УДК 621.395

ДРОБОВЫЕ ШУМЫ И ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МАЗМАНИШВИЛИ А.С., СИЛА Т.А., СЛИПЧЕНКО Н.И.

Рассматривается задача выбора параметров объекта управления и регулятора, доставляющих на решениях минимум интегральному критерию качества. Показывается, что задача параметрической оптимизации динамической системы, возмущенной дробовым шумом, эквивалентна такой же задаче для той же системы, но возмущенной белым шумом с соответствующей ковариационной матрицей.

1. Введение и постановка задачи

В работах [1,2] получено решение задачи параметрической оптимизации регулируемой динамической системы для случая, когда статистические характеристики действующих на систему возмущений неизвестны. В настоящей работе та же задача рассматривается для случая возмущения системы дробовым шумом [3], широко распространенным в реальных условиях функционирования динамических систем. В соответствии с [1] запишем уравнение замкнутой динамической системы:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}X(t)=\Phi(X,\alpha,\beta)+\Psi(t),\\ X\in R^n,\ \alpha\in R^p,\ \beta\in R^l,\end{gathered}\qquad(1)$$

где α – p-мерный вектор варьируемых параметров объекта управления; β – l-мерный вектор варьируемых параметров регулятора; R^n, R^p, R^l – действительные векторные пространства с евклидовой нормой. На компоненты векторов α и β наложены ограничения

$$f_i(\alpha)\le 0,\ \vartheta_j(\beta)\le 0,\ (i=1,2...,z),\ (j=1,2,...,q),\qquad(2)$$

определяющие в пространствах R^p и R^l области допустимых значений $G_\alpha\in R^p$ и $G_\beta\in R^l$.

Определение. Процесс $\Psi(t)$ назовем процессом класса $G_\Psi\in R^n$, если его реализация определяется формулой

$$\Psi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(t_k),\quad A_k\in R^k,\qquad(3)$$

где $\{\tau_k\}_{-\infty}^{\infty}$ – простейший пуассоновский поток [3] с плотностью $\lambda>0$; $\{A_m\}_{-\infty}^{\infty}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных n-мерных векторов со свойствами $\mathbf{E}_A\left[\|\{A_m\}_{-\infty}^{\infty}\|\right]>0$; $\mathbf{E}_A\left[\{A_m\}_{-\infty}^{\infty}\right]=0$. Предполагается, что последовательности $\{\tau_k\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{A_m\}_{-\infty}^{\infty}$ статистически независимы. Класс G_Ψ будем называть *классом дробовых шумов*.

Требуется отыскать векторы $\alpha^*\in G_\alpha$ и $\beta^*\in G_\beta$, доставляющие на решениях уравнения (1) минимум интегральному квадратичному функционалу

$$J=\mathbf{E}\left[\int_0^T\Omega\{X(t),\alpha,\beta\}\right],\qquad(4)$$

где $\Omega(X(t),\alpha,\beta)$ – определенно-положительная форма компонент вектора состояния; T – временной интервал длительности регистрации.

2. Сведение дробового шума к эквивалентному белому шуму

Характеристический функционал $\Phi\{U\}$ процесса $\Psi(t)$, заданный на классе финитных непрерывных вектор-функций $U(t)$, определяется формулой [3]

$$\Phi\{U\}=\mathbf{E}\left[\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}<U(t),\Psi(t)>\right)\right].\qquad(5)$$

Теорема 1. *Для характеристического функционала* $\Phi\{U\}$ *случайного процесса* $\Psi(t)\in G_\Psi$ *справедлива формула*

$$\Phi\{U\}=\exp\left(\lambda\int_{-\infty}^{\infty}[f(U(\tau)-1]d\tau\right),\qquad(6)$$

где $f(U)$ *– характеристическая функция* [4,5] *случайного вектора* A*, который статистически эквивалентен каждому из* $\{A_m\}$, $f(S)=\mathbf{E}[\exp[-i<S,A>]$.

