

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2019 р.

ЗАВДАННЯ НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Потьомкіну Олександр Валерійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Моделювання неавтономної збуреної системи із захистом.

затверджена наказом по університету від 31 жовтня 2019 р. № 1601 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи система з двох диференціальних рівнянь, яка описує поведінку системи захисту від шкідливих впливів;

синусоїдальне збурення базової моделі диференціальних рівнянь;

система з двох диференціальних рівнянь з сингулярністю;

функція вартості захисту.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми моделювання неавтономної збуреної системи із захистом

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Системний аналіз проблеми _____

3. Постановка задачі _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання 2 вересня 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Наумейко І.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 72 с., 7 табл., 26 рис., 1 дод., 43 джерела.

АСИМПТОТИКА, БІФУРКАЦІЯ, ЛІНЕАРИЗАЦІЯ, ОБ'ЄКТ ЗАХИСТУ, СИНУСОЇДАЛЬНЕ ЗБУРЕННЯ, СТІЙКІСТЬ, МОДЕЛЬ ВОЛЬТЕРРА.

Об'єкт дослідження – система із захистом від шкідливих факторів зовнішнього впливу.

Мета роботи – проведення дослідження проблеми стійкості в ергатичній системі із захистом при зовнішньому збуренні інтенсивностей шкідливих викидів, яке моделюється малим по амплітуді синусоїдальним збуренням правої частини базової моделі та розглянути сингулярні і мішані системи.

Методи дослідження – аналітичний і чисельний методи розв'язку системи диференціальних рівнянь.

Предмет дослідження – система з двох нелінійних диференціальних рівнянь як модель технічної системи з захистом. Об'єкт захисту описаний логістичним рівнянням, а захисна система – нелінійним диференціальним рівнянням з різними функціями захисту досить загального вигляду. Дослідження систем призвело до моделей з синусоїдальним збуренням розв'язків диференціальних рівнянь та аналізу їх сталості відносно малого параметру. Для порівняння розв'язку використовуємо чисельний метод розв'язку системи диференціальних рівнянь з різними типами збурень. Для обчислень, аналізу і графічних зображень результатів застосовувався математичний пакет Wolfram Mathematica.

ABSTRACT

Introductory note: 72 pages, 7 tables, 26 figures, 1 appendixes, 43 sources.

ASYMPTOTICS, BIFURCATION, LINEARIZATION, OBJECT OF PROTECTION, SINUSODIAL DISTURBANCE, STABILITY, VOLTERRA MODEL.

The object of research – a system with protection against harmful external influences.

Purpose of work – to conduct a study on the stability ergatic system of protection at the external disturbance of emissions intensities that is modeled by a small amplitude sinusoidal perturbation of the base model equation's right side and consider singular and mixed systems.

Methods of research – application of analytical and numerical methods for solving the system of differential equations.

The subject of research is the system of two nonlinear differential equations as a model of a technical system with protection. Object of protection is described with a logistic equation and a protection system – with a linear differential equations with of sufficiently general form. The research of such systems has led to models with sinusoidal indignation and analysis of their constancy with respect to a small parameter. To compare the solutions of disturbed and nondisturbed equations, we use numerical method for solving a system of differential equations with different types of perturbations. The mathematical package Wolfram Mathematica was used for calculations, analysis and graphic representation of the results.

ЗМІСТ

	С.
Вступ.....	8
1 Системний аналіз проблеми неавтономної системи з захистом при регулярному збуренні та постановка задачі дослідження	9
1.1 Системний аналіз проблеми моделювання неавтономної системи з захистом при регулярному збуренні	9
1.1.1 Вербальна модель системи.....	9
1.1.2 Морфологічний опис системи	9
1.1.3 Функціональна модель системи.....	10
1.1.4 Інформаційна модель системи	12
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми моделювання неавтономної системи з захистом при регулярному збуренні.....	13
1.2.1 Вибір критеріїв якості та розрахунок вектору локальних пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	13
1.2.2 Вибір альтернатив та розрахунок векторів локальних пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	15
1.2.3 Оцінка узагальнених пріоритетів	18
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	19
1.3.1 Змістовна постановка задачі	19
1.3.2 Формальна постановка задачі	21
1.4 Постановка задач дослідження	22
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання	23
2.1 Аналіз систем динамічного захисту з швидкими і повільними фазовими змінними	23
2.2 Аналіз проблеми стійкості нелінійних динамічних систем із захистом	24
2.3 Неавтономна регулярна модель із збуренням правої частини	25
2.3.1 Проблеми в регулярних системах із захистом	25

	7
2.3.2 Математичний опис і модель об'єкта	26
2.3.3 Хаотична втрата стійкості	27
2.4 Узагальнена диференціальна модель	34
2.5 Дослідження системи.....	36
2.5.1 Дослідження стійкості систем	37
2.5.2 Дослідження стійкості систем із збуренням	41
2.5.3 Порівняння систем	49
2.6 Оцінки вартості для моделі пропорційного захисту	49
2.7 Асимптотики для «швидких» систем захисту.....	51
2.7.1 Аналіз головних членів асимптотик	51
2.7.2 Загальний випадок асимптотичного розв'язку	55
Висновки	64
Перелік джерел посилання	65
Додаток А Асимптотичний метод та побудова фазових портретів.....	69

ВСТУП

Сьогодні, в Україні та у багатьох країнах світу, існує велика кількість потенційно небезпечних технічних систем, зношеність яких в середньому знаходиться на відмітці 70%, тому математичне моделювання роботи систем безпеки й відновлення працездатності таких систем при аваріях як техногенного, так і природних характеру і катастрофах на теперішній час є особо актуальною темою

Метою та задачею дослідження є проведення дослідження проблеми стійкості в ергатичній системі із захистом при зовнішньому збуренні інтенсивностей шкідливих викидів.

Системами «Людина-Машина-Середовище» (система Л-М-С) із захистом прийнято називати людино-машинні системи, які включають в себе «зовнішнє середовище», котре складається з шкідливих та катастрофічних природних впливів середовища, та техногенних шкідливих факторів.

За одне десятиліття системи Л-М-С стали особливим класом, який включає в себе деякі важливі системи: екології, економіки, техніки, військової справи та безпеки життєдіяльності. Захисні підсистеми завжди займали основну нішу кібернетичних систем, але їх розглядали тільки як автоматизоване управління, із застосуванням обмеженої кількості методів дослідження, так, прикладом можна назвати системи масового обслуговування та теорії надійності.

Термін «захист» в даній роботі використовується в широкому сенсі, та позначає усі види технічних засобів (динамічні та статичні), а також, процеси відновлення «штатної» роботи підсистеми «машина», а не тільки усунення шкідливих викидів на навколишнє середовище та оператора. Тому, побудова математичних моделей, які описують системи з захистом і процеси в них, є актуальним завданням сучасності.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ НЕАВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ З ЗАХИСТОМ ПРИ РЕГУЛЯРНОМУ ЗБУРЕННІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми моделювання неавтономної системи з захистом при регулярному збуренні

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єктом системного аналізу в цій роботі є процес моделювання людино-машинних систем із захистом від шкідливих або небезпечних факторів за допомогою диференціальних рівнянь, їх дослідження, отримання рішень і їх інтерпретації.

Питання екології та вплив людини з виробничою технікою на неї сьогодні є актуальною темою. На прикладі системи диференціальних рівнянь типу Вольтерра в даній роботі розглядається математична модель з двох об'єктів: «об'єкт захисту» і «захист». «Об'єктом захисту» в даній роботі буде матися на увазі процес або точка ризику, існування якого, без об'єкта «захист» може генерувати шкідливий чинник необмежено, вплив якого може призвести до деяких втрат системи, а під «захист» – дія необхідна для подолання шкідливого фактору (визначається величиною шкідливості). Незважаючи на те, що розглянута модель є найпростішою і в дійсності все відбувається набагато складніше, вона дозволяє пояснити базову поведінку шкідливого фактору і його подолання.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічна модель представлена на рис. 1.1, для якої прийняті наступні позначення:

- а) А1 – математичне забезпечення;
 - 1) А11 – довідники;
 - 2) А12 – методи;
 - 3) А13 – математична модель;
- б) А2 – інформаційні ресурси;
 - 1) А21 – програмне забезпечення;
 - 2) А22 – обчислювальна техніка.

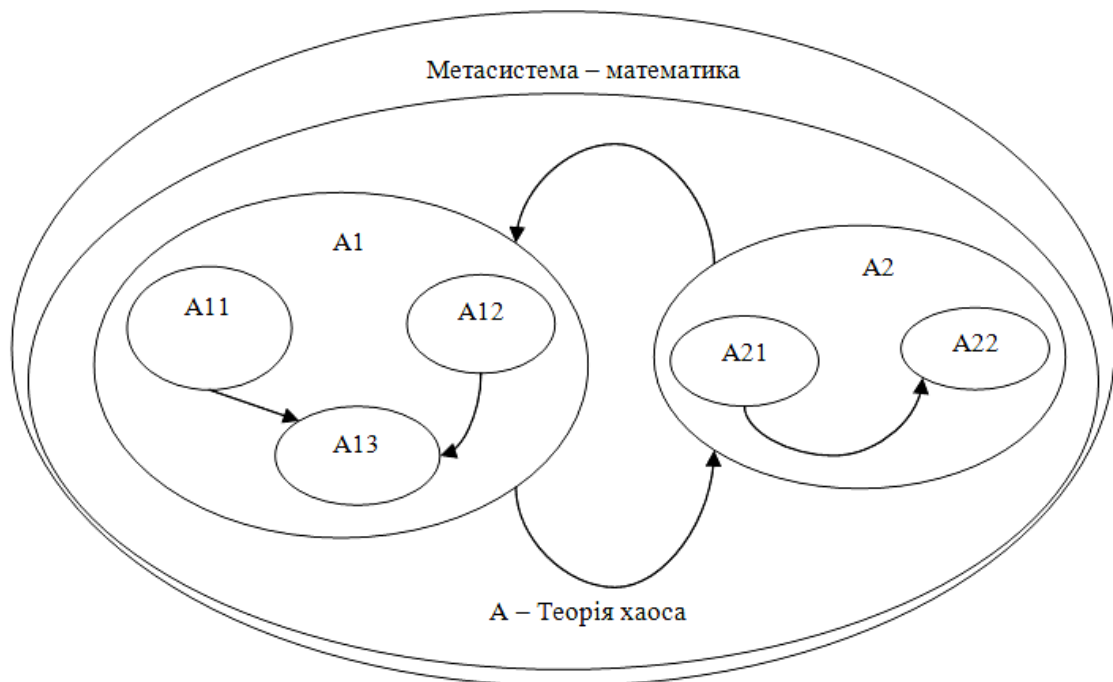


Рисунок 1.1 – Морфологічна модель

1.1.3 Функціональна модель системи

Представимо розглянуту систему у вигляді функціональної моделі – IDEF0. Для цього будемо використовувати програмний продукт AllFusion Process Modeler r7. При моделюванні необхідно виділити головну функцію системи – метафункцію, а потім декомпонувати її на декілька підфункцій. При цьому на кожен блок (функцію) впливають певні чинники – вхідні й вихідні дані, управління і засоби реалізації.

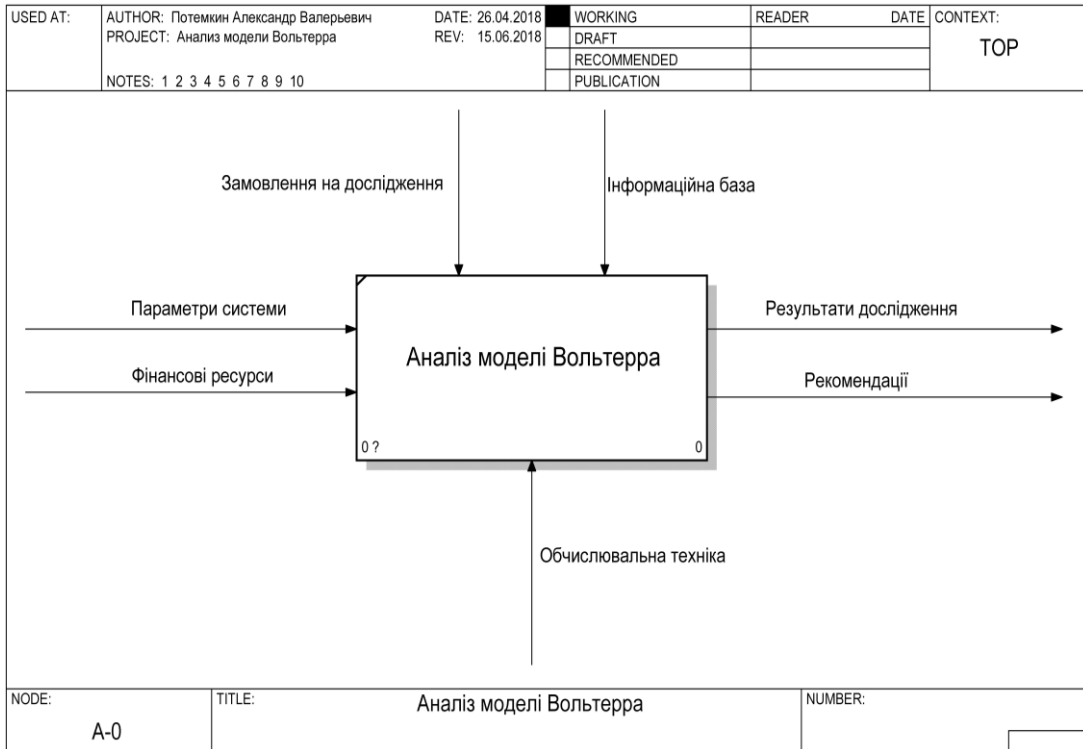


Рисунок 1.2 – Діаграма IDEF0

Декомпуємо метафункцію на наступні підфункції (рис. 1.3).

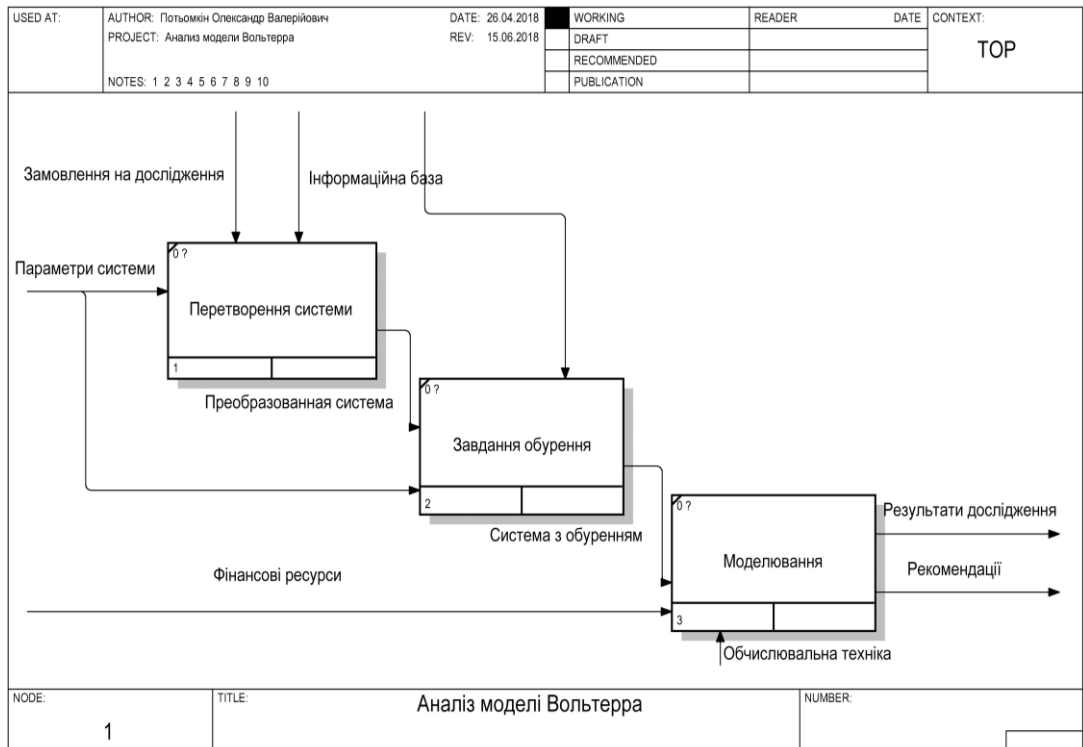


Рисунок 1.3 – Діаграма декомпозивання першого рівня

Побудована функціональна модель наочно показує набір основних функцій і їх зв'язок між собою. Таке уявлення моделі допомагає уникнути нерационального використання сил і засобів.

