sub>2</sub> × ... × АРКС<sub>к</sub> записується в операторному вигляді

$$x[t] = H_1(z)H_2(z)...H_k(z)a[t] = H(z)a[t] . \quad (2.5)$$

Частотна характеристика фільтра, що складається з касадно-з'єднаних фільтрів, описується частотною характеристикою [15]

$$H(f) = H_1(f)H_2(f)...H_k(f) . \quad (2.6)$$

Умова стаціонарності моделі  $АРКС1 \times АРКС2 \times \dots \times АРКСk$ , виконується, коли коріння характеристичних рівнянь лежить усередині одиничного кола на комплексній площині

$$\begin{aligned}
 c^{p_1} - \Phi_1[1]c^{p_1-1} - \dots - \Phi_1[p_1] &= 0, \\
 c^{p_2} - \Phi_2[1]c^{p_2-1} - \dots - \Phi_2[p_2] &= 0, \\
 &\vdots \\
 c^{p_k} - \Phi_k[1]c^{p_k-1} - \dots - \Phi_k[p_k] &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.7a}$$

Модель  $АРКС1 \times АРКС2 \times \dots \times АРКСk$  оборотна, якщо коріння характеристичних рівнянь

$$\begin{aligned}
 c^{q_1} - Q_1[1]c^{q_1-1} - \dots - Q_1[q_1] &= 0, \\
 c^{q_2} - Q_2[1]c^{q_2-1} - \dots - Q_2[q_2] &= 0, \\
 &\vdots \\
 c^{q_k} - Q_k[1]c^{q_k-1} - \dots - Q_k[q_k] &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.7б}$$

лежать усередині одиничного кола на комплексній площині.

Для моделі  $АРКС1 \times АРКС2 \times \dots \times АРКСk$  умова оптимальності полягає в некорельованості помилок передбачення  $a[t]$

$$E\{a[t]a[t-j]\} = 0, j \neq 0, j > 0.$$

Знайдемо вираз для параметричної оцінки МПМ мультиплікативної моделі. З (2.6) випливає, що СЩП сигналу каскадно включених фільтрах послідовно перетворюється квадратами АЧХ. З урахуванням того, що входом системи є БШ з рівномірною СЩП, справедливий вираз

$$P(\omega) = |H(\omega)|^2 D_a = |H_1(\omega)|^2 |H_2(\omega)|^2 \dots |H_k(\omega)|^2 D_a.$$

При значній кількості рівнів квантування дискретного сигналу фільтри коммутативні [15]. Щоб знайти  $|H_v(\omega)|^2$  необхідно в (2.4) зробити заміну  $z = e^{j2\pi fT}$  і звести у квадрат

$$|H_v(\omega)|^2 = \frac{\left| 1 - \sum_{n=1}^{q_v} Q_v[n] e^{-j\omega nT} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^{p_v} \Phi_v[i] e^{-j\omega iT} \right|^2}. \quad (2.8)$$

Формуючий фільтр мультиплікативної моделі може складатися з різних каскадно-з'єднаних комбінацій фільтрів, що описуються моделями АР, КС і АРКС. Амплітудно-частотна характеристика лінійної системи, що складається з  $k$  каскадно-з'єднаних фільтрів, що розглядалася в [16]. Запишемо вираз для оцінки спектра моделі  $АРКС1 \times АРКС2 \times \dots \times АРКСk$

$$P(\omega) = \frac{\left| \sum_{n=0}^{q_1} Q_1[n] e^{-j\omega n T} \right|^2 \left| \sum_{n=0}^{q_2} Q_2[n] e^{-j\omega n T} \right|^2 \times \dots \times \left| \sum_{n=0}^{q_k} Q_k[n] e^{-j\omega n T} \right|^2}{\left| \sum_{i=0}^{p_1} \Phi_1[i] e^{-j\omega i T} \right|^2 \left| \sum_{i=0}^{p_2} \Phi_2[i] e^{-j\omega i T} \right|^2 \times \dots \times \left| \sum_{i=0}^{p_k} \Phi_k[i] e^{-j\omega i T} \right|^2} D_a. \quad (2.9)$$

Покажемо, що мультиплікативним є добре відомий процес АРКС. Тобто вихідний процес може бути отриманий послідовним перетворенням БШ, що породжує  $a[t]$  широкосмуговим фільтром КС, вихід якого перетворюється вузькосмуговим АР фільтром.

Рівняння моделі АРКС можна представити як системи двох рівнянь, наступних з (2.9):

$$a_1[t] = - \sum_{n=1}^q Q[n] a[t-n] + a[t],$$

$$x[t] = - \sum_{i=1}^p \Phi[i] x[t-i] + a_1[t].$$

Спектр мультиплікативного процесу АРКС оцінюється за відомою формулою (1.14), яка є окремим випадком (2.9). З виразу (2.9) випливають формули параметричних спектральних оцінок мультиплікативної моделі, що складається з приєднаних моделей АРКС [16]. Наприклад, для мультиплікативної моделі АРКС1  $\times$  АРКС2 вираз (2.9) набуває вигляду

$$P(f) = \frac{\left| 1 - \sum_{n=1}^{q_1} Q_1[n] e^{-j2\pi f n T} \right|^2 \left| 1 - \sum_{n=1}^{q_2} Q_2[n] e^{-j2\pi f n T} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^{p_1} \Phi_1[i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2 \left| 1 - \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2} D_a.$$

### 3 МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ МОДЕЛІ АР

#### 3.1 Мультиплікативні моделі АР другого порядку

Для довільного числа моделей АР, що становлять мультиплікативну модель лінійного передбачення  $AP_1 \times AP_2 \times \dots \times AP_k$ , вираз (2.5) є твором  $k$  системних функцій АР

$$x[t] = \Phi_k^{-1}(z)\Phi_{k-1}^{-1}(z)\dots\Phi_1^{-1}(z)a[t]. \quad (3.1)$$

Представивши це рівняння у вигляді

$$\Phi_k(z)\Phi_{k-1}(z)\dots\Phi_1(z)x[t] = a[t], \quad (3.2)$$

отримаємо систему рівнянь до розрахунку коефіцієнтів АР. Помножимо ліву та праву частини (3.2) на  $x[t-j]$  та середнім. Враховуючи умову оптимальності, отримаємо

$$\Phi_k(z)\Phi_{k-1}(z)\dots\Phi_1(z)R[j] = 0.$$

Ефективний спосіб розв'язання цього рівняння продемонстровано на прикладах, наведених нижче.

Зупинимося на прикладах побудови мультиплікативних моделей АР. Розглянемо найпростіший мультиплікативний процес  $AR1 \times AR2$ , що складається із приєднаних моделей АР. Такі моделі корисні, коли вихідний процес отримано в результаті послідовного перетворення БШ двома вузькосмуговими АР-формульними фільтрами. Використовуючи (2.1), різницеве рівняння моделі  $AR1 \times AR2$  запишемо у вигляді

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i]x[t-i] + \sum_{n=1}^{p_1} \Phi_1[n]a_1[t-n] + a[t]. \quad (3.3)$$

Для цієї моделі рівняння (3.2) виражається через системні функції наступним чином

$$\Phi_2(z)\Phi_1(z)x[t] = a[t]. \quad (3.4)$$

З (3.4) випливає різницеве рівняння моделі  $AR1 \times AR2$

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i]x[t-i] + \sum_{n=1}^{p_1} \Phi_1[n]x[t-n] - \sum_{i=1}^{p_2} \sum_{n=1}^{p_1} \Phi_2[i]\Phi_1[n]x[t-i-n] + a[t]. \quad (3.5)$$

Умови оптимальності мультиплікативної моделі  $AR1 \times AR2$  полягає у статистичній незалежності  $a[t]$ . У разі моделі  $AR1 \times AR2$  другого рангу помилки  $a[t]$  некорельовані

$$E\{a[t]a[t-j]\} = 0, j > 0.$$

Покажемо, що умова оптимальності дозволяє отримати систему рівнянь для розрахунку коефіцієнтів мультиплікативної АР моделі  $AR1 \times AR2$ .

Помноживши праву та ліву частини рівняння (3.4) на  $x[t-j]$  і усереднивши, отримаємо

$$\Phi_2(z)\Phi_1(z)R[j] = 0. \quad (3.6)$$

При виведенні (3.6) використано властивість оптимальності моделі. Рівняння (3.6) зручно перетворити на вигляд

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i]z^{-i}\right) \left(1 - \sum_{n=1}^{p_1} \Phi_1[n]z^{-n}\right) R[j] = 0. \quad (3.7)$$

Подіявши операторами зсуву на  $R[j]$  отримаємо рівняння для розрахунку параметрів моделі  $AR1 \times AR2$

$$R[j] = \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i]R[j-i] + \sum_{n=1}^{p_1} \Phi_1[n]R[j-n] - \sum_{i=1}^{p_2} \sum_{n=1}^{p_1} \Phi_2[i]\Phi_1[n]R[j-i-n]. \quad (3.8)$$

Вираз (3.8) є загальним випадком рівняння Юла-Уокера. Цей вислів зводиться до рівняння Юла-Уокера при  $p_2 = 0$ .