Доказательство. Так как $\{\tau_k\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{A_m\}_{-\infty}^{\infty}$ – независимые случайные последовательности, то $\mathbf{E}[.]=\mathbf{E}_\tau[.]\mathbf{E}_A[.]$, где $\mathbf{E}_\tau[.]$ и $\mathbf{E}_A[.]$ – символы математических ожиданий по распределениям вероятностей соответственно для последовательностей $\{\tau_k\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{A_m\}_{-\infty}^{\infty}$. Далее, случайные амплитуды $\{A_m\}_{-\infty}^{\infty}$ с различными номерами m статистически независимы и одинаково распределены, поэтому

$$\mathbf{E}_A\left[\exp\left(-i\sum_k<U(\tau_k),A_k>\right)\right]=$$

$$=\prod_k\mathbf{E}_0\left[\exp\left(-i\sum_k<U(\tau_k),A_k>\right)\right]=\prod_k f(U(\tau_k)).$$

Тогда из (3) получаем формулу

$$\Phi\{U\}=\mathbf{E}_\tau\left(\prod_k f(U(\tau_k))\right).$$

При значениях τ, для которых $U(\tau)=0$, выполняется $f(U(\tau))=1$. Поэтому вычисление математического ожидания в последней формуле достаточно выполнить только для тех τ_k, которые принадлежат $\mathrm{supp}U(t)$. Ввиду того, что $\{\tau_k\}_{-\infty}^{\infty}$ – простейший поток, с вероятностью 1 только конечный набор точек удовлетворяет последнему условию. Пусть число l настолько велико, что $[-l,l] \in \mathrm{supp}\,U(t)$. Тогда, используя явную формулу усреднения по распределению вероятностей для простейшего потока с плотностью λ,

$$\mathrm{E}_\tau\left[\prod_k f(U(\tau_k))\right] =$$
$$= \lim_{l\to\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \exp(-2\lambda) \int_{-l}^{l} d\tau_N \ldots$$
$$\ldots \int_{-l}^{l} d\tau_1 \prod_{k=1}^{N} f(U(\tau_k)) \ ,$$

получим формулу (6).

Следствие. Процесс $\Psi(t)$ стационарен.

Доказательство. Случайный процесс является стационарным в том и только в том случае, если его характеристический функционал, определенный на непрерывных вектор-функциях $U(t)$, инвариантен относительно замены $U(t) \to U(t+t')$ при любом t'. Отсюда и из (5) следует сформулированное следствие.

Теорема 2. *Процесс $X(t)$, который определяется стохастическим дифференциальным уравнением (1) и начальным условием $X(t_0) = X_0$, является марковским.*

Доказательство. Пусть t' ($t' \geq t_0$) – произвольный момент времени и пусть G – любое измеримое случайное событие, связанное с процессом $\{X(t)\}$, которое определяется только теми моментами времени t, для которых $t \geq t'$. Тогда условная вероятность этого события $\Pr\{G|X(t); t \leq t'\}$ при условии, что зафиксирована эволюция системы до момента t', равна

$$\Pr\{G|X(t); t \leq t'\} = \Pr\{G|X(t)\}. \qquad (7)$$

Последнее равенство следует из интегрального представления

$$X(t) = X(t') + \int_{t'}^{t} \Phi(X,\alpha,\beta)\,d\tau + \sum_{k:\,t'\leq t} A_k\,. \qquad (8)$$

Эта формула показывает, что случайная траектория $X(t)$ при $t \geq t'$ зависит только от $\tau_k \in [t',t]$ и отвечающих им $\{A_k\}$, а также от $X(t')$, но не зависит от того, какова была траектория $X(t)$ при $t < t'$. Таким образом, формула (7) выражает свойство марковости процесса $\{X(t)\}$.

Это свойство, с одной стороны, позволяет описать все его статистические свойства с помощью лишь одной функции – плотности вероятности перехода $g(X,t|X_0,t_0)$, а с другой – с помощью стандартной методики [5] дает возможность сформулировать линейное уравнение Колмогорова для этой функции:

$$\frac{d}{dt} g = \mathbf{L}_X g\,. \qquad (9)$$

Нашей дальнейшей задачей является вычисление оператора $\mathbf{L}_X$ в уравнении (9) или, что эквивалентно, его Фурье-представления $\mathbf{L}_K$. В общем случае псевдодифференциальный оператор $\mathbf{L}_K$ является генератором эволюции во времени условной характеристической функции

$$h(K,t|X_0,t_0) = \mathbf{E}\left[\exp\{-i < K, X >\}|X_0,t_0\right] =$$
$$= \int \exp\{-i < K, X >\} g(X,t|X_0,t_0)\,dX\,.$$