1.1.4 Інформаційна модель

Створимо інформаційну модель (DFD) найбільш значущої функції – моделювання поведінки системи. Для цього зробимо декомпозицію цієї функції на завдання і потоки даних, які взаємодіють із зовнішніми об'єктами та сховищами даних (рис. 1.4).

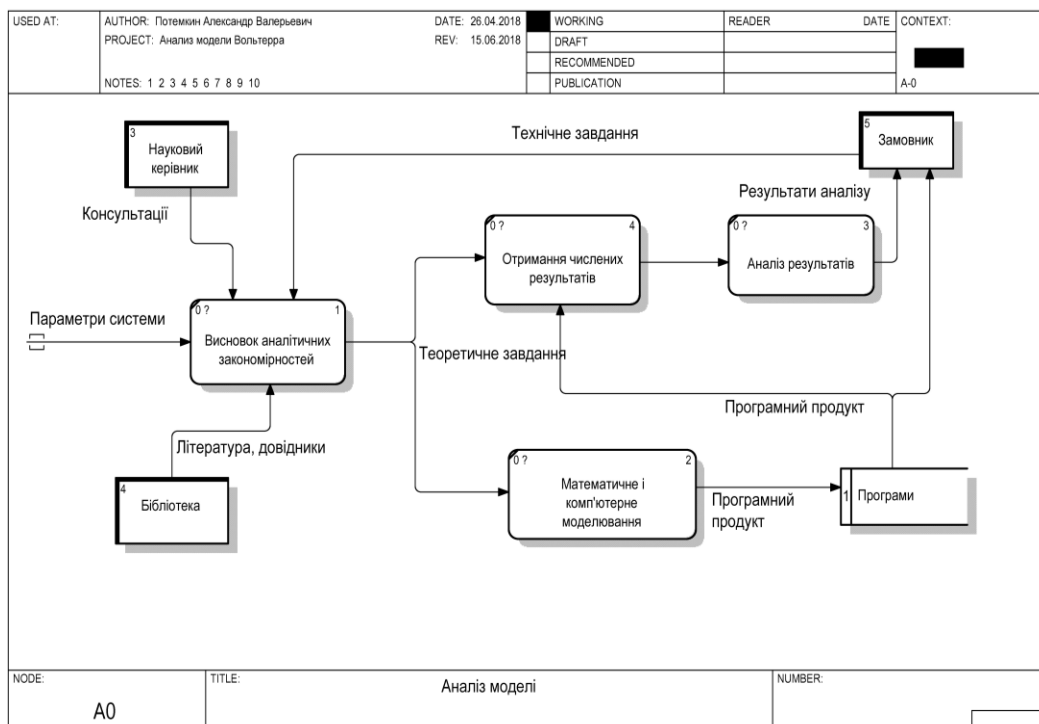


Рисунок 1.4 – DFD-діаграма

В ході декомпозиції отриман наочний зв'язок внутрішніх завдань із зовнішніми об'єктами. Визначені всі інформаційні потоки, що дозволяє забезпечити подання інформації та забезпечити цілісність її сприйняття.

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми моделювання неавтономної системи з захистом при регулярному збуренні

1.2.1 Вибір критеріїв якості та розрахунок вектору локальних пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для детального вивчення системи і отримання вихідних даних необхідно визначитися з середовищем в якому ми будемо проводити обчислення, а саме з мовою програмування. Підбір відповідної мови програмування може позначитися на швидкості та точності обчислень як в кращу сторону, так і в гіршу.

Визначимося з критеріями які будуть оптимальними:

Критерій 1 (K1): Середня швидкість обчислень;

Критерій 2 (K2): Велика кількість математичних функцій;

Критерій 3 (K3): Простота реалізації;

Критерій 4 (K4): Власні знання мови.

Спочатку сформуємо матрицю попарних порівнянь для елементів першого рівня ієрархії, тобто матрицю попарних порівнянь важливості критеріїв.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

	K1	K2	K3	K4
K1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
K2	5	1	2	3
K3	6	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{7}$
K4	7	$\frac{1}{3}$	7	1

Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв міститься в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв

	K1	K2	K3	K4	Середнє геометричні за рядками	Вектор пріоритетів
K1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\bar{p}^K = (0,0498; 0,4437; 0,3284; 0,1781)^T$	$p_1^K = 0,0498$
K2	5	1	2	3	$x_2 = 2,3403$	$p_2^K = 0,4437$
K3	6	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{7}$	$x_3 = 1,7321$	$p_3^K = 0,3284$
K4	7	$\frac{1}{3}$	7	1	$x_4 = 0,9391$	$p_4^K = 0,1781$
					$\Sigma = 5,2742$	

Знаходимо суми елементів матриці за допомогою стовпців:

$$y_1 = 1 + 5 + 6 + 7 = 19,$$

$$y_2 = \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 2,0333,$$

$$y_3 = \frac{1}{6} + 2 + 1 + 7 = 3,5,$$

$$y_4 = \frac{1}{7} + 3 + \frac{1}{7} + 1 = 7,143.$$

Тоді λ_{\max}^K прийме значення:

$$\lambda_{\max}^K = 19 \cdot 0,0498 + 2,0333 \cdot 0,4437 + 3,5 \cdot 0,3284 + 7,143 \cdot 0,1781 = 4,2698.$$

Індекс узгодженості:

$$CI^K = \frac{4,2698 - 4}{4 - 1} = 0,0899.$$

Оскільки матриця попарних порівнянь критеріїв є матрицею четвертого порядку, то $RI^K = 0,9$, і ставлення узгодженості:

$$CR^K = \frac{0,0899}{0,9} = 0,0999.$$

Оскільки відношення узгодженості менше ніж 0,1, то вважаємо, що матриця попарних порівнянь критеріїв побудована правильно. Вектор локальних пріоритетів щодо проблеми вибору дорівнює:

$$\bar{p}^K = (0,0498; 0,4437; 0,3284; 0,1781)^T.$$

Розшифровуючи значення вектора локальних пріоритетів можна сказати, що головним пріоритетом є велика кількість математичних функцій. Далі за важливістю в порядку убутання слід простота реалізації. Далі власні знання мови. Потім – середня швидкість обчислень.

Далі формуємо матриці попарних порівнянь альтернатив (мов програмування) за кожним критерієм.

1.2.2 Вибір альтернатив та розрахунок векторів локальних пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Альтернативами будуть мови програмування з допомогою яких ми можемо проводити обчислення:

Альтернатива 1 (A1): Python;

Альтернатива 2 (A2): C#;

Альтернатива 3 (A3): PHP;

Альтернатива 4 (A4): Wolfram Mathematica.

Побудуємо матриці попарних порівнянь альтернатив за обраними критеріями.

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К1

К1	A1	A2	A3	A4
A1	1	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{4}$
A2	3	1	3	$\frac{1}{3}$
A3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$
A4	4	3	6	1

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К2

К2	A1	A2	A3	A4
A1	1	3	4	$\frac{1}{2}$
A2	$\frac{1}{3}$	1	3	$\frac{1}{4}$
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$
A4	2	4	6	1

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К3

К3	A1	A2	A3	A4
A1	1	3	5	$\frac{1}{2}$
A2	$\frac{1}{3}$	1	2	$\frac{1}{4}$
A3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$
A4	2	4	6	1

Таблиця 1.6 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К4

К4	A1	A2	A3	A4
A1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
A2	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
A3	5	3	1	$\frac{1}{2}$
A4	6	5	2	1

Для кожної матриці (аналогічно як і для матриці попарних порівнянь критеріїв) розраховуємо вектори локальних пріоритетів:

$$\vec{p}_1^A = \begin{pmatrix} 0,0133 \\ 0,0248 \\ 0,0695 \\ 0,5491 \end{pmatrix}, \vec{p}_2^A = \begin{pmatrix} 0,2950 \\ 0,1333 \\ 0,0647 \\ 0,4962 \end{pmatrix}, \vec{p}_3^A = \begin{pmatrix} 0,3119 \\ 0,1204 \\ 0,0677 \\ 0,4962 \end{pmatrix}, \vec{p}_4^A = \begin{pmatrix} 0,0677 \\ 0,1139 \\ 0,3119 \\ 0,5246 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриці попарних порівнянь альтернатив – це матриці четвертого порядку, то $RI^A = 0,9$. Індеси узгодженості і відношення узгодженості для матриць парних порівнянь альтернатив за кожним критерієм рівні:

$$CI_{K1}^A = 0,0444, CI_{K2}^A = 0,0083, CI_{K3}^A = 0,0084, CI_{K4}^A = 0,0373,$$

$$CR_{K1}^A = 0,0494, CR_{K2}^A = 0,0092, CR_{K3}^A = 0,0093, CR_{K4}^A = 0,0234.$$

Всі відносини узгодженості менше, ніж 0,1, що свідчить про хорошу узгодженість думок експерта.

1.2.3 Оцінка узагальнених пріоритетів

Розрахуємо вектор глобальних пріоритетів альтернатив.

Для цього з вектора локальних пріоритетів альтернатив за кожним критерієм складемо матрицю:

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,0133 & 0,2950 & 0,3119 & 0,0677 \\ 0,0248 & 0,1333 & 0,1204 & 0,1139 \\ 0,0695 & 0,0647 & 0,0677 & 0,3119 \\ 0,5491 & 0,4962 & 0,4962 & 0,5246 \end{pmatrix}$$

і скористаємося формулою

$$\vec{p} = P^A \vec{p}^K.$$

Отже, вектор глобальних пріоритетів дорівнює:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0,0133 & 0,2950 & 0,3119 & 0,0677 \\ 0,0248 & 0,1333 & 0,1204 & 0,1139 \\ 0,0695 & 0,0647 & 0,0677 & 0,3119 \\ 0,5491 & 0,4962 & 0,4962 & 0,5246 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0498 \\ 0,4437 \\ 0,3284 \\ 0,1781 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2460 \\ 0,1202 \\ 0,1100 \\ 0,5039 \end{pmatrix}.$$

Розраховуємо індекс узгодженості і відношення узгодженості для всієї ієрархії:

$$CI = 0,105, RI = 1,8, CR = 0,0583,$$

що є дуже хорошою узгодженістю.

Максимальна компонента вектора глобальних пріоритетів відповідає четвертій альтернативі, тобто пропонується вибрати Wolfram Mathematica.

1.3 Змістова та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістова постановка задачі

Промислове виробництво завжди було і продовжує залишатися одним з найважливіших елементів економіки України. Воно не є безпечним в принципі, і вже неабияк застаріло морально та фізично. У зв'язку з цим, пристрої та системи захисту персоналу і навколишнього населення, в купі з дослідженням систем що їх об'єднують, на сьогодні є особо актуальною темою [1, 2, 3, 4]. Відомо, що ефективність та безпека виробництва є суперечливими критеріями, та об'єднання цих критеріїв в єдиний можливо лише в надсистемі [5, 6, 7]. За допомогою такого підходу з'явилася можливість розглядання моделі «людина-машина-середовище з захистом» як модель конкуренції ефективності та безпеки [8, 9, 10].

Розглянемо систему «Людина-Машина-Середовище», вхідними даними

для неї є інформація з вищої системи; виходом буде результат роботи системи [7]. Внутрішній стан системи може змінюватися під час її роботи. Елемент «людина» має декілька функціональних частин: що керує «машиною» та об'єкт впливу зовнішнього середовища і «машини».

Елемент «машина» здійснює дві технологічні функції: основна – вплив на предмет праці і побічна – зміна параметрів навколишнього середовища.

У роботі продемонстровані різні типи загальних моделей «людина-машина-середовище». Вони адекватно описують деякі практично важливі якості об'єктів, а всі разом – описують об'єкт з точки зору його безпечного функціонування [2, 8]. Подальша їх деталізація приводить до відомих та до деяких нових моделей підсистем [11, 12, 13]. Ця робота розрахована на кількісний аналіз системи із захистом людини від факторів: зовнішнього шкідливого впливу середовища та впливу підсистеми «машина». Відзначимо, що об'єктом впливу системи захисту буде технічна система, котра виробляє шкідливий фактор, а не об'єкт захисту.

Розглянемо класи ергатичних систем з захистом та їх процеси, як об'єкти моделювання:

– система не являє собою об'єкт, замість цього об'єктами являються класи та їх загальні властивості;

– параметрична ідентифікація моделей має свою специфіку, так як особливий інтерес тут представляє собою порядок величин та швидкість їх зміни, а не значення конкретних параметрів. Також, від порядку величин малого параметру можна визначити, сингулярна модель чи ні та адекватність застосування асимптотичних методів [14, 15, 16];

– враховуючи катастрофічність дослідних процесів, деякі замірювання та їх протікання неможливі на реальних об'єктах, однак на полігонах навпаки. Числові значення параметрів процесів можуть бути нестабільні та мають залежність від часу й від нескінченного числа зовнішніх факторів, впорядкування яких представляється можливістю тільки під час процесу модельного експерименту [11];

– отже, можна зробити висновок, що кращим способом буде розглядання параметричної сталості системи та її моделі, замість конкретних значень параметрів.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Досліджується система з двох диференціальних рівнянь (1.1), яка описує поведінку системи захисту від шкідливих впливів. У загальному випадку, система має вигляд:

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ z'(t) = F(u(t), z(t)), \end{cases} \quad (1.1)$$

при обмеженнях $u \geq 0$, $z \geq z_c$,

де z_c – величина стаціонарного захисту;

$u(t)$ – це функція шкідливості;

$z(t)$ – функція захисту.

Функція $F(u(t), z(t))$ може приймати вигляд:

а) $F(u(t), z(t)) = \gamma u(t)$;

б) $F(u(t), z(t)) = \gamma u(t) - \delta z(t)$.

Структура роботи представлена наступними пунктами:

- вибір коефіцієнтів систем з фізичного представлення завдання;
- аналіз і перетворення моделей;
- розглянути особливості хаотизації поведінки моделей;
- чисельний аналіз збурених моделей і порівняння результатів;
- побудова перших двох членів асимптотики.

1.4 Постановка задач дослідження

Дослідження будемо проводити аналітичними та чисельними методами розв'язку систем диференціальних рівнянь (1.1), аналізу їх стійкості за першим наближенням, перетворенням, синусоїдальним збуренням, побудуємо перші два члена асимптотики .

Виберемо коефіцієнти системи (1.1) з фізичного змісту задачі і будемо використовувати їх далі:

$$\alpha = 15, \beta = 4, \gamma = 1,5, \delta = 3, m = 10. \quad (1.2)$$

Так само потрібно задати початкові умови для того, щоб отримати чисельний розв'язок.

$$\begin{aligned} z[0] &= 0 + \varepsilon, & u[0] &= 0 + \varepsilon, \\ z[0] &= \frac{\alpha}{\beta} + \varepsilon, & u[0] &= \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} + \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де $\varepsilon = 0,0001$.

Розглянемо задачу на проміжку часу $t \in [0; 20]$.

Біфуркаційний параметр Ω оберемо близький до одиниці:

$$\Omega = 1. \quad (1.4)$$

Тепер можна приступати до побудови розв'язків системи диференціальних рівнянь (1.1) з параметрами (1.2), (1.4) і початковими умовами (1.3).

2 ВИБІР МЕТОДУ ТА ОБГРУНТУВАННЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Аналіз систем динамічного захисту з швидкими і повільними фазовими змінними

Динамічні системи включають в себе велику кількість процесів з різним характерним часом. Відзначимо, що ієрархія часів така, що процеси розрізняються, при чому, на багато порядків. [17, 18, 19, 20].

Основна задача моделювання полягає в побудові моделі явища, яке містить найменше число змінних і довільних параметрів й одночасно якомога краще розкриває властивості явища [21, 22].

За допомогою обліку часової ієрархії процесів можна зменшити кількість диференціальних рівнянь. «Повільні» змінні вважаються постійними параметрами, так як вони не є змінними на часі розглянутих процесів. Для «швидких» змінних замість диференціальних рівнянь можна записати алгебраїчні рівняння їх стаціонарних значень, це обумовлено тим, що свої стаціонарні значення «швидкі» змінні досягають майже миттєво у порівнянні з «повільними» [18, 23, 24].

Системи з захистом поділені (умовно) на два великі класи.

Клас 1. Класичні (структуровані рис. 2.1) – система захисту та об'єкт являються фізично розділеними підсистемами але, які пов'язані інформаційно (датчиками) та фізично (ефекторами).