Параметричну спектральну оцінку моделі  $AR1 \times AR2$  отримують з (2.9)

$$P(f) = \frac{D_a}{\left| 1 - \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i] e^{-j2\pi f iT} \right|^2 \left| 1 - \sum_{n=1}^{p_1} \Phi_1[n] e^{-j2\pi f nT} \right|^2}. \quad (3.9)$$

Розглянемо приклад побудови мультиплікативної моделі  $AP1(1) \times AP2(1)$ .  
З (3.8) після перетворень отримаємо рекурентне рівняння

$$R[j] = (\Phi_1[1] + \Phi_2[1])R[j-1] - (\Phi_1[1]\Phi_2[1])R[j-2], \quad (3.10)$$

або

$$R[j] = \Phi[1]R[j-1] + \Phi[2]R[j-2]. \quad (3.11)$$

(3.11) введено позначення

$$\Phi[1] = \Phi_1[1] + \Phi_2[1],$$

$$\Phi[2] = -\Phi_1[1]\Phi_2[1].$$

При  $j = 1, 2$ , (3.10) маємо систему нелінійних рівнянь для розрахунку параметрів  $\Phi_1[1]$  і  $\Phi_2[1]$

$$R[1] = (\Phi_1[1] + \Phi_2[1])R[0] - \Phi_1[1]\Phi_2[1]R[1], \quad (3.12)$$

$$R[2] = (\Phi_1[1] + \Phi_2[1])R[1] - \Phi_1[1]\Phi_2[1]R[0].$$

Зауважимо, що рівняння (3.10) зручно записати у матричному вигляді

$$\vec{R} = R\vec{\Phi}, \quad (3.13)$$

де

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R[1] \\ R[2] \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R[0] & R[1] \\ R[1] & R[0] \end{bmatrix},$$

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1[1] + \Phi_2[1] \\ -\Phi_1[1]\Phi_2[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi[1] \\ \Phi[2] \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Рішення рівняння (3.13) одержують у два етапи. Спочатку вирішують матричне рівняння (3.13)

$$\vec{\Phi} = R^{-1}\vec{R}, \quad (3.15)$$

і знаходять  $\Phi[1]$  і  $\Phi[2]$ . Потім вирішують систему нелінійних рівнянь, яку одержують (3.14)

$$\Phi[1] = \Phi_1[1] + \Phi_2[1],$$

$$\Phi[2] = -\Phi_1[1]\Phi_2[1],$$

і знаходять  $\Phi_1[1]$  і  $\Phi_2[1]$ . Зауважимо, що при  $\Phi_2[1] = 0$ , з (3.12) маємо

$$R[1] = \Phi_1[1]R[0],$$

$$R[2] = \Phi_1[1]R[1],$$

або у загальному вигляді  $R[j] = \Phi_1[1]R[j-1]$ . Це відоме рівняння Юла-Уокера першого порядку моделі АР. Т.о. класична модель АР є окремим випадком запропонованої нами мультиплікативної моделі  $AR1 \times AR2$ .

Розглянемо модель  $AR1(1) \times AR2(2)$ . З (3.8) маємо

$$R[k] = (\Phi_2[1] + \Phi_1[1])R[k-1] + (\Phi_2[2] - \Phi_2[1]\Phi_1[1])R[k-2] - \Phi_2[2]\Phi_1[1]R[k-3], \quad (3.16)$$

яке можна записати у вигляді

$$R[k] = \Phi[1]R[k-1] + \Phi[2]R[k-2] - \Phi[3]R[k-3]. \quad (3.17)$$

Цей рекурентний вираз дозволяє спочатку знайти коефіцієнти при  $R[k-1]$ ,  $R[k-2]$  і  $R[k-3]$ , а потім, вирішивши систему нелінійних рівнянь, обчислити  $\Phi_1[1]$ ,  $\Phi_2[1]$  і  $\Phi_2[2]$ . При  $\Phi_1[1] = 0$ , отримуємо рівняння Юла-Уокера для моделі АР другого порядку.

Зауважимо, що рівняння (3.16) можна записати у матричному вигляді (3.13), у якому

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R[1] \\ R[2] \\ R[3] \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R[0] & R[1] & R[2] \\ R[1] & R[0] & R[1] \\ R[2] & R[1] & R[0] \end{bmatrix},$$

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_2[1] + \Phi_1[1] \\ \Phi_2[2] - \Phi_2[1]\Phi_1[1] \\ -\Phi_2[2]\Phi_1[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi[1] \\ \Phi[2] \\ \Phi[3] \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Тоді рішення можна подати у вигляді (3.15). Обчисливши коефіцієнти  $\Phi[1]$ ,  $\Phi[2]$ ,  $\Phi[3]$ , розраховують коефіцієнти АР складових моделей, використовуючи матричне рівняння (3.18).

### 3.2 Мультиплікативні моделі АР третього порядку

Розглянемо мультиплікативну модель  $AR1 \times AR2 \times AR3$ . Різницеве рівняння моделі  $AR1 \times AR2 \times AR3$  використовуючи (2.1), запишемо у вигляді

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]x[t-i] + \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n]a_2[t-n] + \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_1[u]a_1[t-u] + a[t]. \quad (3.19)$$

Мультиплікативна модель  $AR1 \times AR2 \times AR3$  можна виразити через системні функції наступним чином

$$\Phi_3(z)\Phi_2(z)\Phi_1(z)x[t] = a[t]. \quad (3.20)$$

Використовуючи (3.20), різницеве рівняння моделі  $AP1 \times AP2 \times AP3$  можна також у вигляді

$$\begin{aligned}
 x[t] = & \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]x[t-i] + \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n]x[t-n] + \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_1[u]x[t-u] - \sum_{i=1}^{p_3} \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_3[i]\Phi_2[n]x[t-i-n] - \\
 & - \sum_{i=1}^{p_3} \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_3[i]\Phi_1[u]x[t-i-u] - \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_2[n]\Phi_1[u]x[t-n-u] + \\
 & + a[t].
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Домноживши праву та ліву частину (3.20) на  $x[t-j]$  і усереднивши, отримаємо в операторній формі рівняння для розрахунку параметрів моделі

$$\Phi_3(z)\Phi_2(z)\Phi_1(z)R[j] = 0.$$

Якщо вплинути операторами авторегресії на  $R[j]$ , отримаємо рівняння для розрахунку параметрів моделі  $AP1 \times AP2 \times AP3$ . Це ж рівняння можна отримати, помноживши праву та ліву частину (3.21) на  $x[t-j]$  і усереднивши,

$$R[j] = \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]R[j-i] + \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n]R[j-n] + \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_1[u]R[j-u] - \sum_{i=1}^{p_3} \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_3[i]\Phi_2[n]R[j-i-n] -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{p_3} \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_3[i] \Phi_1[u] R[j-i-u] - \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_2[n] \Phi_1[u] R[j-n-u] + \\
& + \sum_{i=1}^{p_3} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_3[i] \Phi_2[n] \Phi_1[u] R[j-i-n-u].
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

Вираз для параметричної спектральної оцінки моделі  $AP1 \times AP2 \times AP3$ , згідно (2.9), має вигляд

$$P(f) = \frac{D_a}{\left| 1 - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i] e^{-j2\pi f iT} \right|^2 \left| 1 - \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n] e^{-j2\pi f nT} \right|^2 \left| 1 - \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_1[u] e^{-j2\pi f uT} \right|^2}.$$

Як приклад розглянемо мультиплікативну модель  $AP1(2) \times AP2(1) \times AP3(1)$ . Різницеве рівняння моделі записується у вигляді

$$x[t] = \Phi_3[1]x[t-1] + \Phi_2[1]a_2(t-1) + \Phi_1[1]a_1[t-1] + \Phi_1[2]a_1[t-2] + a[t]. \tag{3.23}$$

З (3.22) отримуємо рівняння для розрахунку параметрів моделі

$$\begin{aligned}
R[j] = & (\Phi_1[1] + \Phi_2[1] + \Phi_3[1])R[j-1] + (\Phi_1[2] - \Phi_1[1]\Phi_2[1] - \Phi_1[1]\Phi_3[1] - \\
& - \Phi_2[1]\Phi_3[1])R[j-2] + (\Phi_1[2]\Phi_3[1] - \Phi_1[2]\Phi_2[1] + \Phi_1[1]\Phi_2[1]\Phi_3[1])R[j-3] + \\
& + \Phi_1[2]\Phi_2[1]\Phi_3[1]R[j-4].
\end{aligned}
\tag{3.24}$$

Рівняння до розрахунку параметрів моделі  $AP1(2) \times AP2(1) \times AP3(1)$  можна також подати в матричному вигляді (3.13), де

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R[1] \\ R[2] \\ R[3] \\ R[4] \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R[0] & R[1] & R[2] & R[3] \\ R[1] & R[0] & R[1] & R[2] \\ R[2] & R[1] & R[0] & R[1] \\ R[3] & R[2] & R[1] & R[0] \end{bmatrix},$$

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1[1] + \Phi_2[1] + \Phi_3[1] \\ \Phi_1[2] - \Phi_1[1]\Phi_2[1] - \Phi_1[1]\Phi_3[1] - \Phi_2[1]\Phi_3[1] \\ \Phi_1[2]\Phi_3[1] - \Phi_1[2]\Phi_2[1] + \Phi_1[1]\Phi_2[1]\Phi_3[1] \\ \Phi_1[2]\Phi_2[1]\Phi_3[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi[1] \\ \Phi[2] \\ \Phi[3] \\ \Phi[4] \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Вектор невідомих коефіцієнтів  $\vec{\Phi}$  перебуває з використанням рішення (3.15). Невідомі коефіцієнти AP складових мультиплікативної моделі знаходять із системи нелінійних рівнянь (3.25).