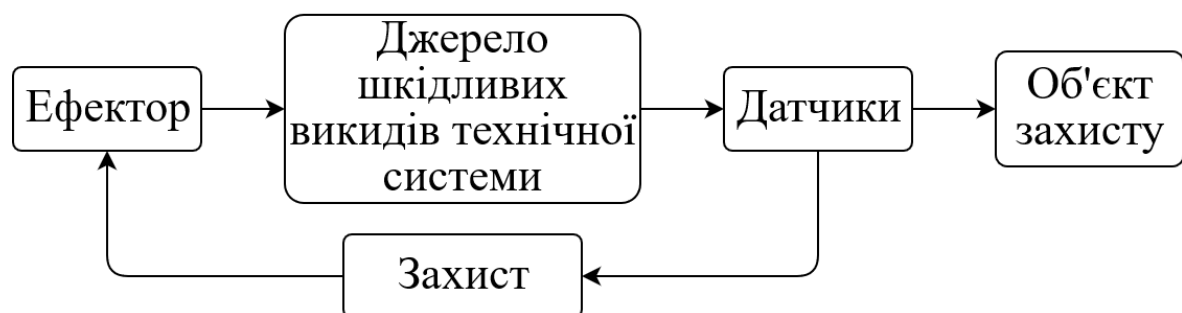


Рисунок 2.1 – Класи систем з захистом (структуровані)

Клас 2. Синергетичні – захист і об'єкт (рис. 2.2) [21, 22] фізично об'єднані й обмінюються матеріальними та енергетичними потоками (без операторів та вимірювальних пристроїв).

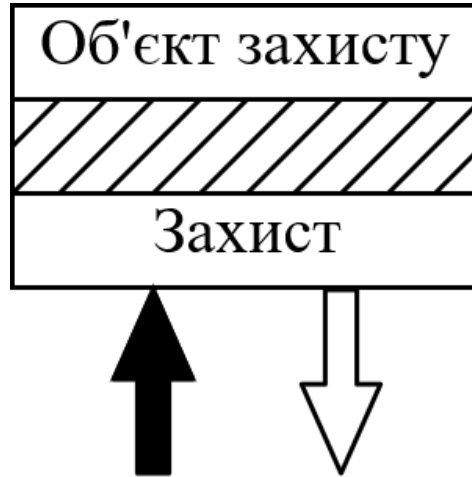


Рисунок 2.2 – Класи систем з захистом (синергетичні)

До перших належить велика кількість виробничих систем, а також немало інших технічних систем.

До другого відноситься пожежонебезпечний об'єкт, навколо якого знаходиться речовина, при спалахуванні якої, покриває його герметичним шаром, в який не попадає кисень. Ці класи об'єктів мають нелінійну динаміку та реалізують загальний принцип негативного зворотного зв'язку; об'єкт – виробник шкідливості і захист, як нелінійний регулятор.

2.2 Аналіз проблеми стійкості нелінійних динамічних систем із захистом

Теорема про лінеаризацію показує зв'язок фазових портретів нелінійної системи в околиці деякої нерухомої точки та її лінеаризацією [25].

Початок координат – проста нерухома точка системи:

$$\dot{y} = X(y), \quad y \in S \subseteq R^2,$$

при умові простоти лінеаризованої системи.

Дане визначення розширює поняття простоти на нерухомі точки нелінійних систем. Його застосують, коли інформація, в якій ми зацікавлені – це особлива точка, що не знаходиться в початку координат; в цьому випадку необхідно ввести локальні координати.

Припустімо, що нелінійна система має постійну точку $y=0$. Фазові портрети системи та її лінеаризації, в околиці початку координат, якісно еквівалентні, тільки якщо постійна точка лінеаризованої системи не являється центром [26].

Маємо істотне спрощення в обчисленнях, бо з лінійними компонентами нової системи зручніше проводити якісний аналіз, аніж з нелінійними [27].

Теорема про лінеаризацію лежить в основі методу дослідження стійкості за лінійним наближенням. Застосовуючи на практиці теорему лінеаризації, добиваються оцінки ступені й типу незмінності стаціонарних точок. Аналогічно застосуванні теореми про лінеаризацію в системах із захистом – розглянуті при аналізі конкуренції в економічних системах та класичних моделей екології, а також в ІТ-технологіях [28, 29, 30, 31, 32, 33].

2.3 Неавтономна регулярна модель із збуренням правої частини

2.3.1 Проблеми в регулярних системах із захистом

Ефект хаотизації рухів в детермінованих нелінійних системах, ще нещодавно здавалося просто небувалим в рамках традиційних шаблонів теорії коливань й класичної механіки, сьогодні викладається як науково обґрунтоване явище фундаментальної значущості. Зацікавленість до цієї тематики все продовжує збільшуватися, про що свідчить великий приріст наукової інформації [34, 35]. В екологічних системах можливі сценарії переходу до

хаотичного руху через біфуркації, це продемонстровано у роботах [36, 37]. Модель Вольтерра та її доповнення широко використовується, наприклад, в роботах [29, 38, 39].

Теорія враховує, що при наявності деяких типів зовнішніх чинників середовища на таку систему, її стійкість може порушуватися та рух набувати квазівипадкового вигляду [34, 27].

2.3.2 Математичний опис і модель об'єкта

Розглядаємо замкнуту систему двох об'єктів:

а) «об'єкт захисту» – необмежено генерує шкідливий чинник у відсутності підсистеми захисту;

б) «захист» – дія визначається величиною шкідливого фактору.

Обидві змінні досить великі і змінюються гладко в часі.

Базова модель Вольтерра – спільна робота об'єкта і захисту:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx - \gamma_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -sy + \gamma_2 xy,\end{aligned}\tag{2.1}$$

де r , s , γ_1 , γ_2 – позитивні константи, в екології часто звані «мальтузіанськими» і «трофічними» коефіцієнтами, відповідно;

x – інтенсивність шкідливого фактору ($x \gg 1$);

y – інтенсивність роботи захисту ($y \gg 1$).

У випадках синусоїдального збурення базової моделі для чисельного аналізу задачі Коші типу (2.1), відповідні моделі наводяться до форми:

$$Z' = f(Z, m, \Omega, t),\tag{2.2}$$

де $f(Z, m, \Omega, t) = F(Z) + P(m, \Omega t)$, $Z^T = (x(t), y(t))$, з начальними умовами $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ для кожної траєкторії.

Проблема полягає в дослідженні поведінки системи, яка характеризується близькістю періоду T циклів незбуреної системи і періоду збурення $(1/\Omega)$.

Тут m і Ω – біфуркаційні параметри всіх часткових моделей, отриманих з базової (2.1). Поведінка моделей досліджується далеко від початку $t \gg 1$.

Для розглянутих моделей збурюючи доданки в (2.2) мають вигляд:

$$P_1(m, \Omega, t) = \begin{pmatrix} m \sin \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2(m, \Omega, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ m \sin \Omega t \end{pmatrix},$$

$$P_3(m, \Omega, t) = \begin{pmatrix} m \sin^2 \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4(m, \Omega, t) = \begin{pmatrix} m \sin(\Omega t + \alpha) \\ m \sin \Omega t \end{pmatrix}.$$

2.3.3 Хаотична втрата стійкості

Розглянемо відому задачу спільного існування двох видів (завдання Лотка-Вольтерра). Нехай фізичні і біологічні фактори викликають періодичну зміну абсолютної і відносної швидкості вимирання хижаків:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx - \gamma_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -S(t)y + \gamma_2 xy + n \cos \Omega t, \end{aligned} \tag{2.3}$$

де $S(t) = s \left(1 + \frac{n}{s} \cos \Omega t \right)$, а Ω – частота періодичних збурень, близька до частоти граничного циклу без збурень.

Автономна система, відповідна (2.3), при $n = 0$ має нетривіальний стан рівноваги:

$$x_* = s / \gamma_2, \quad y_* = r / \gamma_1.$$

Зробимо заміну змінних:

$$\xi = x - x_*, \quad \eta = y - y_*.$$

Тоді система (2.3) перетворюється до вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\gamma_1(x_*\eta + \xi\eta), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \gamma_2(y_*\xi + \xi\eta) + (n - ny_*)\cos\Omega t - m\eta\cos\Omega t. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Нехай параметри такі, що

$$s = r = \gamma_1 = \gamma_2 = 1,$$

тоді рівняння (2.4) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -(\eta + \xi\eta), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi + \xi\eta - m\eta\cos\Omega t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В змінних ρ , θ система (2.5) запишеться так:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -2\rho^2 \sin\theta \cos\theta (\cos\theta - \sin\theta) - n\rho \sin^2\theta \cos\Omega t, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1 + 2\rho \sin\theta \cos\theta (\cos\theta + \sin\theta) - n \sin\theta \cos\theta \cos\Omega t. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Межа області періодичних траєкторій визначається з умови $d\theta/dt = 0$ та для руху близького до синхронного має вигляд:

$$\rho^*(\psi) = \frac{-1 + n \sin \psi \cos^2 \psi}{2 \sin \psi \cos \psi (\cos \psi + \sin \psi)}, \quad (2.7)$$

де $\theta = \psi$, $\psi = \Omega t$.

На рис. 2.3 область періодичних траєкторій позначена буквою P , аперіодичних – D . В системі (2.6) має місце тривіальний розв'язок (квазістатичний):

$$\rho^0(\psi) = \frac{n \sin \psi}{2(\cos \psi + \sin \psi)}, \quad (2.8)$$

на субінтервалах $(\pi/4, \pi)$, $(5\pi/4, 2\pi)$ для руху, близького до синхронного. Характеристичні показники розв'язків (2.8) мають вигляд:

$$\lambda_1 = n \sin^2 \psi \cos \psi, \quad \psi \in (\pi/4, \pi), (5\pi/4, 2\pi).$$

Розв'язок (2.8) є симетричним на напівперіодах разом з точками розриву $(\psi = \pi/4, \psi = 5\pi/4)$ та представлено на рис. 2.4.

Тут $0(-)$, $0(+)$ означає притягання и відштовхування від нуля; > 0 , < 0 – знак λ_1 із виразу (7) на відповідному субінтервалі.

На субінтервалах $(0, \pi/2)$, $(\pi, 3\pi/2)$ частота несиметрична. Цю особливість можна замінити по розташуванню аперіодичних областей на рис. 2.3. Для малих значень параметру n зображуюча точка не потрапляє в область аперіодичних траєкторій і має на полуперіодах розв'язків (2.8) частоту:

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{\rho=\rho^0} = 1 + \frac{n \sin \psi}{(\sin \psi - \cos \psi)}. \quad (2.9)$$

Згідно з формулою (2.9) на розв'язок (2.8) для $\psi \in (\pi/2, \pi)$ частота дорівнює:

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{\rho=\rho^0} = 1 - \frac{n |\sin \psi| |\cos \psi|}{|\sin \psi| + |\cos \psi|}.$$

Для $\psi \in (3\pi/2, 2\pi)$:

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{\rho=\rho^0} = 1 + \frac{n |\sin \psi| |\cos \psi|}{|\sin \psi| - |\cos \psi|}.$$

З фізичної точки зору ця особливість руху не допускає існування синхронності в системі. Рух стійкий в силу симетричності розв'язків та перехідний в силу несиметричності частоти.

Для несинхронних θ , ψ (близьких) $d\rho/dt$ на субінтервалах $(0, \pi/2)$, $(\pi, 3\pi/2)$ та квазістатичний розв'язок:

$$\frac{n \sin \theta \cos \psi}{2 \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} = \rho^0(\theta) \frac{\cos \psi}{\cos \theta},$$

де θ, ψ належить субінтервалам $(\pi/4, \pi), (5\pi/4, 2\pi)$, також кососиметричні.

Принцип симетрії для несинхронних θ, ψ формулюється так: розв'язки притягаються до нуля ($0(-)$) для несинхронних $\theta, \psi \in (0, \pi/2), (3\pi/2, 2\pi)$ та відштовхуються від нуля ($0(+)$) для $\theta, \psi \in (\pi/2, \pi), (\pi, 3\pi/2)$ з однаковою швидкістю $|d\rho/dt|$. Таким чином, коливання ідентифікуються з биттям.

Зауважимо, що рівність (2.7) визначає границі коливань, близьких до синхронних, так як в силу несиметричності частот синхронізм, як явище, не існує.

Дамо формальне означення симетрії еволюції рівнянь (2.6) для несинхронних (близьких) θ, ψ . Нехай $R(\rho, \theta, \psi)$ – неперервна диференційна функція при $0 \leq \rho < \infty, -\infty \leq \theta < \infty, -\infty \leq \psi < \infty$, 2π -періодична по θ, ψ . Тут $R(\rho, \theta, \psi)$ – права частина першого рівняння системи (2.6).

Означення. Якщо існує дифеоморфізми $g(\theta), g(\psi); \theta, \psi \in T$ (область T відповідає $\theta, \psi \in T, (\theta + \pi), (\psi + \pi) \in T, \theta, \psi \in (0, \pi)$). Має місце співвідношення:

$$R(\rho, g(\theta), g(\psi)) = -R(\rho, \theta, \psi),$$

то еволюція системи (2.6) g -інваріантна.

Покладемо $g(\theta) = \theta + \pi, g(\psi) = \psi + \pi$, тоді

$$R(\rho, \theta + \pi, \psi + \pi) = -R(\rho, \theta, \psi), \theta, \psi \in (0, \pi).$$

Еволюція системи g -інваріантна, частота не має g -інваріантності.

Таким чином, при досить малих значеннях параметра n розв'язок не

потрапляє в область аперіодичних траєкторій та в системі реалізується биття.

Характеристичні показники розв'язків при біфуркації для руху, близьких до синхронних. В момент біфуркації ($\psi = \psi_*$), характеризує зникнення коливання, з'являються аперіодичні змінні ρ_* , $-\rho_*$. Відхилення або варіації величин ρ_* , $-\rho_*$ позначимо через $\delta\rho_1$ та $\delta\rho_2$ відповідно. Внесемо значення $\rho_* + \delta\rho_1$, $-\rho_* + \delta\rho_2$ в диференціальне рівняння. Система збурень рівнянь в момент біфуркації запишеться так:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\rho_1}{dt} &= -2(2\rho_*\delta\rho_1 + \delta\rho_1^2)\sin\psi_*\cos\psi_*(\cos\psi_* - \sin\psi_*) - n\delta\rho_1\sin^2\psi_*\cos\psi_*, \\ \frac{d\delta\rho_2}{dt} &= -2(-2\rho_*\delta\rho_2 + \delta\rho_2^2)\sin\psi_*\cos\psi_*(\cos\psi_* - \sin\psi_*) - n\delta\rho_2\sin^2\psi_*\cos\psi_*.\end{aligned}$$

Тут ρ_* , ψ_* – біфуркаційні значення змінних ρ , ψ ; $\psi_* \in (\pi, 3\pi/4)$.

Характеристичні показники аперіодичних розв'язків мають вигляд:

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= -4\rho_*^*\sin\psi_*\cos\psi_*(\cos\psi_* - \sin\psi_*) - n\sin^2\psi_*\cos\psi_*, \\ \lambda_2^* &= 4\rho_*^*\sin\psi_*\cos\psi_*(\cos\psi_* - \sin\psi_*) - n\sin^2\psi_*\cos\psi_*.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Згідно з виразом (2.10), λ_1^* , λ_2^* можуть мати протилежні знаки і тоді сигнатура характеристичних показників розв'язків мають вигляд “-”, “0”, “+”. Таким чином, біфуркація вносить в силу порушення симетрії характеристичних показників нестійкості та “вихід” траєкторії на безкінечність. На рис. 2.4 приведена втрата стійкості граничного циклу ($n=0,15$; $\xi_0 = \eta_0 = 0,1$). Тут початкові збурення ξ_0 , η_0 вибрані так, щоб при $n=0$ траєкторія знаходилась в області тяжіння до особливої точки (x_*, y_*) в системі координат Oxy .

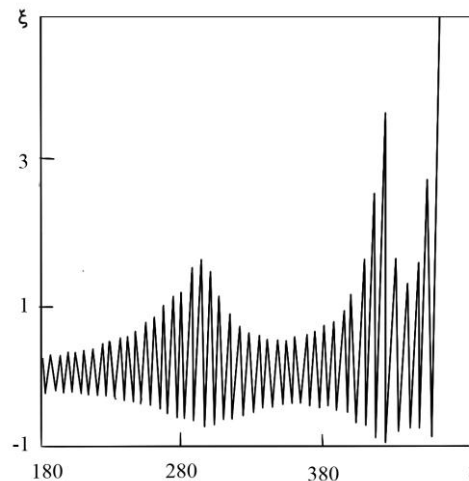


Рисунок 2.5 – Втрата стійкості граничного циклу

2.4 Узагальнена диференціальна модель

Деталізація моделювання досліджуваних явищ має залежність від мети моделювання, інтенсивності шкідливих факторів або біовпливу та визначається системою диференціальних рівнянь в формі Коші, а саме їх правою частиною (рис. 2.6) [40]. Функції F та Φ правої частини моделі задовольняють умовам для систем із захистом, розглянутих у розділі 2.2.

Облік конкретного типу взаємодій між об'єктом, що справляє шкідливий чинник, та системою захисту, приводить до першого типу моделі класу рівнянь, що описують систему захисту. Розглянемо два види наближень функції F : пропорційне і лінійне. Модель включає різницю в порядку величин швидкостей та нелінійність і описує захисну реакцію на різні катастрофи які виникають на виробничих об'єктах.

До другого типу відносяться постійні нестационарні системи з подібними за швидкостями процесами та змінними під час роботи параметрами (неоднорідні диференціальні системи).

Такі моделі називають «м'якими» [41], вони описують клас об'єктів з топологічно подібними фазовими просторами. Частіше всього зустрічається варіант взаємодії двох чинників, реалізований в першому рівнянні (2.1).

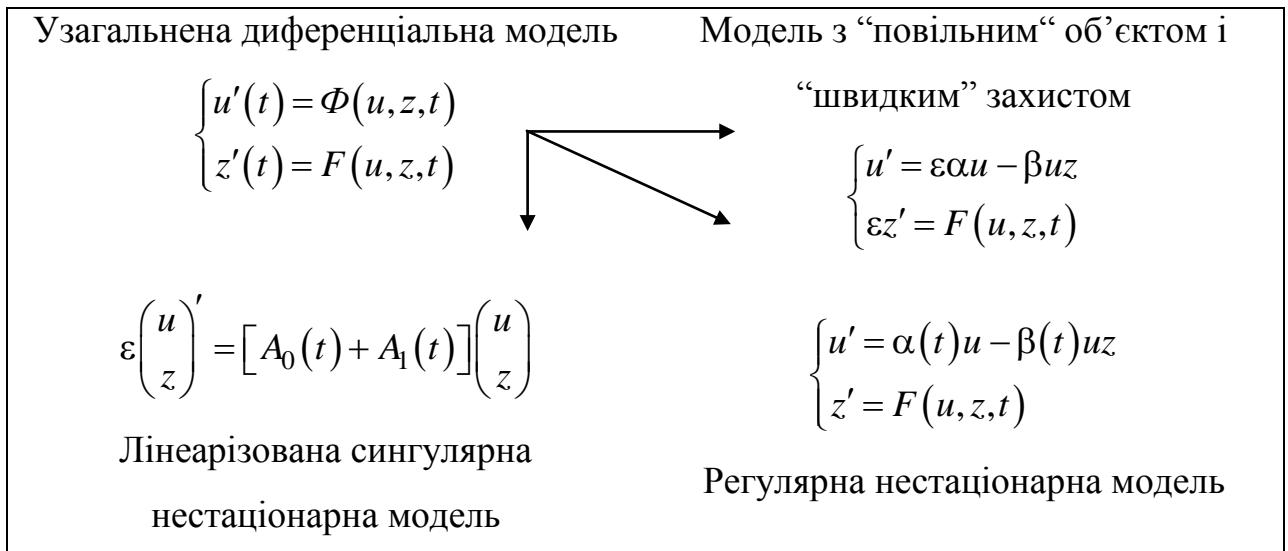


Рисунок 2.6 – Аналіз динамічних моделей систем з захистом

Помітимо, ці властивості виходять із загальних принципів і не мають якісної залежності від технічного об’єкту, захисту і характеру шкідливого фактору, виділяемого їм (повінь, пожежа).

Для розв’язання завдання аналізу динаміки системи з захистом необхідно в першу чергу розв’язати систему виду (2.11), де значення α , β , γ , δ , z_0 , C_0 , можуть бути довільними, гладкими функціями часу.

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z u(t), \\ z'(t) = F(u(t), z(t)). \end{cases} \quad (2.11)$$

Розглянемо дві моделі, де $F(u(t), z(t))$ може приймає один з наступних видів.

Пропорційна модель:

$$F(u(t), z(t)) = \gamma u(t).$$

Швидкість роботи захисту збільшується пропорційно викидам шкідливого фактору. Так, наприклад, швидкість виділення активної речовини,

за допомогою якої гасять полум'я, зростає пропорційно температурі на початковій стадії гасіння пожежі.

Лінійна модель:

$$F(u(t), z(t)) = \gamma u(t) - \delta z(t).$$

Швидкість зменшується в міру вичерпання активної речовини.

Подалі в формулах, які містять u і z , їх залежність від t буде неявно матися на увазі. Отже, процес дослідження задачі аналізу та моделювання роботи систем з захистом буде складатися з наступних етапів:

а) шукаємо аналітичні розв'язки системи (2.11), якщо розв'язок не вдається знайти в загальному вигляді, тоді розв'язуємо чисельно;

б) після знаходження розв'язків системи (2.11), аналізуємо функцію шкідливості – моменти часу, коли значення функції перевищують значення стаціонарного захисту – спрацьовує система захисту. Після знаходження цих інтервалів часу, вирішуємо: посилити вплив на шкідливий чинник (збільшитися вартість системи захисту), залишити систему без змін або зменшити стаціонарний захист (зменшаться витрати на систему безпеки);

в) вибираємо розв'язки кроку б), окрім «залишити систему без змін», повторюємо перші два кроки, поки не зійдемо за рамки обмежень (час роботи системи або її вартість).

2.5 Дослідження системи

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (2.11) с підстановкою $F(u(t), z(t))$. Зауважимо, що розглядається система в якій коефіцієнти α , β , γ , δ – додатні. Отримаємо 2 системи для аналізу:

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ z'(t) = \gamma u(t), \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ z'(t) = \gamma u(t) - \delta z(t). \end{cases} \quad (2.13)$$

2.5.1 Дослідження стійкості систем

Для системи (2.12) визначимо положення рівноваги з системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{dz}{dt} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha u - \beta z u = 0, \\ \gamma u = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0, \\ z \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Обчислимо елементи Якобіана J :

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \alpha - \beta z, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -\beta u, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = \gamma, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0.$$

Введемо параметр $z = a$, де a – точка на вертикальній прямій z , $a \in \mathbb{R}^+$ та обчислимо характеристичні значення якобіану в $(u = 0, z = a)$:

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ z=a}} = \alpha - \beta a, \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial z} \right|_{\substack{u=0 \\ z=0}} = 0, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ z=0}} = \gamma, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial z} \right|_{\substack{u=0 \\ z=0}} = 0.$$

Складемо матрицю Якобі та знайдемо власні значення:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - \beta a & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(J - \lambda I) = 0, \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha - \beta a - \lambda & 0 \\ \gamma & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow -\lambda(\alpha - \beta a - \lambda) = 0,$$

звідки $\lambda_1 = \alpha - \beta a$, $\lambda_2 = 0$. Розглянемо 2 випадки параметру a :

а) $a > 0$. Так як коефіцієнти α , β – позитивні константи, тоді добуток $-\beta a < 0$;

1) при $\alpha < \beta a$, маємо $\lambda_1 < 0$. Можна зробити висновок $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$ – стійка пряма;

2) при $\alpha > \beta a$, маємо $\lambda_1 > 0$. Можна зробити висновок $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ – нестійка пряма;

б) $a = 0$. Так як коефіцієнти α , β – позитивні константи, тоді при $a = 0$ маємо $\lambda_1 = \alpha$, де $\alpha > 0$. Можна зробити висновок $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ – нестійка пряма.

Аналогічно робимо і для системи (2.13).

Визначимо положення рівноваги з системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0, \\ \frac{dz}{dt} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha u - \beta z u = 0, \\ \gamma u - \delta z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = 0, \\ z = 0, \end{cases} \\ u = \frac{\alpha \delta}{\beta \gamma}, \\ z = \frac{\alpha}{\beta}. \end{cases}$$

Обчислимо елементи Якобіана J :

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \alpha - \beta z, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -\beta u, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = \gamma, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\delta.$$

В точці рівноваги ($u = 0, z = 0$) вони набувають значень:

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ z=0}} = \alpha, \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial z} \right|_{\substack{u=0 \\ z=0}} = 0, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ z=0}} = \gamma, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial z} \right|_{\substack{u=0 \\ z=0}} = -\delta.$$

Складемо матрицю Якобі та знайдемо власні значення:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix},$$

$$\det(J - \lambda I) = 0, \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 0 \\ \gamma & -\delta - \lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow (-\delta - \lambda)(\alpha - \lambda) = 0,$$

звідки $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\delta$. Так як $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ та $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ можна зробити висновок, що маємо сідлову точку.

Обчислимо елементи Якобіана J в точці $\left(\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$:

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{\substack{u=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \\ z=\frac{\alpha}{\beta}}} = 0, \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial z} \right|_{\substack{u=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \\ z=\frac{\alpha}{\beta}}} = -\frac{\alpha\delta}{\gamma}, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{\substack{u=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \\ z=\frac{\alpha}{\beta}}} = \gamma, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial z} \right|_{\substack{u=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \\ z=\frac{\alpha}{\beta}}} = -\delta.$$

Складемо матрицю Якобі та знайдемо власні значення:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha\delta}{\gamma} \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix},$$

$$\det(J - \lambda I) = 0, \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\alpha\delta}{\gamma} \\ \gamma & -\delta - \lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow -\lambda(-\delta - \lambda) - \gamma\left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma}\right) = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\alpha\delta}}{2}$, можна зробити висновок, що

- а) при $4\alpha > \delta$ – маємо стійкий фокус;
- б) при $4\alpha < \delta$ – маємо стійкий вузол.

Побудуємо графіки систем (2.12)-(2.13) та подивимося на їх поведінку в стаціонарних точках із невеликим зсувом ε . Для системи (2.12) розглянемо для $z = 0$, що задовольняє умові $z \in \mathbb{R}^+$.

Як видно з рис. 2.7, для стаціонарної точки $u = 0, z = 0$ можна зробити висновок, що вона є стійкою точкою системи (2.12) та утворює атрактор.

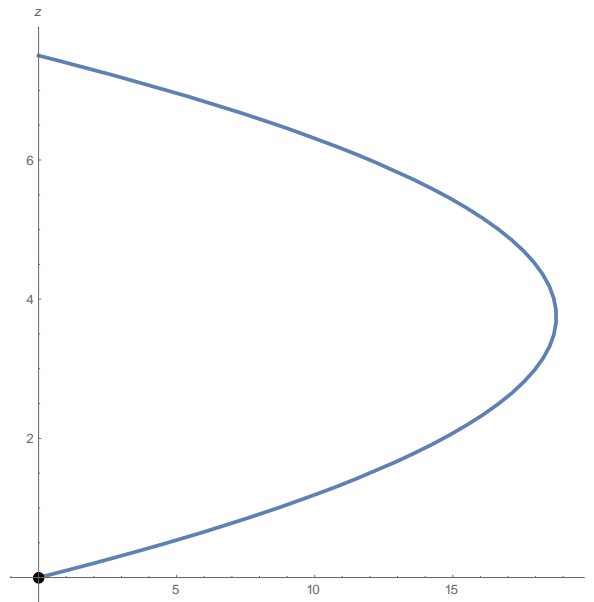
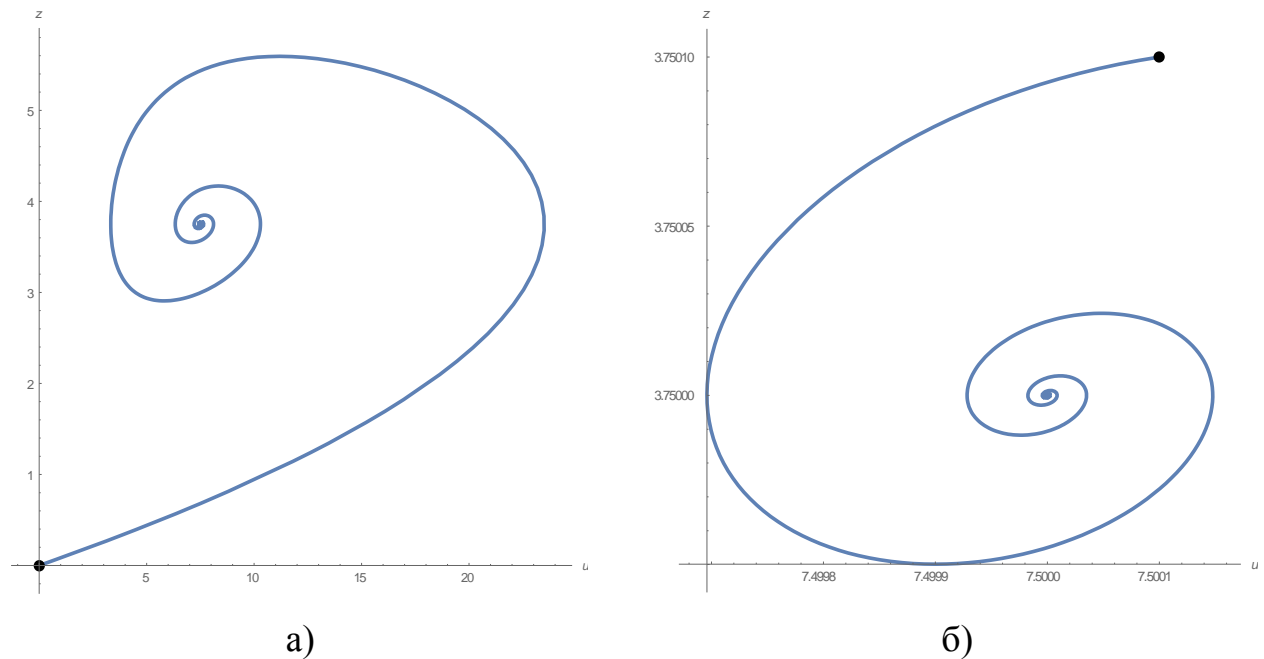


Рисунок 2.7 – Проекція фазової траєкторії з початковою точкою $u = 0 \pm \varepsilon, z = 0 \pm \varepsilon$

Аналогічно робимо для системи (2.13). Система має дві стаціонарні точки $(u = 0, z = 0)$ та $\left(u = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}, z = \frac{\alpha}{\beta}\right)$. Будуємо з невеликим зсувом ε :



а) $u = 0 \pm \varepsilon, z = 0 \pm \varepsilon$; б) $u = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \pm \varepsilon, z = \frac{\alpha}{\beta} \pm \varepsilon$

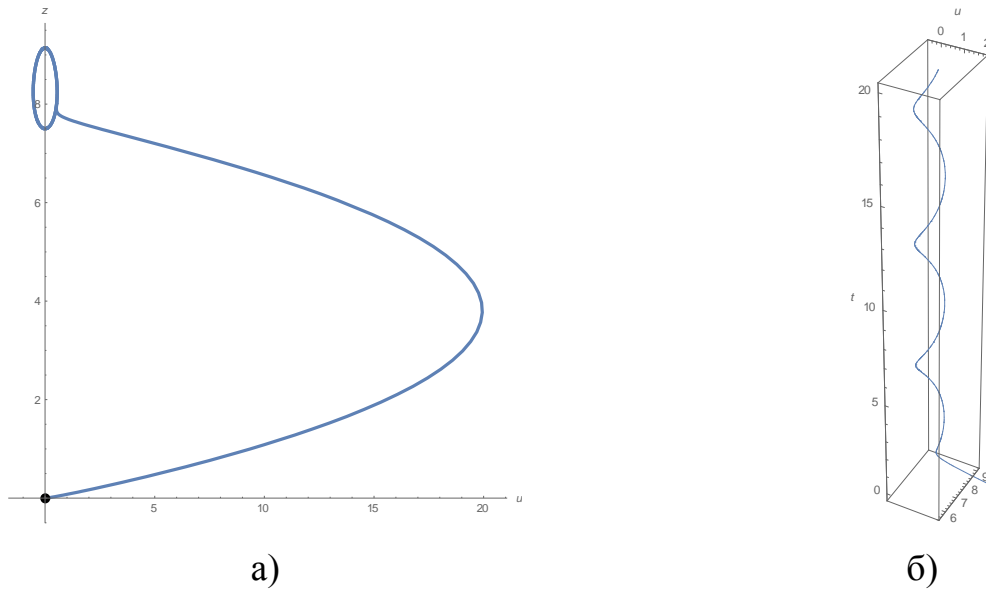
Рисунок 2.8 – Проекції фазових траєкторій з початковими точками

Як бачимо з рис. 2.8, для стаціонарної точки $u = 0, z = 0$ можна зробити висновок, що вона є сідловою точкою системи (2.13), а для $u = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}, z = \frac{\alpha}{\beta}$ – стійка точка системи (2.13) що утворює фокус

2.5.2 Дослідження стійкості систем із збуренням

Застосуємо формулу (2.2) та дослідимо систему при збуренні синусом. Дослідимо систему (2.12), значення амплітуди візьмемо $m = 10$.

Модель 1. Синусоїдальне збурення «інтенсивності виділення шкідливості» $P_1(m, \Omega t)$.