### 3.3 Мультиплікативні моделі AP четвертого порядку

Розглянемо мультиплікативну модель  $AP1 \times AP2 \times AP3 \times AP4$ . Мультиплікативна модель  $AP1 \times AP2 \times AP3 \times AP4$  описується різницеvim рівнянням

$$x[t] = \Phi_4[z]x[t] + \Phi_3[z]a_3(t) + \Phi_2[z]a_2[t] + \Phi_1[z]a_1[t] + a[t].$$

В операторному вигляді модель  $AP1 \times AP2 \times AP3 \times AP4$  має вигляд

$$\Phi_4(z)\Phi_3(z)\Phi_2(z)\Phi_1(z)x[t] = a[t]. \quad (3.26)$$

Після дії операторами АР, (3.26) отримуємо рівняння АР

$$\begin{aligned} x[t] = & - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_1[i]\Phi_2[n]\Phi_3[u]\Phi_4[v]x[t-i-n-u-v] + \\ & + \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_1[i]\Phi_2[n]\Phi_3[u]x[t-i-n-u] + \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_1[i]\Phi_2[n]\Phi_4[v]x[t-i-n-v] + \\ & + \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_1[i]\Phi_3[u]\Phi_4[v]x[t-i-u-v] + \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_2[n]\Phi_3[u]\Phi_4[v] \times x[t-n-u-v] - \\ & - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_1[i]\Phi_2[n]x[t-i-n] - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_1[i]\Phi_3[u]x[t-i-u] - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_1[i]\Phi_4[v]x[t-i-v] - \\ & - \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_2[n]\Phi_3[u]x[t-n-u] - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_1[i]\Phi_4[v]x[t-i-v] - \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_3[u]\Phi_4[v]x[t-u-v] + \\ & + \sum_{i=1}^{p_1} \Phi_1[i]x[t-i] + \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n]x[t-n] + \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_3[u]x[t-u] + \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_4[v]x[t-v] + a[t]. \end{aligned}$$

Для отримання рівняння для розрахунку параметрів моделі помножимо це рівняння на  $x[t-j]$  та середнім. Необхідне рівняння можна отримати також,

якщо вплинути на (3.24) оператором  $(1 - \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_4[v]z^{-v})$

$$\begin{aligned} & (1 - \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_4[v]z^{-v})(-R[j] + \sum_{i=1}^{p_1} \Phi_1[i]R[j-i] + \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n]R[j-n] + \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_3[u]R[j-u] - \\ & - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_1[i]\Phi_2[n]R[j-i-n] - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_1[i]\Phi_3[u]R[j-i-u] - \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_2[n]\Phi_3[u]R[j-n-u] + \\ & + \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_1[i]\Phi_2[n]\Phi_3[u]R[j-i-n-u]) = 0. \end{aligned}$$

Після перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}
R[j] = & - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_1[i] \Phi_2[n] \Phi_3[u] \Phi_4[v] R[j-i-n-u-v] + \\
& + \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_1[i] \Phi_2[n] \Phi_3[u] R[j-i-n-u] + \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_1[i] \Phi_2[n] \Phi_4[v] R[j-i-n-v] + \\
& + \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_1[i] \Phi_3[u] \Phi_4[v] R[j-i-u-v] + \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_2[n] \Phi_3[u] \Phi_4[v] \times \\
& \times R[j-n-u-v] - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_1[i] \Phi_2[n] R[j-i-n] - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_1[i] \Phi_3[u] R[j-i-u] - \\
& - \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_1[i] \Phi_4[v] R[j-i-v] - \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_2[n] \Phi_3[u] R[j-n-u] - \sum_{n=1}^{p_2} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_2[n] \Phi_4[v] R[j-n-v] - \\
& - \sum_{u=1}^{p_3} \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_3[u] \Phi_4[v] R[j-u-v] + \sum_{i=1}^{p_1} \Phi_1[i] R[j-i] + \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n] R[j-n] + \sum_{u=1}^{p_3} \Phi_3[u] R[j-u] + \\
& + \sum_{v=1}^{p_4} \Phi_4[v] R[j-v].
\end{aligned}$$

Рішення цього рівняння одержують описаним вище способом. Вираз для оцінки СЦП моделі  $AP1 \times AP2 \times AP3 \times AP4$  має вигляд

$$\begin{aligned}
P(f) = & \frac{D_a}{\left| 1 - \sum_{i=1}^{p_4} \Phi_4[i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2 \left| 1 - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[k] e^{-j2\pi f k T} \right|^2 \left| 1 - \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n] e^{-j2\pi f n T} \right|^2} \\
& \cdot \frac{1}{\left| 1 - \sum_{u=1}^{p_1} \Phi_1[u] e^{-j2\pi f u T} \right|^2}.
\end{aligned}$$

## 4 ЗАСТОСУВАННЯ ФАКТОРИЗАЦІЇ ДЛЯ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕННЯ ДОЗВІЛЬНОЇ ЗДІБНОСТІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОЦІНКИ СЦП

### 4.1 Основи синтезу моделі АР

Модель АР раціонально використовуватиме вузькосмугові випадкові процеси. В основу моделі АР покладено кореляцію відліку випадкового процесу в даний час з деяким кінцевим або нескінченним числом відліків в попередні моменти часу. Кореляційні зв'язки дозволяють регресію поточного відліку на попередні відліки. Такий вид регресії називається авторегресією. Вважатимемо, що корельований стаціонарний випадковий процес  $x[t]$  має нульовий середній. У рівнянні АР поточний відлік є виваженою сумою попередніх відліків з деякими коефіцієнтами ваги

$$x[t] = \sum_{j=1}^p \Phi[p, j]x[t-j] + a[t], \quad (4.1)$$

де  $\Phi[p, j]$  - коефіцієнти АР,

$a[t]$  – помилка передбачення, що є некорельованими випадковими відліками,

$p$  - порядок моделі АР.

Перший індекс у коефіцієнтів АР свідчить про порядок моделі. Модель (4.1) оптимальна, якщо

$$E\{a[t]a[t-i]\} = 0,$$

$$i > 0,$$

де  $E\{\}$  - позначає статистичне усереднення.

Умова оптимальності дозволяє отримати рівняння та визначити критерії для оцінки параметрів моделі – коефіцієнтів АР та порядку моделі.

Рівняння для розрахунку оптимальних оцінок коефіцієнтів АР отримують з (4.1) і зветься рівнянь Юла-Уокера

$$R[i] - \sum_{j=1}^p \Phi[p, j] R[j-i] = 0, \\ i = 1, \dots, p. \quad (4.2)$$

Метод оцінювання зветься незміщеною оцінкою Юла-Уокера якщо в (4.2) використовуються незміщені оцінки кореляційної функції. Параметрична СЦП АР процесу, у випадку багатомодова, описується виразом [8]

$$P(f) = \frac{D_a}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[p, i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2}. \quad (4.3)$$

Як очевидно з формули (4.3), лише кілька параметрів моделі АР несуть повну інформацію про СЦП випадкового процесу.

#### 4.2 Метод факторизації СЦП

Факторизація СЦП дозволяє подати багатомодову СЦП, що описується формулою (4.3), більш простими, зокрема одномодовими СЦП. Щоб показати можливість розкладання багатомодового параметричного спектру більш прості одномодові складові, припускаємо, що модель АР представна мультиплікативною моделлю АР, тобто. описується моделлю виду  $AR_1 \times AR_2 \times \dots \times AR_k$  [18]. Параметри складових моделей  $AR_i$  легко обчислюються за корінням характеристичного рівняння моделі АР

$$c^p - \Phi[p,1]c^{p-1} - \dots - \Phi[p,p] = \prod_{i=1}^p (c - c[p,i]) = 0, \quad (4.4)$$

де невідомі  $c[p,i]$  є корінням характеристичного алгебраїчного рівняння, яке легко вирішується в загальному випадку чисельними методами. У (4.4) перший індекс у коренів рівняння  $c[p,i]$  вказує порядок вихідної моделі АР.

Розглянемо різноманітні варіанти можливих рішень (4.4). Для простоти спочатку розглянемо випадок, коли коріння комплексно пов'язане. Зауважимо, що комплексне коріння характеристичного рівняння (4.4) попарно комплексно пов'язане, т.к. ліворуч маємо дійсне рівняння. За наявності цього коріння легко знайти відповідні коефіцієнти АР другого порядку

$$\Phi[2,1] = c[2,1] + c[2,2], \quad (4.5)$$

$$\Phi[2,2] = -c[2,1]c[2,2].$$

Для іншої пари комплексно пов'язаного коріння, можна знайти інші пари коефіцієнтів АР. Таким чином, для нових коренів характеристичного рівняння знаходимо нові пари коефіцієнтів АР, що формує одну моду СЦП. Використовуючи комплексно пов'язані коріння, отримуємо факторизацію многомодової СЦП, тобто. її розкладання на одномодові СЦП, що відповідають кожній парі коефіцієнтів АР.