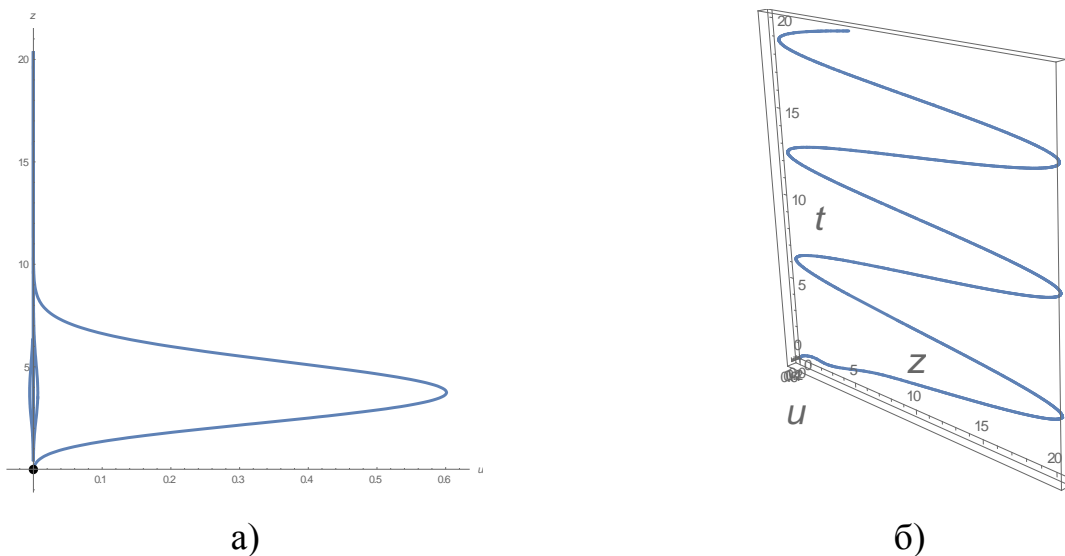


а) проекція фазової траєкторії; б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.9 – Фазовий портрет збуреної системи (2.12)

З графіків, зображених на рис. 2.9, можна зробити висновок, що при збуренні $P_1(m, \Omega t)$ система (2.12) утворює стійкий атрактор, та функції $u(t)$, $z(t)$ періодично рухаються з часом $T = 6$.

Модель 2. Синусоїдальне зовнішнє збурення інтенсивності захисту з аналогічними параметрами: $P_2(m, \Omega t)$.

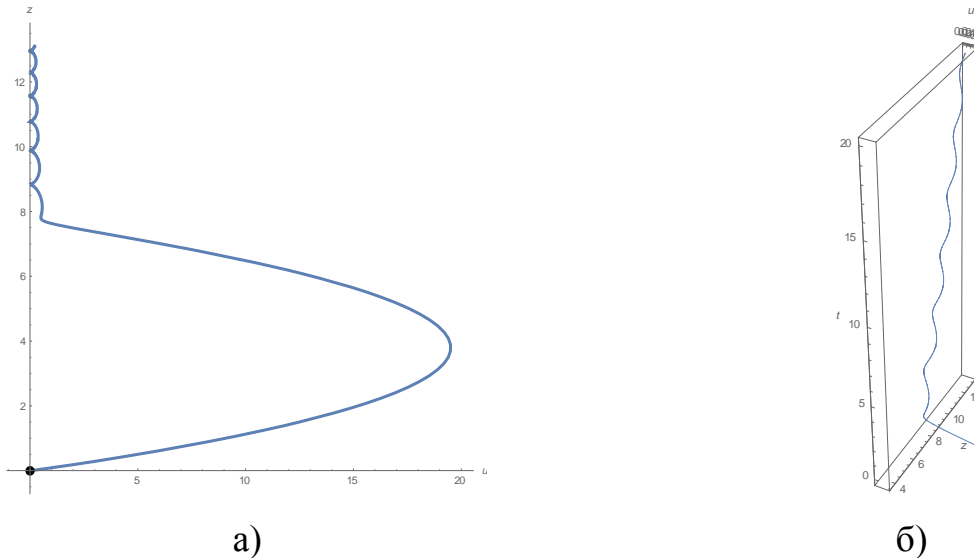


а) проекція фазової траєкторії; б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.10 – Фазовий портрет збуреної системи (2.12)

З графіків, зображених на рис. 2.10, можна зробити висновок, що при збуренні $P_2(m, \Omega t)$ система (2.12) утворює стійкий атрактор, та функція $z(t)$ періодично зростає з часом $T = 6$.

Модель 3. Збурення типу $P_3(m, \Omega, t) = (m \sin(\Omega t), 0)$ для "шкідливості".



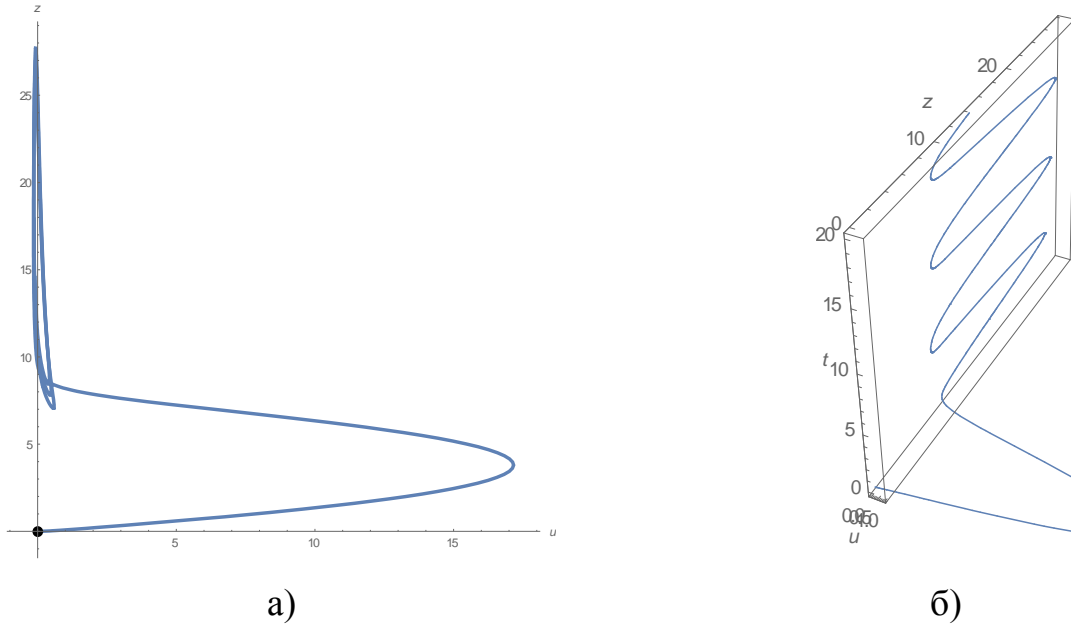
а) проекція фазової траєкторії; б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.11 – Фазовий портрет збуреної системи (2.12)

З графіків, зображених на рис. 2.11, можна зробити висновок, що при збуренні $P_3(m, \Omega t)$ система (2.12) нескінченно рухається, та функція $u(t)$ періодично убуває з часом, коли функція $z(t)$ періодично зростає (рис 2.25) із $T = 3$.

Модель 4. Збурення інтенсивності обох змінних із зсувом фаз.

З графіків, зображених на рис. 2.12, можна зробити висновок, що при збуренні $P_4(m, \Omega t)$ система (2.12) нескінченно рухається, та функція $u(t)$ періодично убуває з часом, коли функція $z(t)$ періодично зростає із $T = 6$.

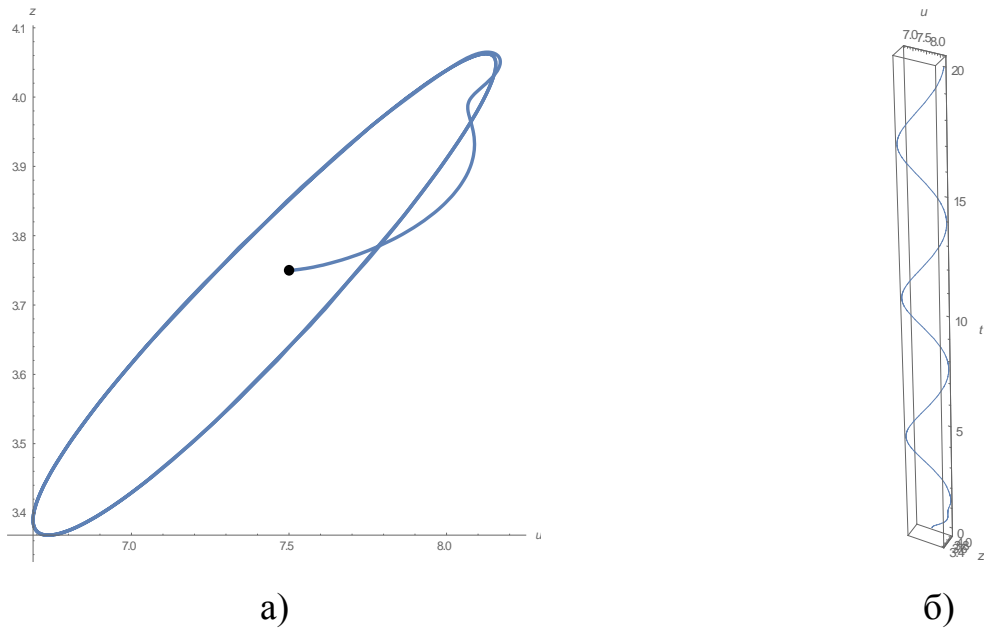


а) проекція фазової траєкторії; б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.12 – Фазовий портрет збуреної системи (2.12)

Аналогічно робимо для системи (2.13). Значення амплітуди візьмемо $m = 10$.

Модель 1. Синусоїдальне збурення «інтенсивності виділення шкідливості» $P_1(m, \Omega t)$.

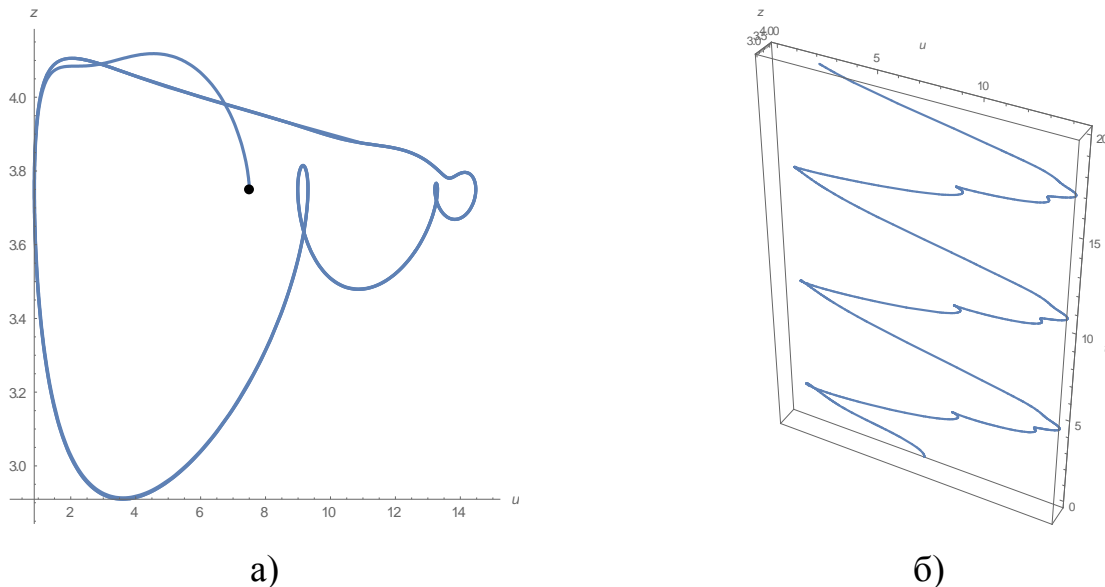


а) проекція фазової траєкторії; б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.13 – Фазовий портрет збуреної системи (2.12)

З графіків, зображених на рис. 2.13, можна зробити висновок, що при збуренні $P_1(m, \Omega t)$ система (2.13) утворює стійкий атрактор, та можна побачити періодичне $T = 6$ коливання функцій $u(t)$ та $z(t)$ від часу.

Модель 2. Синусоїдальне зовнішнє збурення інтенсивності захисту з аналогічними параметрами: $P_2(m, \Omega t)$.



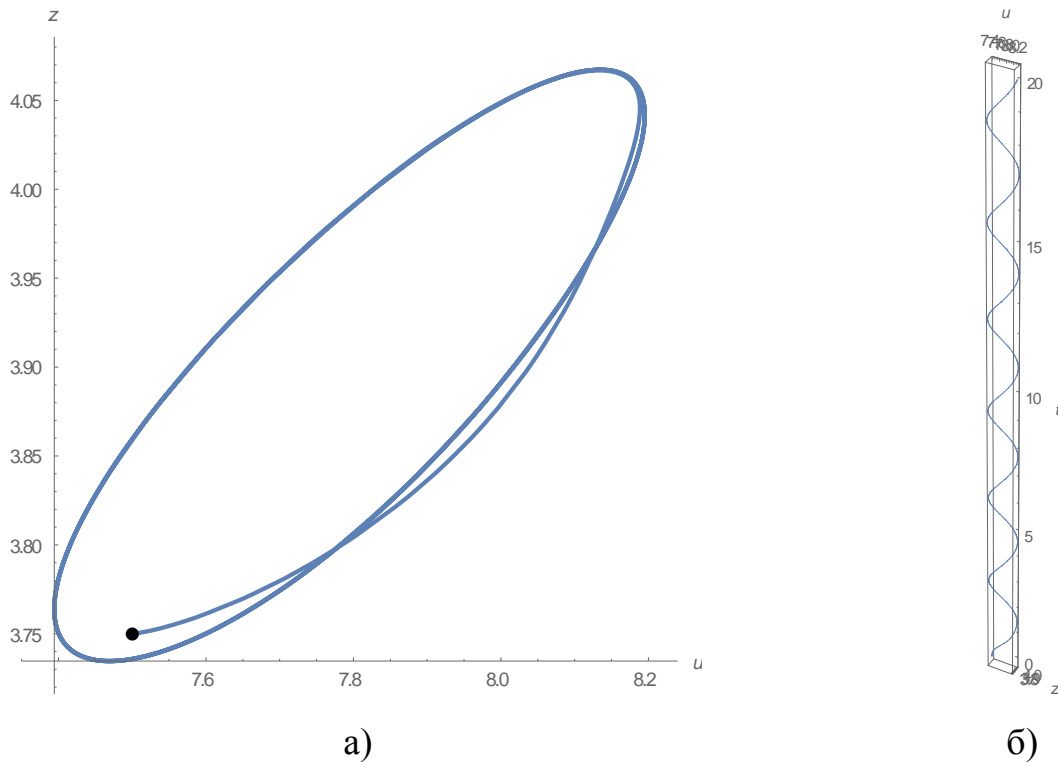
а) проекція фазової траєкторії; б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.14 – Фазовий портрет збуреної системи (2.12)

З графіків, зображених на рис. 2.14, можна зробити висновок, що при збуренні $P_2(m, \Omega t)$ система (2.13) утворює стійкий атрактор та бачимо періодичне коливання $T = 6$ функцій $u(t)$ та $z(t)$ від часу.

Модель 3. Збурення типу $P_3(m, \Omega, t) = (m \sin(\Omega t), 0)$ для "шкідливості".

З графіків, зображених на рис. 2.15, можна зробити висновок, що при збуренні $P_3(m, \Omega t)$ система (2.13) утворює стійкий атрактор, та можна побачити періодичне коливання $T = 6$ функцій $u(t)$ та $z(t)$ від часу.



а) проекція фазової траєкторії; б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.15 – Фазовий портрет збуреної системи (2.12)

Модель 4. Збурення інтенсивності обох змінних із зсувом фаз.

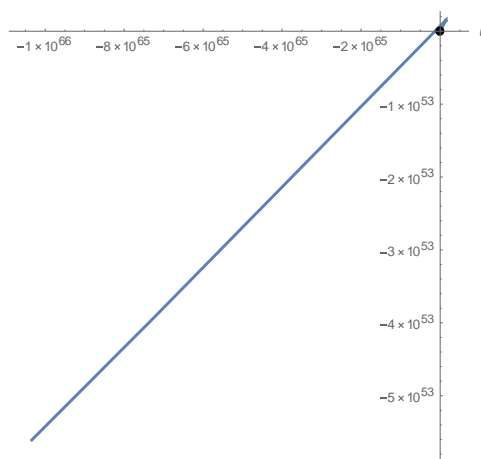
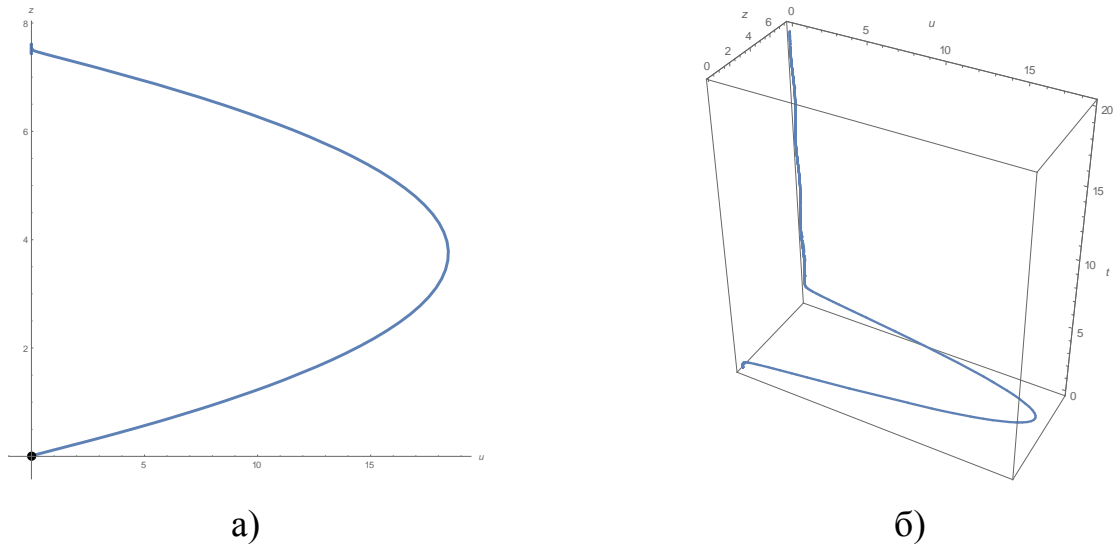


Рисунок 2.16 – Проекція фазової траєкторії збуреної системи (2.13)

З рис. 2.16 можна зробити висновок, що при збуренні $P_4(m, \Omega t)$ система (2.13) є нестійкою і зміщується на від'ємну площину, яке не задовольняє умові задачі.

Розглянемо випадки при зменшенні амплітуди до $m=0,1$ і побудуємо найбільш цікаві. Для системи (2.12) із синусоїдальним збуренням, в порівнянні коли брали за значення амплітуди $m=10$, найбільших змін зазнають моделі 2 та 4.

Модель 2 для системи (2.12) із амплітудою $m=0,1$.



а) проекція фазової траєкторії із амплітудою $m=0,1$;

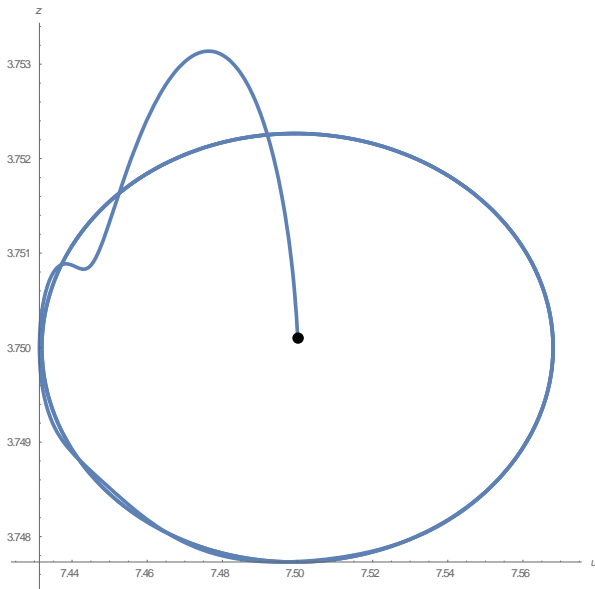
б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.17 – Фазовий портрет збуреної системи (2.12)

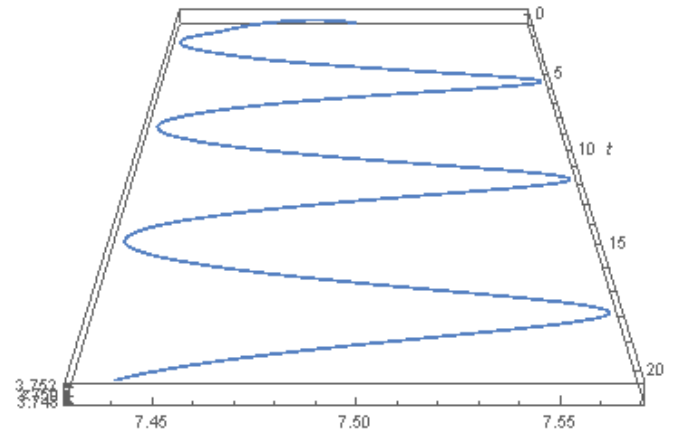
Модель 4 для системи (2.12) буде аналогічною до моделі 2. При зменшенні амплітуди, коливання затихають і періодичність зникає.

Розглянемо так само і для системи (2.13). Розглянемо 2 моделі, а саме 2 та 4.

Модель 2 для системи (2.13) із амплітудою $m=0,1$.



а)

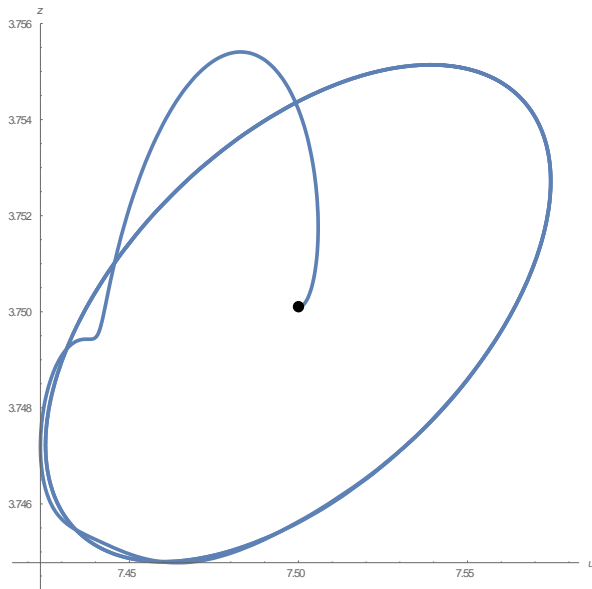


б)

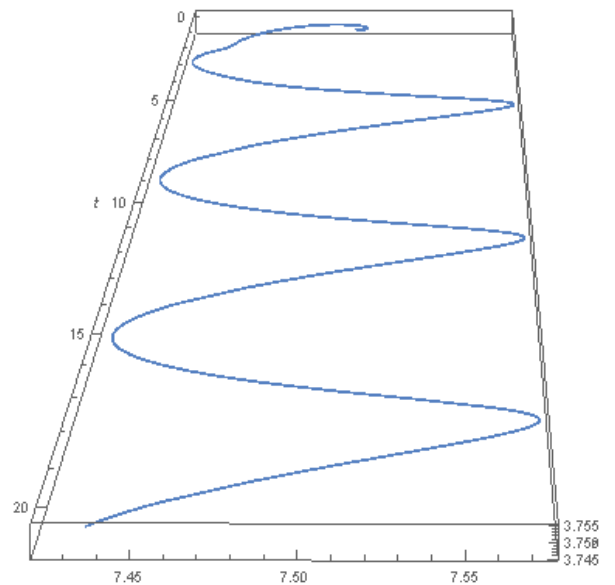
а) проекція фазової траєкторії із амплітудою $m = 0,1$;

б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.18 – Фазовий портрет збуреної системи (2.13)

Модель 4 для системи (2.13) із амплітудою $m = 0,1$.

а)



б)

а) проекція фазової траєкторії із амплітудою $m = 0,1$;

б) в розширеному фазовому просторі

Рисунок 2.19 – Фазовий портрет збуреної системи (2.13)

Треба відмітити, що при зменшенні близько до нуля амплітуди модель 4 для системи (2.13) прийняла вигляд стійкого атрактору, ще моделі 1-4 стали більш гладкими.

2.5.3 Порівняння систем

Системи (2.12) та (2.13) мають різну кількість стаціонарних точок. Наприклад, в системі (2.13) можна розглядати усього в 2 випадки, які залежать тільки від початкових коефіцієнтів системи α , β , δ , γ , у той час як у системі (2.12) є тільки одна, у якій встає проблема вибору другої точки в стаціонарі тому що вона належить $z \in \mathbb{R}^+$.

Треба також відмітити, що відмінність систем полягає в тому, що в другій системі (2.13) друге рівняння має додаткову залежність у вигляді функції захисту $z(t)$, у той час як перша система (2.12), друге рівняння має залежність тільки від функції шкідливості $u(t)$. У точці $(u=0, z=0)$ система (2.12) має стійкий атрактор. У точці $(u=0, z=0)$ система (2.13) має сідлову точку, а в $\left(u = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}, z = \frac{\alpha}{\beta}\right)$ – стійкий атрактор.

2.6 Оцінки вартості для моделі пропорційного захисту

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ z'(t) = \gamma u(t), \end{cases} \quad (2.14)$$

де $u(t)$ – наведена інтенсивність шкідливого фактору,

$z(t)$ – інтенсивність роботи динамічної захисної системи.

Виконаємо підстановку $u(t) = \frac{z'(t)}{\gamma}$ та $u'(t) = \frac{z''(t)}{\gamma}$ в перше рівняння системи (2.14):

$$z''(t) = \alpha z'(t) - \frac{\beta}{2} (z^2(t))'.$$

Перевизначимо змінні $z(t) = z'(t)$ та отримаємо нове диференціальне рівняння

$$z'(t) = \alpha z(t) - \frac{\beta}{2} z^2(t) + C_0, \quad z(0) = z_0, \quad (2.15)$$

де C_0 – деяка константа.

Початкова умова визначає стаціонарний (конструкційний) захист. При перевищенні інтенсивності відбувається включення динамічного захисту.

Розв'язком (2.15) буде функція:

$$z(t) = \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \sqrt{-\alpha^2 - 2C_0\beta} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} t \sqrt{-\alpha^2 - 2C_0\beta} + \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha - z_0\beta}{\sqrt{-\alpha^2 - 2C_0\beta}} \right) \right) \right).$$

Випадок змінних у часі параметрів системи вимагає чисельного розв'язку або асимптотичних методів, які розглянуті в кінці розділу 2.

Для визначення вартості захисту скористаємося функцією

$$\tilde{C}(T) = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0,$$

де C_0 – вартість стаціонарного захисту;

z_0 – величина стаціонарного захисту;

$c(z(t))$ – функція вартості, яка може приймати вигляд:

$$c(z(t)) = z(t); \quad (2.16)$$

$$c(z(t)) = z^2(t); \quad (2.17)$$

$$c(z(t)) = z(t)\ln(z(t)). \quad (2.18)$$

Проінтегруємо, взявши $\alpha = 0,6$, $\beta = 0,9$, $z_0 = 15$, $C_0 = 600$ та $T = 6,5$ (час, за який захист системи прийме значення менше, ніж z_0) і запишемо отримані результати для сумарної вартості \tilde{C} :

$$\text{а) } \tilde{C} = \int_0^T (z(t) - z_0) dt + C_0 = 87,94 + 600 = 687,84;$$

$$\text{б) } \tilde{C} = \int_0^T (z(t) - z_0)^2 dt + C_0 = 1942,92 + 600 = 2542,92;$$

$$\text{в) } \tilde{C} = \int_0^T (z(t) - z_0) \ln(z(t) - z_0) dt + C_0 = 272,09 + 600 = 872,09.$$

2.7 Асимптотики для «швидких» систем захисту

2.7.1 Аналіз головних членів асимптотик

Шкідливий чинник моделі – параметр порядку, який змінюється набагато повільніше, аніж захист встигає на нього реагувати. Цей захист називатимемо «швидким» так як він описується «швидкою» змінною z .

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із сингулярністю, особливістю якої є наявність малого параметра ε при старшій похідній. Маємо

змінні $u(t, \varepsilon)$ та $z(t, \varepsilon)$, із залежністю від ε , для яких побудуємо асимптотичні ряди за відповідними ступенями. Параметри α , β , γ , δ можуть бути повільно змінними функціями часу. Ці рівняння зі змінними коефіцієнтами не мають загального розв'язку у замкнутій формі навіть в лінійному випадку [42, 43].

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ \varepsilon z'(t) = F(u(t), z(t)), \end{cases} \quad (2.19)$$

де $F(u(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ – функція, яка може приймати одну із наступних форм:

а) $F(u(t), z(t)) = \gamma u(t)$;

б) $F(u(t), z(t)) = \gamma u(t) - \delta z(t)$.

Розглянемо головні члени асимптотик, яким в (2.19) відповідають одне диференціальне та одне алгебраїчне рівняння ($\varepsilon = 0$).

Перший випадок є тривіальним $u(t) = 0$, $z(t)$ – будь-яка функція, в тому числі, $z = z_0$ – стаціонарний захист.

Для другого випадку, головний член асимптотики для функції $z(t)$ приймає вигляд:

$$z(t) = \frac{e^{t\alpha} z_0 \alpha}{\alpha - z_0 \beta + e^{t\alpha} z_0 \beta},$$

де z_0 – стаціонарний захист.

На рис. 2.20-2.21 видно, що при зменшенні ε фазові траєкторії систем (2.19-а) та (2.19-б) становляться гладкими прямими у часі.

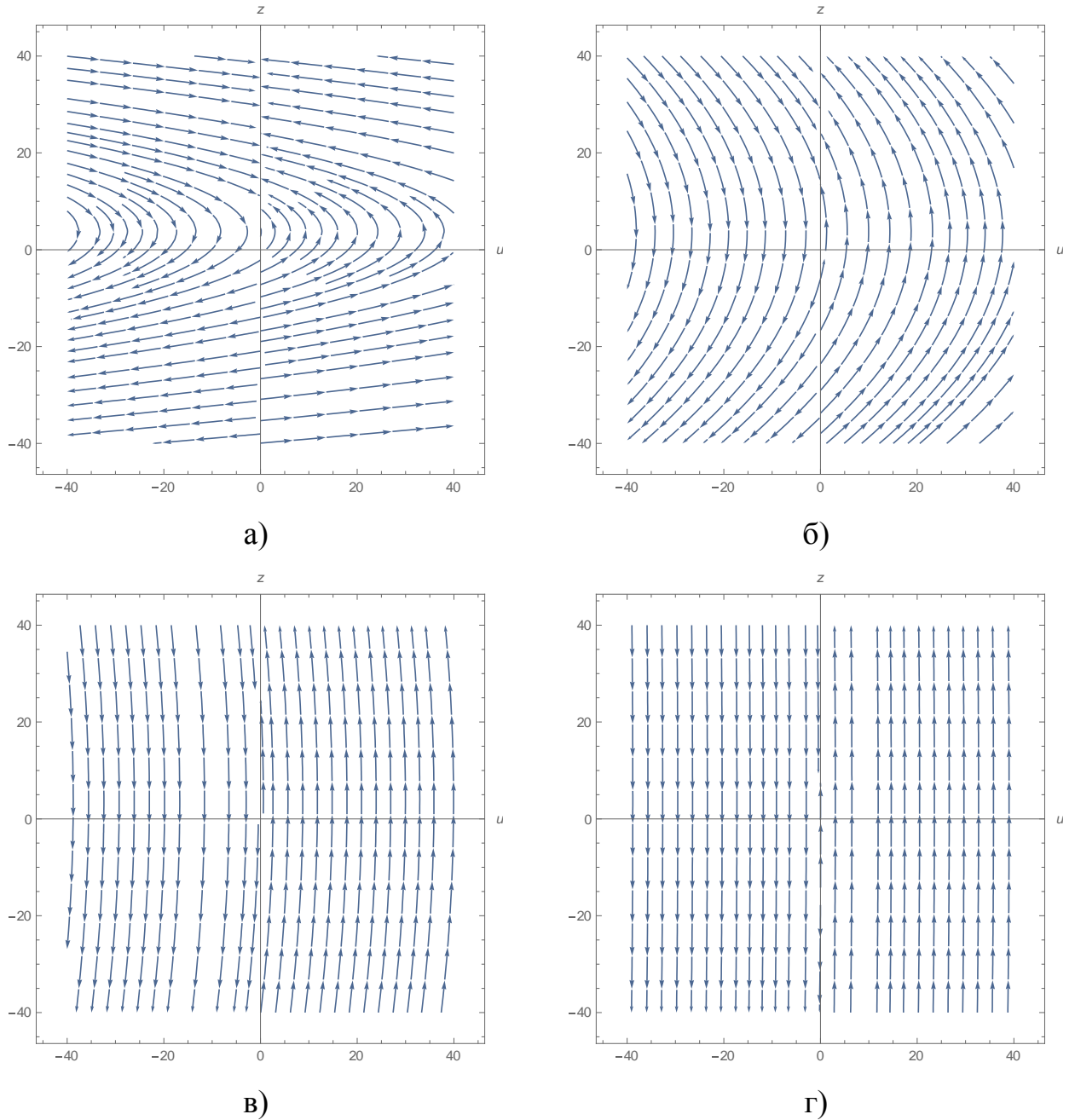


Рисунок 2.20 – Проекція фазової траєкторії системи (2.19)