Для дійсного кореня характеристичного рівняння (4.4) зв'язок з коефіцієнтом АР проста

$$\Phi[1,1] = c[1,1]. \quad (4.6)$$

Нагадаємо, що в цьому випадку мода в СЦП розташована або на нульовій частоті, або на максимальній частоті. Отже, модель АР  $p$ -го порядку з

довільним числом мод можна як набору коефіцієнтів АР першого чи другого порядків. Параметричний спектр моделі (4.3), залежить від коефіцієнтів моделі АР, представляється набором одномодових спектрів. У такий спосіб здійснюється факторизація СЦП, що полягає у розкладанні параметричної багатомодової СЦП на одномодові складові.

Запропонований метод факторизації спектрів та оцінювання частоти моди може застосовуватися для підвищення дозволу СЦП. Тоді багатомодовий спектр, оцінка якого здійснюється за моделлю АР р-го порядку, представляється (факторизується) набором одномодових спектрів першого або другого порядків. Т.о. багатомодовий спектр (4.3) є виразом

$$P(f) = \frac{D_a}{\left| \sum_{i=0}^{p_1} \Phi_1[p_1, i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2 \left| \sum_{i=0}^{p_2} \Phi_2[p_2, i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2 \times \dots \times \left| \sum_{i=0}^{p_k} \Phi_k[p_k, i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2}. \quad (4.7)$$

У (4.7) коефіцієнти АР описують одномодові складові СЦП.

#### 4.3 Зв'язок частотних характеристик мод СЦП з корінням характеристичного рівняння

Коріння характеристичного рівняння можна виразити через частоту мод та їх ширини смуг у СЦП. Для цього використовується зв'язок між корінням характеристичного рівняння та параметрами спектру: частотами мод  $f_i$  та їх ширинами смуги СЦП. Тоді дійсне коріння характеристичного рівняння р-го порядку та параметри АР, пов'язані співвідношенням (4.6), виражаються через ширину смуги моди

$$c[p, i] = e^{-\pi \Delta f_i T}. \quad (4.8)$$

Справжні коріння описують моди на нульовій частоті чи максимальній частоті дискретного діапазону, що дорівнює половині частоти дискретизації.

Оскільки модель АР дійсна, то комплексне коріння характеристичного рівняння описується виразами.

$$c[p, i] = e^{-\pi\Delta f_i T - j2\pi f_i T}, c[p, i + 1] = e^{-\pi\Delta f_{i+1} T + j2\pi f_{i+1} T}. \quad (4.9)$$

У найпростіших випадках вузькосмугових СЩП однією дійсний корінь припадає одна мода на нульовій частоті чи максимальній частоті. На два комплексно-сполучених кореня характеристичного рівняння припадає два порядки моделі АР або одна мода на ненульовій частоті або не на максимальній частоті.

Як характеристики сигналів можна використовувати центральні частоти мод. Якщо коріння характеристичного рівняння комплексне, то частота моди визначається за формулою

$$f = ar \cos \{ \Phi[2,1] / (\sqrt{-\Phi[2,2]}) / 2\pi T \}, \quad (4.10)$$

а ширина смуги моди дорівнює

$$\Delta f = \ln(-\Phi[2,2]) / 2\pi T. \quad (4.11)$$

Якщо коріння дійсне, то модель АР має перший порядок. У цьому частоти мод  $f=0$ , якщо  $\Phi[1,1]>0$  чи  $f=1/2T$ , якщо  $\Phi[1,1]<0$ . Ширина лінії моди в цьому випадку дорівнює, як впливає з (4.11),  $\Delta f = \ln(|\Phi[1,1]|) / \pi T$ .

Зауважимо, що коріння характеристичного рівняння, як впливає з (4.4), повністю характеризують модель, як і коефіцієнти АР. Тобто всі моди СЩП можна визначити безпосередньо через коріння, використовуючи співвідношення (4.8) та (4.9). Так, для комплексного коріння з (4.9-4.11) маємо

$$f = \arccos \{ (c[2,1] + c[2,2]) / 2 \exp(\pi \Delta f T) \} / 2\pi T, \quad (4.12)$$

$$\Delta f = -\ln(|c[2,1]c[2,1]|) / 2\pi T.$$

#### 4.4 Роздільна здатність оцінки СЦП при використанні факторизації

Багатомодові процеси часто утворені впливом різних факторів, що формують спектральні моди на різних частотах. У деяких випадках корисно описувати такі складні процеси полімоделлю  $AP_1 \times AP_2 \times \dots \times AP_k$  [16]. Така система, по суті, характеризується полюсами передавальної функції, які виражаються через комплексно-сполучені пари. Подання системи як множення полюсів відповідає однієї з форм її реалізації. Перемноження складових функції передачі відповідає послідовному (каскадному) включенню фільтрів першого та другого порядків із речовими коефіцієнтами. Послідовна реалізація часто використовується практично, оскільки, наприклад, вона дозволяє послабити небажані ефекти, пов'язані з помилками округлення.

Оскільки кожна модель АР, характеризується своїми коефіцієнтами АР, визначає СЦП, можна цю полімодель у вигляді мультиплікативної, тобто. послідовної моделі. Представивши цю мультиплікативну багатомодову модель набором мономоделей зі СЦП, що містить одну або кілька мод, можна факторизувати багатомодову СЦП на окремі моди, проаналізувати вплив різних факторів формування СЦП. Покажемо процес факторизації на прикладі моделі, що використовується при дослідженні роздільної здатності.

Нехай часовий ряд описується мультиплікативною моделлю  $AP_1 \times AP_2 \times \dots \times AP_k$ . Враховуючи умову оптимальності, для знаходження коефіцієнтів АР маємо узагальнене нелінійне рівняння типу Юла-Уокера

$$\Phi_k(z)\Phi_{k-1}(z)\dots\Phi_1(z)R[j] = 0. \quad (4.13)$$

де  $Z$  - оператор зсуву назад. Ефективний спосіб розв'язання цього рівняння продемонстровано нижче на прикладі моделі АР четвертого порядку, що використовується для дослідження підвищення роздільної здатності методом факторизації.

Коефіцієнти двох складових моделей другого порядку  $\Phi_1[1], \Phi_1[2], \Phi_2[1], \Phi_2[2]$  повинні розраховуватися шляхом вирішення системи нелінійних рівнянь, яку можна отримати (4.13)

$$\Phi[4,1] = \Phi_1[2,1] + \Phi_2[2,1],$$

$$\Phi[4,2] = \Phi_1[2,2] - \Phi_1[2,1]\Phi_2[2,1] + \Phi_2[2,2], \quad (4.14)$$

$$\Phi[4,3] = -\Phi_1[2,2]\Phi_2[2,1] - \Phi_1[2,1]\Phi_2[2,2],$$

$$\Phi[4,4] = -\Phi_1[2,2]\Phi_2[2,2].$$

Ця нешкідлива на вигляд процедура чисельного розв'язання системи нелінійних рівнянь вимагає великого обсягу обчислень і трудомісткого відкидання зайвого коріння. Факторизація дозволяє спростити завдання, якщо потрібно розкласти СЦП моделі АР четвертого порядку на одномодові складові, що описуються моделями другого порядку. Для мультиплікативної моделі четвертого порядку  $AR1 \times AR2$ , представленій двома моделями другого порядку зі своїми комплексно-сполученим корінням характеристичного рівняння завдання відшукання коефіцієнтів  $AR(2)$  спрощується. За наявності цього коріння, відповідні коефіцієнти АР другого порядку мають вигляд:

$$\Phi_1[2,1] = c_1[2,1] + c_1[2,2],$$

$$\Phi_1[2,2] = -c_1[2,1]c_1[2,2],$$

$$\Phi_2[2,1] = c_2[2,1] + c_2[2,2], \quad (4.15)$$

$$\Phi_2[2,2] = -c_2[2,1]c_2[2,2],$$

де нижній індекс вказує номер моделі, рівний у разі один чи два. Оскільки при факторизації СЩП не потрібно знаходити коефіцієнти АР мультиплікативної моделі четвертого порядку  $AR1 \times AR2$ , досить знайти комплексно-сполучене коріння, і виразити через них відповідні коефіцієнти АР для моделей другого порядку.

Факторизація параметричних спектрів на їх мультиплікативні моделі дає більш точне уявлення про ці складові. Ця властивість може бути використана для підвищення роздільної здатності параметричної оцінки спектрів. Якщо дві моди розташовані близько друг від друга, їх параметрична оцінка СЩП може уявити як одну моду, тобто. не дозволити ці моди. Однак особливості цієї моди поблизу своєї вершини, які спостерігаються як її розширення, дозволяє шляхом факторизації розділити її на дві моди. Факторизація є досить чутливим інструментом аналізу спектрів.

Для підтвердження цього ефекту було проведено серію розрахунків та статистичних експериментів. Розраховувалися коефіцієнти АР(4) для двомодового спектру з близько розташованими модами. Відповідно до теорії побудови мультиплікативних моделей спочатку оцінювалися параметри моделі АР(4) відомими методами параметричного спектрального оцінювання, а потім по них розраховувалися коефіцієнти АР(2) мультиплікативної моделі. Для первинного оцінювання коефіцієнтів АР можна використовувати незміщені автокореляційні оцінки Юла-Уокера, зміщені автокореляційні оцінки Юла-Уокера, геометричний метод, метод Берга, метод Кея, методи коварації, модифікований коварійний метод [8]. Нижче наведено результати досліджень роздільної здатності з використанням незміщених автокореляційних оцінок Юла-Уокера та гармонійного алгоритму (методу Берга). Незміщені оцінки у методі Юла-Уокера використовують у системі рівнянь незміщені оцінки

функції кореляції. У методі Берга коефіцієнти АР отримують рекурсивно за методом Левінсона-Дарбіна. Тобто. спочатку оцінюють коефіцієнти відображення РФ, а за ними знаходяться коефіцієнти АР.