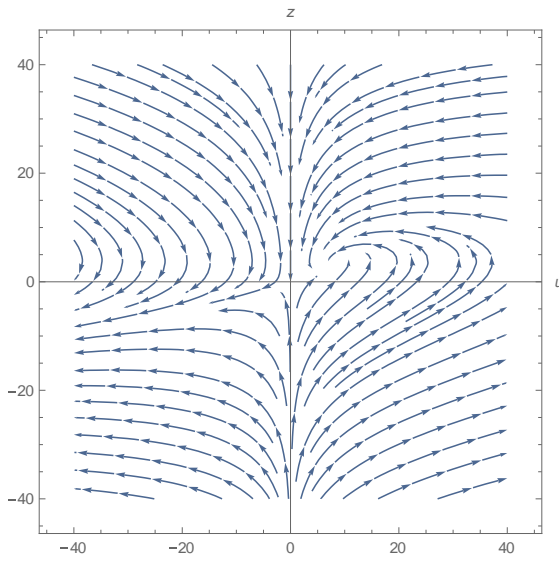
з функцією $F(u(t), z(t))$ вигляду (а) при різних ϵ

Розрахуємо вартість системи захисту для випадку б), взявши за параметри системи: $C_0 = 600$, $\alpha = 0,7$, $\beta = 0,04$, $z_0 = 7$, $\gamma = 0,15$, $\delta = 2$. Для визначеності прийемо обмеження $t = 4$ – час встановлення стану, який нас влаштовує, тобто коли $z \leq z_0$. Виконаємо розрахунок вартості системи захисту, скориставшись (2.16) – (2.18):

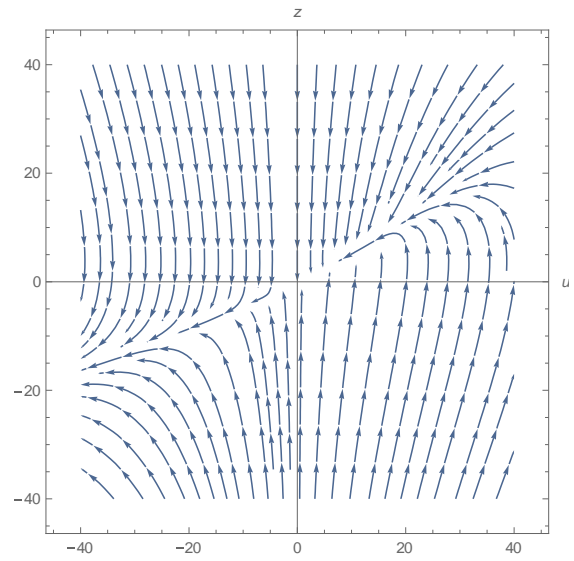
$$\text{а) } \tilde{C} = \int_0^T (z(t) - z_0) dt + C_0 = 21,27 + 600 = 621,27;$$

$$\text{б) } \tilde{C} = \int_0^T (z(t) - z_0)^2 dt + C_0 = 142,53 + 600 = 742,53;$$

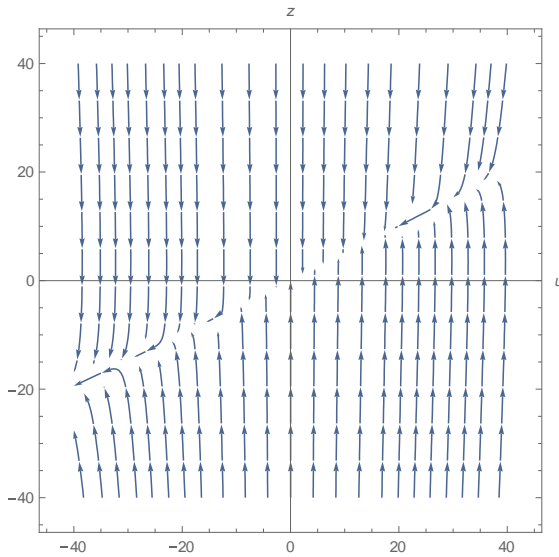
$$\text{в) } \tilde{C} = \int_0^T (z(t) - z_0) \ln(z(t) - z_0) dt + C_0 = 38,93 + 600 = 638,93.$$



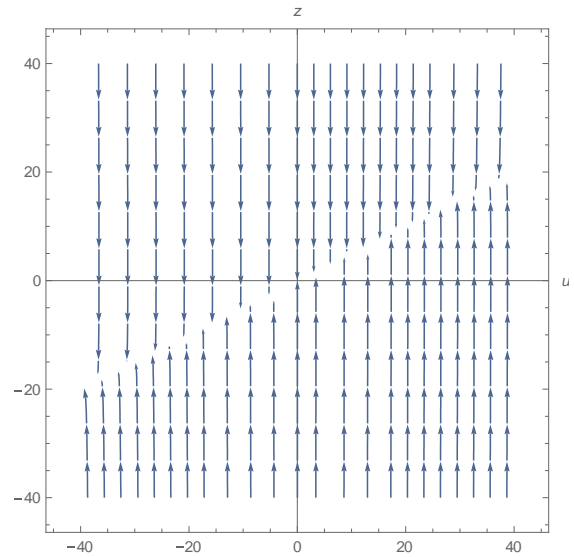
а)



б)



в)



г)

а) $\varepsilon = 0,1$; б) $\varepsilon = 0,01$; в) $\varepsilon = 0,001$; г) $\varepsilon = 0,0001$

Рисунок 2.21 – Проекція фазової траєкторії системи (2.19)

з функцією $F(u(t), z(t))$ вигляду (б) при різних ε

2.7.2 Загальний випадок асимптотичного розв'язку

Розглянемо модифіковану систему диференціальних рівнянь (2.19-б):

$$\begin{cases} u'(t) = \varepsilon \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ \varepsilon z'(t) = \gamma u(t) - \delta z(t). \end{cases} \quad (2.20)$$

Відмінність цієї системи від раніше розглянутих є квазістаціонарна шкідливість. На рис. 2.22 зображені фазові траєкторії, на яких зображено вплив ε на систему (2.20).

Вирішимо систему асимптотичним методом для членів з ε^0 , ε^1 , ε^2 .

Досліджуємо систему (2.20), прийнявши за увагу залежність функції $u(t, \varepsilon)$ та $z(t, \varepsilon)$ від часу t та від малого параметра ε .

Розв'яжемо систему (2.20) для випадку ε^0 (нульове наближення).

Запишемо асимптотики функцій $u(t, \varepsilon)$ і $z(t, \varepsilon)$:

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + O(\varepsilon), \quad z(t, \varepsilon) = z_0(t) + O(\varepsilon).$$

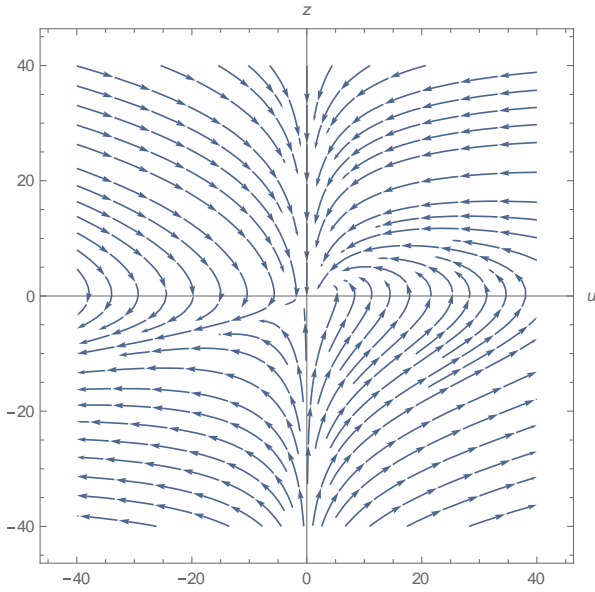
Система (2.20) для нульового наближення має вигляд:

$$\begin{cases} u_0'(t) = -\beta u_0(t) z_0(t), \\ 0 = \gamma u_0(t) - \delta z_0(t). \end{cases} \quad (2.21)$$

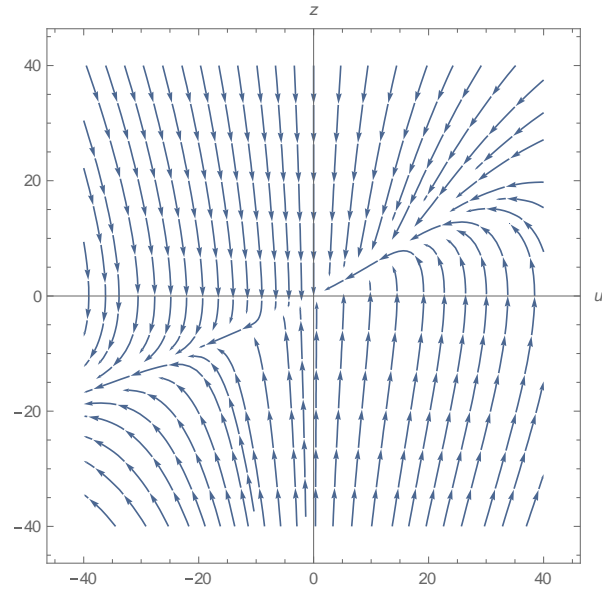
Робимо заміну $u_0(t) = \frac{\delta}{\gamma} z_0(t)$.

Диференціюємо та підставляємо заміну $u_0(t)$, $u_0'(t)$ в перше рівняння системи (2.21) і, в результаті розв'язку диференціального рівняння, знайдена функція $z_0(t)$. За допомогою неї була знайдена функція $u_0(t)$:

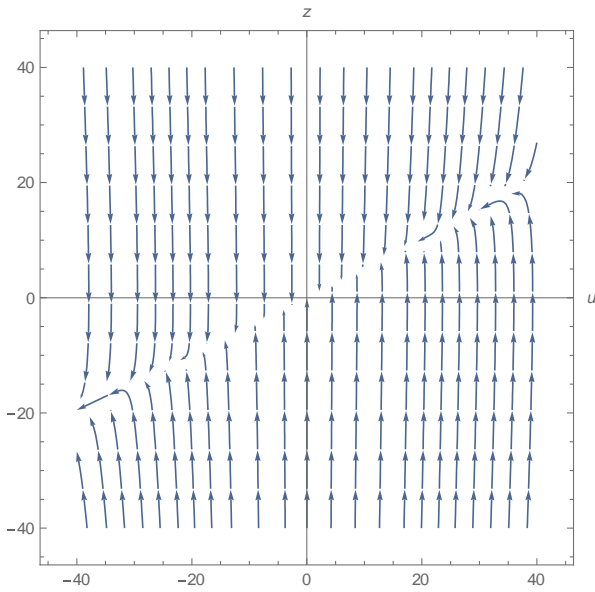
$$z_0(t) = \frac{1}{\beta t}, \quad u_0(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t}.$$



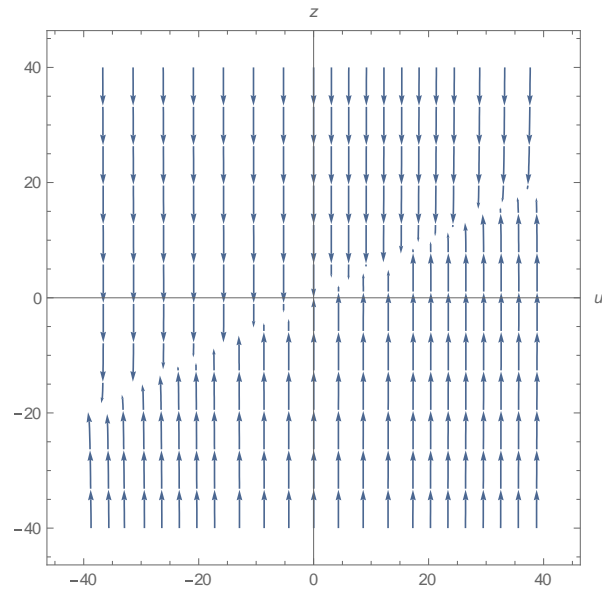
а)



б)



в)



г)

а) $\varepsilon = 0,1$; б) $\varepsilon = 0,01$; в) $\varepsilon = 0,001$; г) $\varepsilon = 0,0001$

Рисунок 2.22 – Проекція фазової траєкторії системи (2.20) при різних ε

Отримані функції захисту і шкідливості для нульового наближення мають вигляд:

$$u(t, \varepsilon) = \frac{\delta}{\beta\gamma t} + O(\varepsilon), \quad z(t, \varepsilon) = \frac{1}{\beta t} + O(\varepsilon).$$

Розв'яжемо систему (2.20) з урахуванням члена з ε^1 .

Запишемо асимптотики функцій $u(t, \varepsilon)$ і $z(t, \varepsilon)$:

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + O(\varepsilon^2), \quad z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + O(\varepsilon^2).$$

Система (2.20) для першого наближення має вигляд:

$$\begin{cases} u_0'(t) + \varepsilon u_1'(t) = \varepsilon \alpha u_0(t) - \beta u_0(t) z_0(t) - \varepsilon \beta (u_1(t) z_0(t) + u_0(t) z_1(t)), \\ \varepsilon z_0'(t) = \gamma u_0(t) + \varepsilon \gamma u_1(t) - \delta z_0(t) - \varepsilon \delta z_1(t). \end{cases} \quad (2.22)$$

Складові з множником ε зі ступенем 2 і вище переходять в залишковий член $O(\varepsilon^2)$.

Розв'яжемо систему (2.22), згрупувавши доданки при ε^0 і ε^1 .

$$\begin{cases} u_0'(t) = -\beta u_0(t) z_0(t) & \left| \varepsilon^0 \right. \\ 0 = \gamma u_0(t) - \delta z_0(t) & \left| \varepsilon^0 \right. \\ u_1'(t) = \alpha u_0(t) - \beta (u_1(t) z_0(t) + u_0(t) z_1(t)) & \left| \varepsilon^1 \right. \\ z_0'(t) = \gamma u_1(t) - \delta z_1(t) & \left| \varepsilon^1 \right. \end{cases} \quad (2.23)$$

Виконуємо заміну $u_0(t) = \frac{\delta}{\gamma} z_0(t)$.

Диференціюємо та підставляємо заміну $u_0(t)$, $u_0'(t)$ в перше рівняння системи (2.23) і, в результаті розв'язку диференціального рівняння, знайдена функція $z_0(t)$. За допомогою неї була знайдена функція $u_0(t)$:

$$z_0(t) = \frac{1}{\beta t}, \quad u_0(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t}.$$

Робимо підстановку в третє і четверте рівняння системи (2.23) функцій $z_0'(t)$, $z_0(t)$ і $u_0(t)$ для того, щоб знайти функції $z_1(t)$ і $u_1(t)$.

$$\begin{cases} u_1'(t) = \alpha \frac{\delta}{\beta \gamma t} - \beta \left(u_1(t) \frac{1}{\beta t} + \frac{\delta}{\beta \gamma t} z_1(t) \right); \\ -\frac{1}{\beta t^2} = \gamma u_1(t) - \delta z_1(t). \end{cases} \quad (2.24)$$

Виконуємо заміну $u_1(t) = \frac{1}{\gamma} \left(\delta z_1(t) - \frac{1}{\beta t^2} \right)$.

Диференціюємо та підставляємо заміну $u_1(t)$, $u_1'(t)$ в перше рівняння системи (2.24) і розв'язуємо отримане диференціальне рівняння:

$$\frac{1}{\gamma} \left(\delta z_1'(t) + \frac{2}{\beta t^3} \right) = \alpha \frac{\delta}{\beta \gamma t} - \beta \left(\frac{1}{\gamma} \left(\delta z_1(t) - \frac{1}{\beta t^2} \right) \frac{1}{\beta t} + \frac{\delta}{\beta \gamma t} z_1(t) \right).$$

Результатом розв'язання диференціального рівняння є функція $z_1(t)$. За допомогою неї була знайдена функція $u_1(t)$:

$$z_1(t) = \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2 \ln t}{t^2 \delta} \right), \quad u_1(t) = \frac{1}{2\beta \gamma t^2} (t^2 \alpha \delta - 2 \ln t - 2).$$

Функції захисту і шкідливості для першого наближення мають вигляд:

$$z(t) = \frac{1}{\beta t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2 \ln t}{t^2 \delta} \right), \quad u(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta \gamma t^2} (t^2 \alpha \delta - 2 \ln t - 2).$$

Розв'язуємо систему (2.20) з урахуванням членів з ε^2 .