Для спектрального оцінювання з високою роздільною здатністю за гармонічним алгоритмом Берга застосовувався алгоритм Левінсона-Дарбіна, що дозволяє рекурентно обчислювати коефіцієнти АР за коефіцієнтами відображення  $K[n]$  РФ. Коефіцієнти відбиття  $n$ -ої ланки РФ, обчислювалися методом Берга

$$K[n] = \frac{-2 \sum_{t=n+1}^N a_{n-1}[t] d_{n-1}[t-1]}{\sum_{t=n+1}^N |a_{n-1}[t]|^2 + \sum_{t=n+1}^N |d_{n-1}[t-1]|^2}, \quad (4.16)$$

де  $a_{n-1}[t]$ ,  $d_{n-1}[t-1]$  – помилки прямого та зворотного передбачення  $(n-1)$ -ої ланки РФ. Помилки прямого передбачення (4.16) обчислюються відповідно до співвідношення

$$a_{n-1}[t] = a_{n-2}[t] + K[n-1] d_{n-2}[t-1]. \quad (4.17)$$

Аналогічно виражаються помилки зворотного передбачення

$$d_{n-1}[t] = d_{n-2}[t-1] + K[n-1] a_{n-2}[t]. \quad (4.18)$$

Вирази (4.17) і (4.18) впливають із структури РФ, зображеної на рис. 4.1.

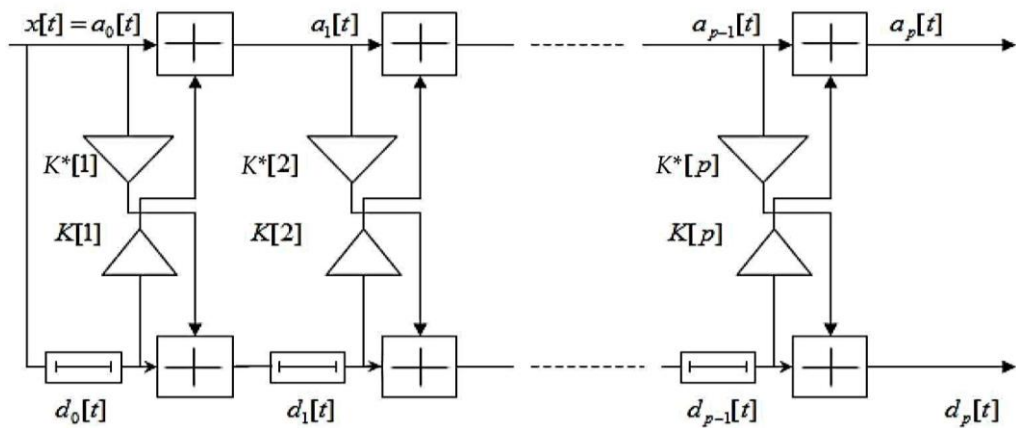


Рисунок 4.1 – Рішотчастий фільтр

Алгоритм Левінсона-Дарбіна дозволяє рекурентно обчислювати коефіцієнти АР:

$$K^*[n] = K[n] = \Phi[n, n] = -\frac{R[n] + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi[n-1, i]R[n-i]}{(\sigma_{a, n-1})^2}, \quad n = 2, \dots, p,$$

$$\Phi[n, i] = \Phi[n-1, i] + \Phi[n, n]\Phi[n-1, n-i], \quad (\sigma_{a, n})^2 = (1 - \Phi^2[n, n])(\sigma_{a, n-1})^2, \quad (4.19)$$

з ініціацією

$$\Phi[1, 1] = \frac{-R_1}{(\sigma_x)^2}, \quad (\sigma_{a, 1})^2 = (1 - \Phi^2[1, 1])(\sigma_x)^2,$$

де  $\sigma_x$  - середньоквадратичне відхилення (СКО) процесу,

$\sigma_{a, n}$  - СКО помилки передбачення для моделі АР  $n$ -го порядку.

Оцінки коефіцієнтів відображення (4.16) використовувалися для розрахунку коефіцієнтів АР алгоритму Левінсона-Дарбіна (4.19). У цьому сенс використовуваного гармонійного алгоритму Берга.

При дослідженні підвищення роздільної здатності мультиплікативної моделі методом статистичного моделювання генерувався процес АР(4). Для цього за заданими частотними характеристиками мод СЩП, розраховувалися

корені характеристичного рівняння (4.8) і (4.9). Знайдені таким способом коріння характеристичного рівняння використовувалися для розрахунку коефіцієнтів моделі  $AR(4)$ , для формування досліджуваного процесу  $AR$  з близько розташованими в СЦП модами. Формули, що зв'язують коефіцієнти  $AR$  з корінням характеристичного рівняння, наступні (4.4) для  $p = 1 \div 4$  наведені у (1.5)

#### 4.5 Експериментальні дослідження роздільної здатності з використанням факторизації

Підвищення роздільної здатності методом факторизації спектру моделі  $AR(4)$  продемонстровано на прикладі випадкового процесу  $AR(4)$  з параметрами мод СЦП  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 130$ ,  $df_1 = df_2 = 1$ . За цими частотними параметрами, згідно (4.9), розраховувалися чотири попарно комплексно-сполучених кореня характеристичного рівняння. Потім, використовуючи (1.5), були коефіцієнти  $AR$  четвертого порядку. Якщо за цими даними розраховувалася СЦП (4.3), то отримували теоретичну СЦП.

Для отримання вибірки використовувався фільтр, що формує, який з нормального БШ, за знайденими коефіцієнтами  $AR(4)$ , формував процес. Для цього використовувалось рівняння (4.1). Саме дві близько розташовані моди цього процесу досліджувалися на дозвіл. Довжина вибірок становила 100 відліків.

Методами незміщених автокореляційних оцінок Юла-Уокера (4.2) та методом Берга (4.16 - 4.19) оцінювалися коефіцієнти  $AR(4)$  та знаходився параметричний спектр четвертого порядку (4.3). Для отримання оцінок СЦП методом факторизації, за вибіркою процесу  $AR(4)$ , оцінювалися попарно комплексно-пов'язані корені характеристичного рівняння процесу. Потім по корінням розраховувалися дві пари коефіцієнтів  $AR(2)$ , використовуючи (4.15). Факторизована СЦП була за формулою (4.7).

Теоретична СЦП для моделі  $AR(4)$  показано на рис. 4.2. За сформованим процесом  $AR(4)$  методами Юла-Уокера та Берга оцінювалися коефіцієнти  $AR(4)$ . Параметрична оцінка спектра моделі  $AR(4)$  (4.3) для незміщених оцінок Юла-Уокера представлена на рис. 4.3. Аналіз графіка показав, що моди у разі не поділяються.

Роздільна здатність параметричної оцінки СЦП за методом Берга вище, ніж за оцінкою Юла-Уокера [8]. Однак навіть параметрична оцінка спектра за методом Берга не дає гарного дозволу за таких частотних параметрів спектра (рис. 4.4).

У тих випадках, коли параметричні оцінки СЦП дають для близько розташованих частот слабкі моди, або спостерігаються нерівномірності кривої СЦП поблизу вершини моди, підвищити дозвіл можна застосуванням факторизації мультиплікативної моделі. На рис. 4.5 представлені два графіки СЦП, побудованих за моделями  $AR1(2)$  та  $AR2(2)$ , отриманих, описаним вище, методом факторизації. Параметри складових моделей знайдено за оцінками Юла-Уокера за допомогою рівнянь (4.2). Хоча точність оцінок частот мод не така висока, як отримана методом Берга, дозвіл двох мод шляхом факторизації очевидна. Дослідження показали, що роздільна здатність покращується також при застосуванні факторизації, навіть моди слабо дозволяються, тобто. провал між модами має малу глибину. У тих випадках, коли замість нерівномірності мод спектральна оцінка дає одну гладку моду, застосування факторизації не призводить до розділення мод.

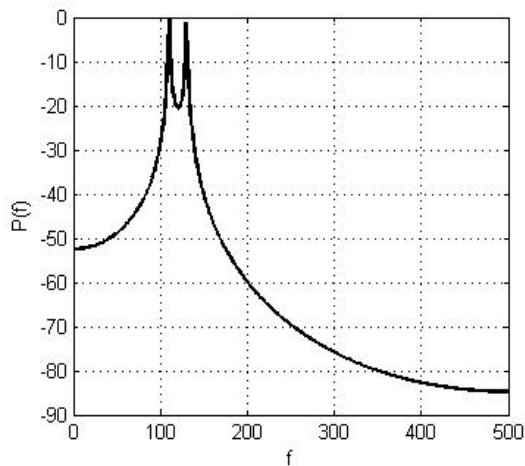


Рисунок 4.2 - Теоретична СЩП для моделі AR(4) із параметрами:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 130$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

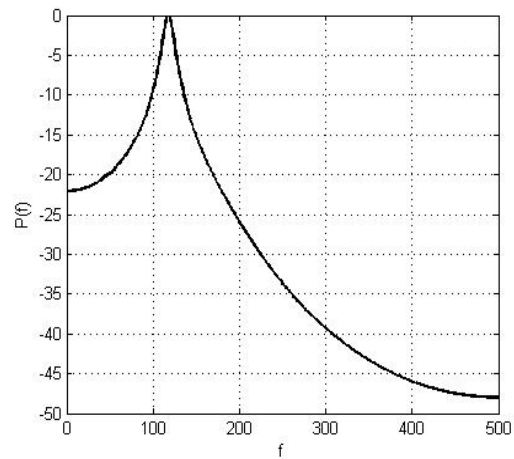


Рисунок 4.3 - Параметрична оцінка спектра моделі AR(4) за Юлом-Уокером при:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 130$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

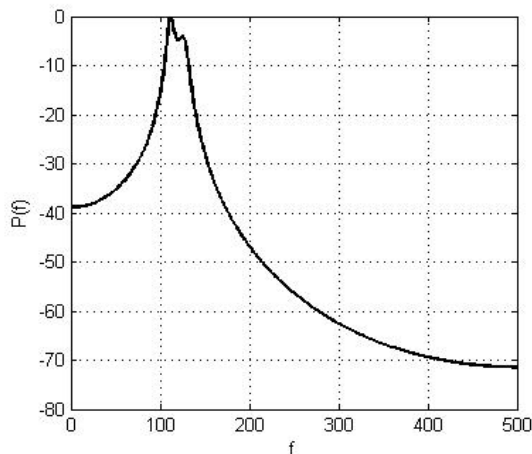


Рисунок 4.4 - Параметрична оцінка спектра моделі AR(4) за Бергом при:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 130$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

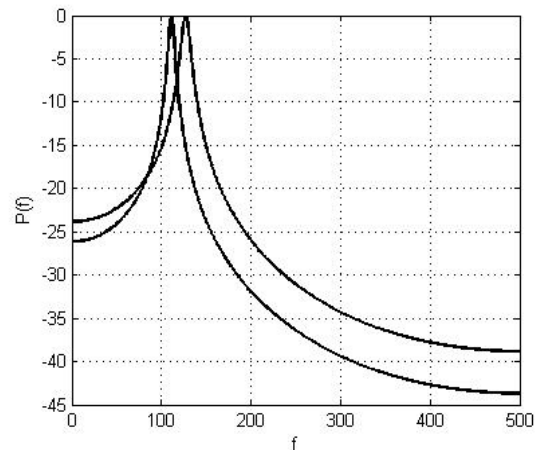


Рисунок 4.5 - Мультиплікативне представлення спектра моделі AR(4) за Юлом-Уокером при:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 130$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

У методі факторизації для надрозділення за двома оцінками СЩП складових моделей AR(2) зручно використовувати один графік СЩП. Тому пропонується побудувати нову криву СЩП, таким чином, щоб ліва на графіку

частина кривої збігалася з оцінкою СЦП лівої моди до частоти, що дорівнює частоті лівого графіка плюс половині різниці частот лівої та правої мод, тобто

$$f_{\max} = (f_2 - f_1) / 2,$$

де  $f_{1,2}$  - частоти правої та лівої мод. Тоді права частина кривої збігається з оцінкою СЦП другої моди, починаючи з частоти  $f_{\max} + 1$ . Графік такого подання розділу шляхом факторизації показано на рис. 4.6. Порівняння графіків на рис. 4.3 та рис. 4.6 демонструє ефект отримання надрозділення шляхом факторизації оцінки СЦП за Юлом-Уокером.

Розділ СЦП можна суттєво підвищити, якщо для первинного оцінювання коефіцієнтів АР використовувати геометричний метод, метод Берга, метод Кея або модифікований підступний метод, що мають помітну перевагу, порівняно з оцінками Юла-Уокера. Нижче показано значне поліпшення роздільної здатності на прикладі способу Берга. На рис. 4.7 представлений графік теоретичного спектра, отриманого для моделі АР(4) із заданими параметрами СЦП:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$ ,  $df_1 = df_2 = 1$ .

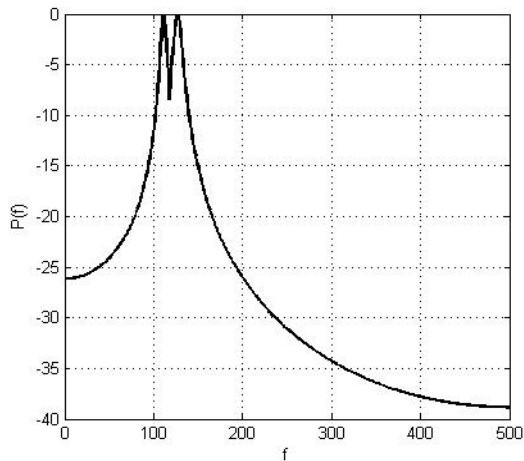


Рисунок 4.6 - Мультиплікативна оцінка спектра моделі  $AR(4)$  за Юлом-Уокером при:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 130$ ,  
 $df_1 = df_2 = 1$

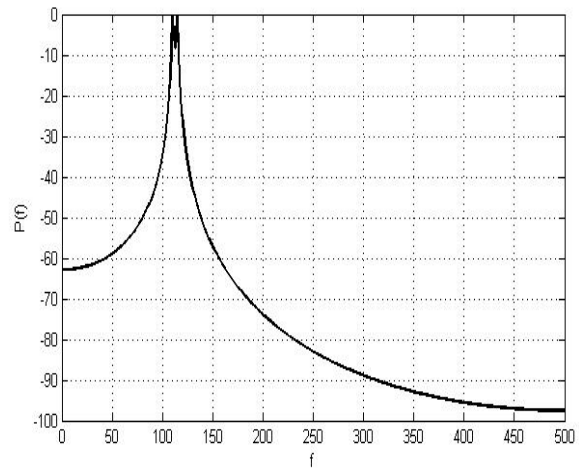


Рисунок 4.7 - Теоретична СЦП для моделі  $AR(4)$  із параметрами:  $f_1 = 110$ ,  
 $f_2 = 115$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

На рис. 4.8 – рис. 4.11 представлені результати експериментів щодо вирішення спектрів процесу  $AR(4)$ . Параметрична оцінка спектра моделі  $AR(4)$  по Юлу-Уокеру не дає можливість застосувати метод факторизації для підвищення роздільної здатності, оскільки графік моди СЦП гладкий без ознак другої моди (рис. 4.8). На графіку параметричної оцінки спектра моделі  $AR(4)$  за Бергом (рис. 4.9) є нерівномірність поблизу моди, що дозволяє розділити дві моди застосуванням методу факторизації. Аналіз графіків на рис. 4.9 – рис. 4.11 показує, що для цих частот також можна отримати розділення на основі факторизації, хоча відстань між частотами, що задаються, істотно менше, в порівнянні з попереднім випадком ( $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 130$ ,  $df_1 = df_2 = 1$ ).

Аналіз графіків показує безперечну перевагу мультиплікативного розкладання підвищення відповідної здатності параметричних оцінок спектрів. Застосування для розрахунків параметрів моделей  $AR$ , отриманих методом Берга, сприяє підвищенню спектрального розділу вибірових оцінок.

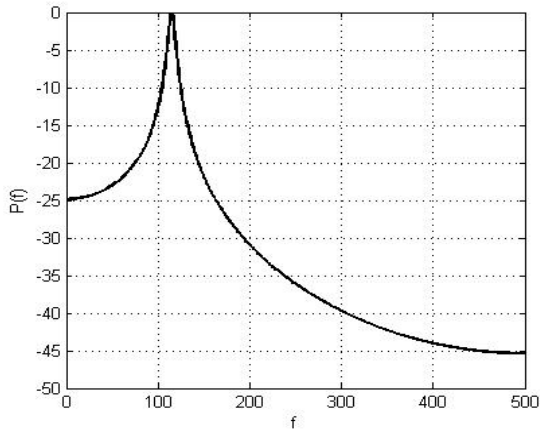


Рисунок 4.8 - Параметрична оцінка спектра моделі  $AR(4)$  за Юлом-Уокером при:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$ ,  
 $df_1 = df_2 = 1$

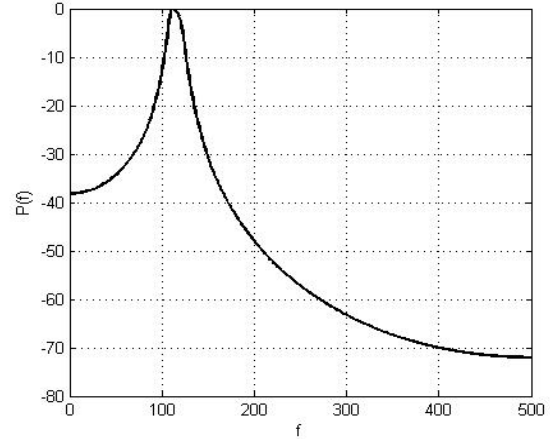


Рисунок 4.9 - Параметрична оцінка спектра моделі  $AR(4)$  за Бергом при:  
 $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