Запишемо асимптотики функцій $u(t, \varepsilon)$ і $z(t, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) &= u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + O(\varepsilon^3), \\ z(t, \varepsilon) &= z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \varepsilon^2 z_2(t) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Система (2.20) для другого наближення має вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} u'_0(t) + \varepsilon u'_1(t) + \varepsilon^2 u'_2(t) &= \varepsilon \alpha u_0(t) + \varepsilon^2 \alpha u_1(t) - \\ &\quad - \beta u_0(t) z_0(t) - \varepsilon \beta (u_1(t) z_0(t) + u_0(t) z_1(t)) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \beta (u_2(t) z_0(t) + u_1(t) z_1(t) + u_0(t) z_2(t)) + \bar{o}(\varepsilon^3); \\ \varepsilon z'_0(t) + \varepsilon^2 z'_1(t) &= \gamma u_0(t) + \varepsilon \gamma u_1(t) + \varepsilon^2 \gamma u_2(t) - \delta z_0(t) - \\ &\quad - \varepsilon \delta z_1(t) - \varepsilon^2 \delta z_2(t) + \bar{o}(\varepsilon^3). \end{aligned} \right. \quad (2.25)$$

Складові з множником зі ступенем 3 і вище переходять в залишковий член $O(\varepsilon^3)$.

Розв'яжемо систему (2.25), згрупувавши доданки при ε^0 , ε^1 і ε^2 .

$$\left\{ \begin{aligned} u'_0(t) &= -\beta u_0(t) z_0(t) & \varepsilon^0 \\ 0 &= \gamma u_0(t) - \delta z_0(t) & \varepsilon^0 \\ u'_1(t) &= \alpha u_0(t) - \beta (u_1(t) z_0(t) + u_0(t) z_1(t)) & \varepsilon^1 \\ z'_0(t) &= \gamma u_1(t) - \delta z_1(t) & \varepsilon^1 \\ u'_2(t) &= \alpha u_1(t) - \beta (u_2(t) z_0(t) + u_1(t) z_1(t) + u_0(t) z_2(t)) & \varepsilon^2 \\ z'_1(t) &= \gamma u_2(t) - \delta z_2(t) & \varepsilon^2 \end{aligned} \right. \quad (2.26)$$

Виконуємо заміну $u_0(t) = \frac{\delta}{\gamma} z_0(t)$.

Диференціюємо та підставляємо заміну $u_0(t)$, $u'_0(t)$ в перше рівняння системи (2.26) і, в результаті розв'язку диференціального рівняння, знайдена функція $z_0(t)$. За допомогою неї була знайдена функція $u_0(t)$:

$$z_0(t) = \frac{1}{\beta t}, \quad u_0(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t}.$$

Для того, щоб знайти функції $z_1(t)$ і $u_1(t)$ зробимо підстановку в третє і четверте рівняння системи (2.26) функцій $z'_0(t)$, $z_0(t)$ та $u_0(t)$. Отримана система має вигляд:

$$\begin{cases} u'_1(t) = \alpha \frac{\delta}{\beta \gamma t} - \beta \left(u_1(t) \frac{1}{\beta t} + \frac{\delta}{\beta \gamma t} z_1(t) \right); \\ -\frac{1}{\beta t^2} = \gamma u_1(t) - \delta z_1(t). \end{cases} \quad (2.27)$$

Виконуємо заміну $u_1(t) = \frac{1}{\gamma} \left(\delta z_1(t) - \frac{1}{\beta t^2} \right)$.

Диференціюємо та підставляємо заміну $u_1(t)$, $u'_1(t)$ в перше рівняння системи (2.27) і розв'язуємо отримане диференціальне рівняння:

$$\frac{1}{\gamma} \left(\delta z'_1(t) + \frac{2}{\beta t^3} \right) = \alpha \frac{\delta}{\beta \gamma t} - \beta \left(\frac{1}{\gamma} \left(\delta z_1(t) - \frac{1}{\beta t^2} \right) \frac{1}{\beta t} + \frac{\delta}{\beta \gamma t} z_1(t) \right).$$

Результатом розв'язання диференціального рівняння є функція $z_1(t)$. За допомогою неї була знайдена функція $u_1(t)$:

$$z_1(t) = \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2\ln t}{t^2\delta} \right), \quad u_1(t) = \frac{1}{2\beta\gamma t^2} (t^2\alpha\delta - 2\ln t - 2).$$

Для того, щоб знайти функції $z_2(t)$ і $u_2(t)$ зробимо підстановку в п'яте і шосте рівняння системи (2.26) функцій $z_1'(t)$, $z_0(t)$, $u_0(t)$, $z_1(t)$, $u_1(t)$. Отримана система має вигляд:

$$\begin{cases} u_2'(t) = \frac{1}{4t^2\beta\gamma\delta} \left(t^2\alpha\delta(t^2\alpha\delta - 2) + 12\ln t(1 - 3\ln t) - 4t^3\beta\delta(\gamma u_2(t) + \delta z_2(t)) \right); \\ \frac{3(1 - 2\ln t)}{t^3\beta\delta} = \gamma u_2(t) - \delta z_2(t). \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\text{Виконуємо заміну } u_2(t) = \frac{1}{\gamma} \left(\delta z_2(t) + \frac{3 - 6\ln t}{t^3\beta\delta} \right).$$

Диференціюємо та підставляємо заміну $u_2(t)$, $u_2'(t)$ в перше рівняння системи (2.28). Розв'язуємо диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma} \left(\delta z_2'(t) + \frac{18\ln t - 15}{t^4\beta\delta} \right) = \\ & = \frac{1}{4t^2\beta\gamma\delta} \left(t^2\alpha\delta(t^2\alpha\delta - 2) + 12\ln t(1 - 3\ln t) - 4t^3\beta\delta \left(2\delta z_2(t) + \frac{3 - 6\ln t}{t^3\beta\delta} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Результатом розв'язання диференціального рівняння (2.29) є функція $z_2(t)$. За допомогою неї була знайдена функція $u_2(t)$:

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \frac{1}{12\beta\delta^2 t^3} \left(36 + t^2\alpha\delta(t^2\alpha\delta - 6) + 12\ln t(\ln t - 1) \right), \\ u_2(t) &= \frac{1}{12\beta\delta\gamma t^3} \left(24 + t^2\alpha\delta(t^2\alpha\delta - 6) + 12\ln t(1 + \ln t) \right). \end{aligned}$$

Отримані функції захисту і шкідливості для другого наближення мають вигляд:

$$z(t) = \frac{1}{\beta t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2 \ln t}{t^2 \delta} \right) + \\ + \varepsilon^2 \frac{1}{12\beta \delta^2 t^3} \left(36 + t^2 \alpha \delta (t^2 \alpha \delta - 6) + 12 \ln t (\ln t - 1) \right),$$

$$u(t) = \frac{\delta}{\beta \gamma t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta \gamma t^2} (t^2 \alpha \delta - 2 \ln t - 2) + \\ + \varepsilon^2 \frac{1}{12\beta \delta \gamma t^3} \left(24 + t^2 \alpha \delta (t^2 \alpha \delta - 6) + 12 \ln t (1 + \ln t) \right).$$

Проведемо мінімізацію за параметрами β і ε функцій $u(t)$ для нульового, першого і другого наближень, щоб провести розрахунок вартості системи захисту. Для цього визначимо для якого інтервалу часу функція шкідливості досягне прийняттого результату (для нас не є критичним час установки нормальних (не критичних) показників системи). У разі, коли час роботи системи безпеки є критичним параметром необхідно визначити, при яких значеннях параметра β , функція шкідливості приймає прийнятні значення (при цьому ми обмежені за часом).

Візьмемо для визначеності такі значення параметрів системи (2.20): $\alpha = 0,3$, $\gamma = 0,4$, $\alpha = 0,2$, $\delta = 3$, $z_0 = 12$. Вартість стаціонарного захисту $C_0 = 600$.

Оскільки стаціонарний захист $z_0 = 12$, то нам необхідно знайти час t , після якого функція захисту буде приймати значення менше $z_0 = 12$ і, відповідно, значення параметрів β і ε .

Для нульового наближення

$$z(t) = \frac{1}{\beta t},$$

маємо значення параметрів $t = 1,98561$, $\beta = 0,0419686$.

Для першого наближення

$$z(t) = \frac{1}{\beta t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2 \ln t}{t^2 \delta} \right),$$

маємо значення параметрів $t = 4,55577$, $\beta = 0,0183009$, $\varepsilon = 0,000864882$.

Для другого наближення

$$z(t) = \frac{1}{\beta t} + \varepsilon \frac{1}{2\beta} \left(\alpha - \frac{2 \ln t}{t^2 \delta} \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{12\beta \delta^2 t^3} \left(36 - 6\alpha \delta t^2 + \alpha^2 \delta^2 t^4 - 12 \ln t + 12 \ln^2 t \right),$$

маємо значення параметрів $t = 1,18948$, $\beta = 0,0700595$, $\varepsilon = 0,0000962$.

Ці величини параметрів ε були отримані чисельним розв'язанням вихідної системи, отже правомочність асимптотичного підходу (малість ε) підтверджується.

ВИСНОВКИ

В роботі проведено дослідження ергатичної системи з різними типами захисту при зовнішньому збуренні інтенсивностей шкідливих викидів, яке моделюється малим по амплітуді синусоїдальним збуренням правої частини базової моделі. Досліджені проблеми стійкості атракторів. За допомогою асимптотичного методу дослідили вплив малого параметру ε на систему захисту.

Застосування методів якісної теорії диференціальних рівнянь пророкує необмежені хаотичні рухи в неавтономній системі поблизу періодичного розв'язку автономної при збігу періодів для моделі Лотки-Вольтерра, яка взята для нашої системи у якості базової. Вона була модифікована, щоб моделювати підсистему захисту. Така модифікація значно змінила динаміку і призвела до нових якостей фазових портретів. Чисельні експерименти показують, що:

а) фазові портрети систем, схожі на відомі у фізиці "фігури Ліссажу" і мають тип, що вироджується 2-мірного нерезонансного тора;

б) при однакових збуреннях можуть проявлятися різні за характером нерегулярності поведінки "захисту" та "шкідливості" в фазових портретах;

в) синусоїдальний вплив на інтенсивності, наприклад шляхом зміни швидкості росту однієї або обох змінних внаслідок сезонних або погодних змін, призводить до неперіодичної динаміці системи;

г) проведено аналіз сталості відносно малого параметру та багато чисельних експериментів, що наочно вказує поведінку системи із захистом у її розширеному фазовому просторі, з урахуванням неавтономного збурення.

Обчислення проводилися в Wolfram Mathematica v.11.0.1.0 з пробним строком використання, система Windows 10, 64 bit, код програми, за допомогою якої було проведено чисельні експерименти, знаходяться в файлі Prog_diplom.nb.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Барсуков В. С. Безопасность: технологии, средства, услуги. Москва : Кудиц-Образ, 2001. 496 с.
2. Дзюндзюк Б. В., Наумейко И. В., Сердюк Н. Н. Содержательная модель воздействия нескольких вредных факторов на человека // Радиоэлектроника и информатика. 2000. № 3 (12). С. 127–128.
3. Маслов В. П., Мясников В. П., Данилов В. Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. Москва : Наука, 1987. 142 с.
4. Наперекор стихии: уроки ликвидации аварии на Главной канализационной насосной станции г. Харькова. Харьков : ЧП «Дуэт», 2006. 464 с.
5. Запорожцев А. В. Моделирование технических систем // Фундаментальные исследования. 2014. № 8–6. С. 1288–1294.
6. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. Москва : Мир, 1982. 216 с.
7. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. Москва : Изд-во Фазис, 2000. 411 с.
8. Дзюндзюк Б. В. Наумейко И. В. Математическая модель и оптимизация защиты от биовоздействия электромагнитного излучения и сопутствующих факторов // Радиоэлектроника и информатика. 1997. № 1. С. 28–29.
9. Мак-Лоун Р. Р. Математическое моделирование – искусство применения математики // Математическое моделирование. Москва : Мир, 1979. С. 9–20.
10. Лохин В. М., Интеллектуальные системы автоматического управления. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.
11. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику. Москва : Эдиториал УРСС, 2002. 256 с.
12. Наумейко И. В. Критические точки динамической модели

распределенных вредных факторов // Междунар. научно-техн. конференция ИСТЭ-2011 : зб. материалов форума (г. Харьков-Ялта, 1–6 октября 2011 г.). С. 60–61.

13. Наумейко И. В., Аль-Рефаи В. А. К вопросу анализа критических режимов систем с динамической защитой от вредных воздействий // 2-я Междунар. научно-техн. конференция ИСТ-2013 : (г. Евпатория 16–22 сентября 2013 г.). С. 12.

14. Звонкий А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук, 1984. Т. 39, № 2. С. 77–127.

15. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. Москва : Наука, 1981. 233 с.

16. Наумейко И. В. Определение границ применимости асимптотического подхода при анализе сигналов в неоднородных многопроводных каналах / Кн. Депонированные научные работы. 1983. № 12 (146). С. 1038.

17. The Large, the Small and the Human Mind / R. Penrose, A. Shimony, N. Cartwright, S. Hawking. ed. M. Longair. Cambridge : Cambridge University Press, 2000. 201 p.

18. Vasil'eva A., Butuzov V. Asymptotic expansions of solution of singularly perturbed equations. Moscow : Higher School, 1990. 201 p.

19. Альрефаи В. А., Наумейко И. В., Альджаафрах М. Р. Исследование асимптотик систем с защитой // Sciences of Europe. 2016. Т. 1, № 8 (8). С. 63–68.

20. Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика. Москва : Едиториал УРСС, 2004. 304 с.

21. Синергетическая парадигма. Москва : Прогресс-Традиция, 2000. 536 с.

22. Чернавский Д. С. Синергетика и информация. М. : УРСС, 2004. 288 с.

23. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. Москва : Наука, 1973. 272 с.

24. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в

критических случаях. Москва : Издательство Московского университета, 1978. 151 с.

25. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1987. 304 с.

26. Арнольд В. И. Теория катастроф // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Москва : ВИНТИ, 1986. Т. 5. С. 221–284.

27. Холоднюк М. Методы анализа нелинейных математических моделей. Москва : Мир, 1991. 368 с.

28. Alexeev I., Voloshyn O. Formation of Compensation Mechanism of Regional Enterprises' Human Resources Regeneration in the Labor Potential Development System // Econtechmod. An International Quaterly Journal. 2013. V. 2, No. 3. P. 3–8.

29. Arditi R., Ginzburg L. How Species Interact: Altering the Standard View on Trophic Ecology / Oxford University Press. 2012. 112 p.

30. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology / Heidelberg: Springer-Verlag. 2000. 201 p.

31. Hoppensteadt F. Predator-prey model / Scholarpedia. 2006. 1 (10). 1563 p.

32. Jost C., Devulder G., Vucetich J. The wolves of Isle Royale display scale-invariant satiation and density dependent predation on moose // Journal of Animal Ecology. 2005. 74 (5). P. 809–816.

33. Pluzhnik E. V., Nikulchev E.V. Use of dynamical systems modeling to hybrid cloud database // International Journal of Communications, Network and System Sciences. 2013. V. 6, No. 12. P. 505–512.

34. Мартынюк А. А., Никитина Н. В. Хаотическая потеря предельного цикла в задаче Вольтерра // Докл. АН Украины, 1996. № 4. С. 1–7.

35. Никитина Н. В. О хаотической потере устойчивости // Докл. НАН Украины, 1997. № 11. С. 61–65.

36. Альджаафрах М. Р. Неустойчивость динамического баланса в системах Лотки-Вольтерра с возмущением правой части // Восточно-

Европейский журнал передовых технологий. 2014. Т. 2, № 4 (68). С. 47–50.

37. Альджаафрах М. Р. Хаотические движения в системах Лотки-Вольтерра с периодическим возмущением правой части // Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: материалы XVIII Международного Молодежного Форума. Харьков, 2014. С. 52–53.

38. Гусятников П. П. Качественные и численные методы в задачах оптимального управления в моделях «хищник – жертва» и популяции леммингов. Москва, 2006. 101 с. РГБ ОД, 61 : 06-1/528

39. Дэмбэрэл С., Оленев Н. Н., Поспелов И. Г. К математической модели взаимодействия экономических и экологических процессов // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 4. С. 107–122.

40. Могилевский В. Д. Формализация динамических систем. Москва, 2005. 216 с.

41. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели // Природа. 1998. № 4. С. 3–14.

42. Nasritdinov G., Dalimov R. Limit cycle, trophic function and the dynamics of intersectoral interaction / Current Research J. of Economic Theory, 2010. № 2 (2). P. 32–40.

43. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Мир, 1968. 464 с.