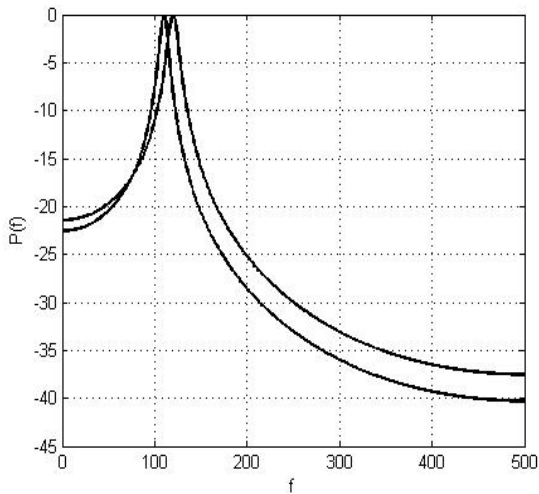


Рисунок 4.10 - Мультиплікативне представлення спектра моделі  $AR(4)$  Бергом при:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$ ,  
 $df_1 = df_2 = 1$

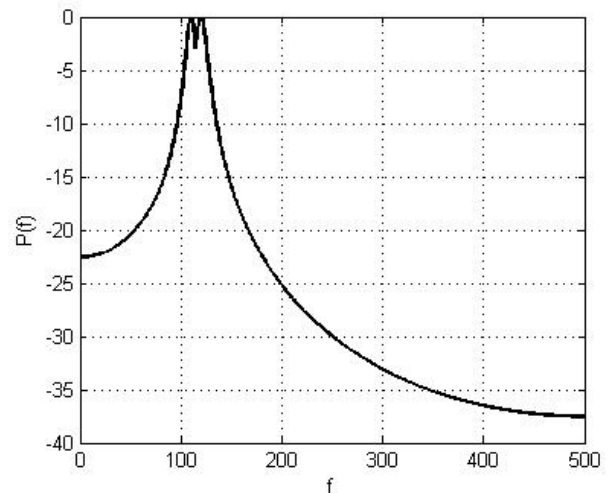


Рисунок 4.11 - Мультиплікативна оцінка спектра моделі  $AR(4)$  за Бергом при:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

На рис. 4.12 та рис. 4.13 представлені результати розділу двох мод параметричної СЦП для різних довжин вибірок, при використанні для оцінки коефіцієнтів  $AR$  методом Берга. Як видно з графіків, при довжині 200 відліків

можна отримати роздільну здатність СЩП двох мод при наступних заданих параметрах частот:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$ ,  $df_1 = df_2 = 1$ . Метод факторизації дозволяє отримати роздільну здатність при цих параметрах частот вже при довжині 100 відліків (рис. 4.11).

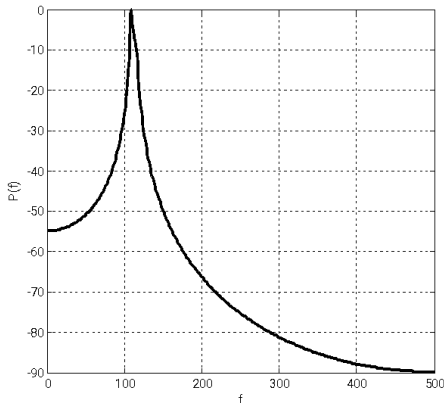


Рисунок 4.12 - Мультиплікативне представлення спектру моделі АР(4) Бергу вибірка довжиною 150 відліків при:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

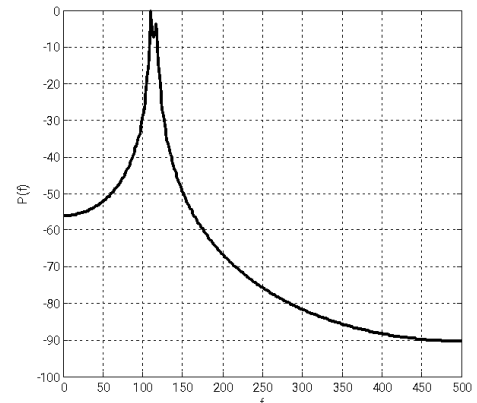


Рисунок 4.13 - Мультиплікативна оцінка спектра моделі АР(4) Бергу вибірка довжиною 200 відліків при:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

На рис. 4.14 та рис. 4.15 показано одержувану роздільну здатність факторизацією мод СЩП для різних ділянок частот. Довжина вибірки складала 100 відліків. Дозвіл розглядався на частотах  $f_1 = 50$ ,  $f_2 = 65$ ,  $df_1 = df_2 = 1$  (рис. 4.14) та на частотах  $f_1 = 230$ ,  $f_2 = 245$ ,  $df_1 = df_2 = 1$  (рис. 4.15). Хоча точність оцінки частот трохи відрізнялася від частот, що задаються, спостерігався впевнений розділ частот.

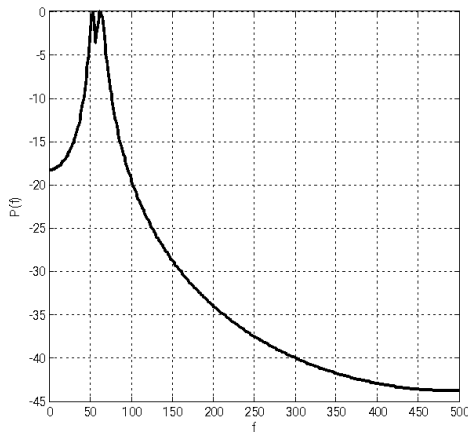


Рисунок 4.14 - Мультиплікативне представлення спектру моделі AR(4) Бергу вибірка довжиною 100 відліків

при:  $f_1 = 50$ ,  $f_2 = 65$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

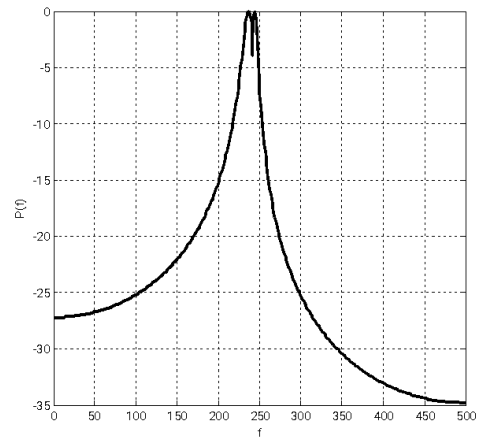


Рисунок 4.15 - Мультиплікативна оцінка спектра моделі AR(4) Бергу вибірка довжиною 100 відліків при:

$f_1 = 230$ ,  $f_2 = 245$ ,  $df_1 = df_2 = 1$

Використання формуючого фільтра для отримання часового ряду у вигляді процесу AR має ряд переваг та недоліків. До переваг слід віднести те, що отриманий процес, з частотами мод, що задаються, і їх ширинами смуг, є процесом AR. Особливо це важливо при використанні для аналізу часового ряду моделей AR, наприклад методом факторизації. Однак на точність оцінки спектральних мод, на їх розділ впливає процес, що породжується процесом у вигляді БШ. При деяких процесах типу БШ, спостерігається відхилення оцінок спектральних мод від заданих. Особливо при коротких реалізаціях 100–200 відліків. На точність оцінки частоти моди також впливає довжина вибірки усереднення.

Здавалося б, що використання як випадкового сигналу вибірки синусоїди з частотою, що задається, і доданим БШ може підвищити точність оцінки частоти моди. Однак при використанні моделей AR для аналізу процесу слід мати на увазі, що сама синусоїда і сума синусоїд з різними частотами не є чистими процесами AR з відомим порядком моделі. Оцінки частоти спектральних мод залежить від довжини синусоїд, особливо в коротких

вибірках. Спостерігається вплив рівня потужності адитивного БШ, особливостей самого БШ. Для суми двох синусоїд при отриманні оцінок СЦП методом Юла-Уокера явно недостатньо четвертого порядку моделі АР. Для факторизації використання дозволу двох мод АР четвертого порядку істотно обмежує можливості методу.

На рис. 4.15 та рис. 4.16 показані оцінки СЦП, отримані з використанням методів Юла-Уокера та Берга для використовуваних вище частот. Як видно із рис. 4.7 та рис. 4.15 при вибірці 100 відліків метод Юла-Уокера не дозволяє розділити моди спектрів процесу АР четвертого порядку, ні суми двох синусоїд.

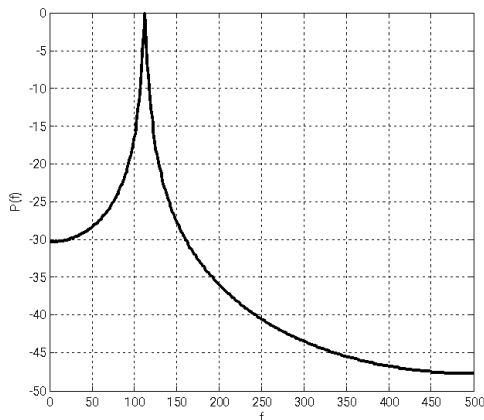


Рисунок 4.15 - Параметрична оцінка спектра за моделлю АР(4) методом Юла-Уокера суми двох синусоїд з частотами:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$

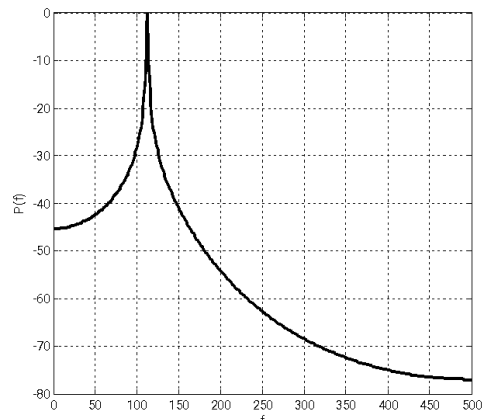


Рисунок 4.16 - Мультиплікативна оцінка спектра моделі АР(4) методом Берга суми двох синусоїд із частотами:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 115$

На рис. 4.17 та рис. 4.18 показано розділ мод СЦП методом факторизації оцінка спектра моделі АР(4) за Бергом суми двох синусоїд з частотами:  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 130$  і  $f_1 = 110$ ,  $f_2 = 125$ . Як видно з графіків, факторизація дозволяє розділити моди в СЦП із зазначеними частотами.

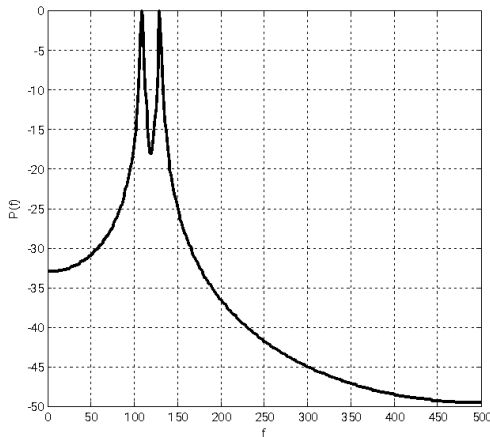


Рисунок 4.17 - Параметрична оцінка спектра моделі  $AR(4)$  методом Берга суми двох синусоїд із частотами:

$$f_1 = 110, f_2 = 130$$

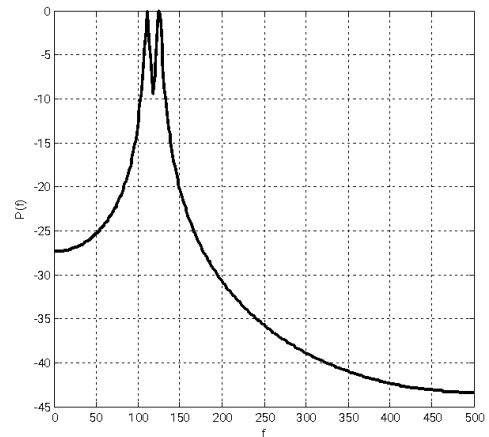


Рисунок 4.18 - Мультиплікативна оцінка спектра моделі  $AR(4)$  методом

Берга суми двох синусоїд із

частотами:  $f_1 = 110, f_2 = 125$

Зі зменшенням різниці частот мод роздільна здатність з використанням факторизації погіршується. Це видно з рис. 4.19 та рис. 4.20. Як видно з графіків, використання досліджень двомодового процесу у вигляді суми двох синусоїд не дозволяє оцінити всі потенційні можливості факторизації для отримання надрозділу мод СЦП.

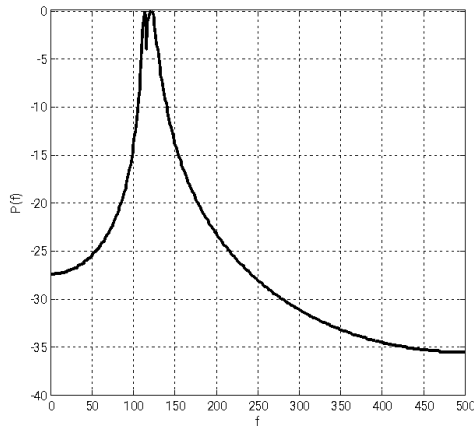


Рисунок 4.19 - Параметрична оцінка спектра моделі  $AR(4)$  методом Берга суми двох синусоїд із частотами:

$$f_1 = 110, f_2 = 122$$

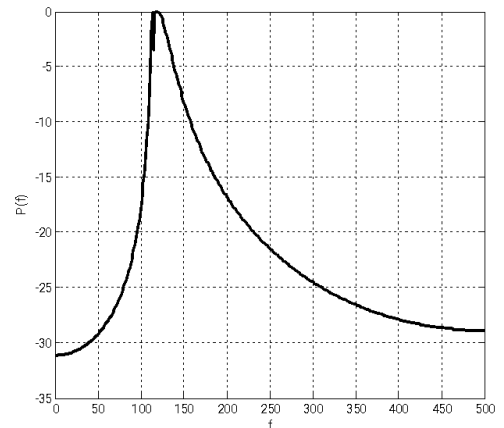


Рисунок 4.20 - Мультиплікативна оцінка спектра моделі  $AR(4)$  методом

Берга суми двох синусоїд із

частотами:  $f_1 = 110, f_2 = 118$

У роботі досліджувалось роздільну здатність двох спектральних мод для процесу, що є сумою двох синусоїд з адитивним БШ. Результати досліджень спектрального дозволу на основі факторизації з використанням коефіцієнтів авторегресії, що обчислюються методом Берга для вибірок, отриманих методом породжуючого фільтру процесу, показали результати, що мають потенційну перевагу. Перевага моделювання на основі формуючих фільтрів була очевидною і тому результати досліджень для вибірки у вигляді двох синусоїд з частотами, що задаються і доданим БШ, не наводяться.

## ВИСНОВКИ

В роботі представлені результати досліджень підвищення спектральної роздільної здатності на основі факторизації СЩП. Аналіз проводився методом статистичного моделювання за вибірками, отриманими формуючим фільтром. Факторизація полягає у поданні багатомодового СЩП, одномодовими спектрами. Описано методику використання факторизації при вирішенні задачі підвищення роздільної здатності. Наведено результати статистичного моделювання методу підвищення роздільної здатності. Результати моделювання показують перевагу використання гармонійного алгоритму Берга порівняно з методом Юла-Уокера.

Для підвищення роздільної здатності мод, отриманих методом Берга, що мають неоднорідність вершини, пропонується використовувати факторизацію СЩП. Факторизація, по суті, визначає будь-яку неоднорідність СЩП, присутністю додаткової моди, що вона виявляє. Неоднорідність оцінки моди СЩП поблизу її вершини викликана наявністю ще однієї моди, яку з допомогою факторизації можна виділити. У такий спосіб факторизація підвищує роздільну здатність оцінки СЩП.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы.– М.: Наука, 1976. – 496 с.
2. Шиховцев И.В., Якубов В.П. Статистическая радиофизика. Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2011. –157 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 564 с.
4. Чабдаров Ш.М., Трофимов А.Т. Полигауссовы представления произвольных помех и прием дискретных сигналов // Радиотехника и электроника. - 1975. - Т.20, №4. - С. 734-745.
5. Драган Я.П. Структура и представление моделей стохастических сигналов. – К.: Наук. думка, 1980. -381 с.
6. Марченко В.Г., Щербак Л.Н. Линейные случайные процессы и их приложения. –К.: Наук. думка, 1975. – 142 с.
7. В.Г. Марченко, В.А. Омельченко Вероятностные модели случайных сигналов и полей в прикладной статистической радиофизике: Учеб. Пособие.- К: УМК ВО, 1988.- 176 с.
8. Марпл.–мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
9. Тихонов В.А., Русановский Д.Е., Тихонов Д.В. Генерирование узкополосных имитационных случайных процессов // Радиотехника и информатика. – 1999. – №4. – С. 83–85.
10. Тихонов В.А., Тихонов Д.В., Бажина А.В. Моделирование широкополосных случайных процессов // Збірник наукових праць ХВУ. – Харьков.: ХВУ. – 2000. – №4 (30). – С. 132–135.
11. Bartlett M.S. Smoothing Periodograms from Time-Series with Continuous Spectra // Nature. – London. – 1948. – Vol.161, May. – P. 687–687.
12. Кей С.М., Марпл С.Л. Современные методы спектрального анализа // ТИИЭР. – 1981. – Т.69, №11, с. 5–51.

13. Фридландер Б. Методы спектрального оценивания на основе решетчатой структуры // ТИИЭР. - 1982. - Т.70, №9. - С. 95-125.
14. Burg J.P. Maximum Entropy Spectral Analysis. Proceedings // 37th Meeting of Society of Exploration Geophysicists, Oclahoma City, Okla., October 1967. – P. 23–29.
15. Р. Отнес, Л. Эноксон Прикладной анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1982. – 429с.
16. Тихонов В.А. Синтез и анализ мультипликативных процессов линейного предсказания / В.А. Тихонов, Н.В. Кудрявцева // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2010. – № 162. – С. 140 – 143.
17. Тихонов В.А. Мультипликативные модели случайных процессов в многокомпонентных электронных системах / В.А. Тихонов, Кудрявцева Н.В. // 2-я Международная научная конференция “Электронная компонентная база. Состояние и перспективы развития”. Сборник научных трудов. – Харьков: ХНУРЭ, 2009. – С. 236 – 238.
18. Tykhonov, V.A., Kudriavtseva, N.V., Chmelar, P. Factorization of speech signals parametric spectra using multiplicative linear prediction models. Proceedings Elmar. 57th *International Symposium ELMAR-2015*, Zadar, 28-30 September 2015.