Теорема 3. *Для оператора $\mathbf{L}_K$ справедлива формула*

$$\mathbf{L}_K = \left\langle K, \Phi\left(i\partial/\partial K\right), \alpha, \beta\right\rangle + \lambda\left(f(K) - 1\right). \quad (10)$$

Доказательство. Зафиксируем любое $\Delta > 0$ и запишем приращение функции h при переходе от t к $t+\Delta$. Благодаря марковости процесса $\{X(t)\}$ выражение для приращения принимает вид

$$h(K,t+\Delta|X_0,t_0) - h(K,t|X_0,t_0) =$$
$$= \int \lim \mathbf{E}\left[\exp\left(-i < K, X(t+\Delta > |X,t\right)\right] g(X,t|X_0,t_0)\,dX -$$
$$- \int \lim \mathbf{E}\left[\exp\left(-i < K, X(t > |X,t\right)\right] g(X,t|X_0,t_0)\,dX.$$

Математическое ожидание от первого слагаемого справа разложим по формуле полной вероятности с гипотезами, отнесенными к полуинтервалу $[t, t+\Delta)$. Получим: 1) не имеется случайных точек из $\{\tau_k\}$; 2) имеется одна случайная точка; 3) имеется более одной случайной точки. Вероятности этих гипотез для простейшего пуассоновского потока равны соответственно: $1 - \lambda\Delta + o(\lambda\Delta)$, $\lambda\Delta + o(\lambda\Delta)$ и $o(\lambda\Delta)$. Кроме того, при записи этого разложения учтем, на основании (8), что для первой гипотезы

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(-i < K, X(t+\Delta > |X,t\right)\right] =$$
$$= \mathrm{E}\left[\exp\left(-i < K, X(t) > \left[1 - i\Delta < K, \Phi(X,\alpha,\beta) >\right]\right)|X,t\right] + o(\lambda\Delta)$$

а для второй –

$$X(t+\Delta) = X(t) + A_s + o(\lambda\Delta)\,,$$

где A_s отвечает случайной точке τ_s, попавшей в полуинтервал. В результате получаем

$$h_{t+\Delta} - h_t = i\Delta \int \mathrm{E}\left[e^{-i<K,X(t)>} < K, \Phi(X,\alpha,\beta) > |X,t\right] \times$$
$$\times g(X,t|X_0,t_0)\,dX +$$
$$+ \lambda\Delta\left\{\int e^{-i<K,X>} \mathrm{E}\left[e^{-i<K,A_s>}|X,t\right] g(X,t|X_0,t_0)\,dX - h_t\right\} +$$
$$+ o(\lambda\Delta)\,.$$

Первое слагаемое справа преобразуется к виду $-i\Delta < K, \Phi\left(\partial/\partial K\right), \alpha, \beta > h_t$. После замены символа $\mathbf{E}$ во втором слагаемом на символ $\mathbf{E}_A$, деления на Δ и предельного перехода $\Delta \to 0$ получаем утверждение теоремы 3.

Будем в дальнейшем предполагать, что для вектор-функции $\Phi(X,\alpha,\beta)$ имеет место оценка $\sup_X\left(< X,\Phi(X,\alpha,\beta)> \|X\|^2\right) = -\rho$ для некоторого положительного числа ρ. Из этой оценки, в частности, следует, что матрица $B(X) = \partial\Phi(X,\alpha,\beta) / \partial X$ – равномерно диссипативна при $X \in R^n$, т.е.

$$\max(< B(X)Y, Y >: \|Y\| = 1) \le -\rho .$$

Лемма 1. Решение $X(t)$ уравнения (1) с вероятностью 1 равномерно ограничено по норме при $t \in (t_0,\infty)$ случайной постоянной b.

Доказательство. Пусть τ_s – точка последовательности $\{\tau_k\}$, ближайшая к t слева. Из уравнения (1) следует, что при $t > \tau_s$ имеем

$$\frac{d}{dt}\|X\|^2 = < \Phi(X(t),\alpha,\beta), X(t) > \ \le -2\rho\|X\|^2 ,$$

поэтому $\|X(t)\| \le \exp(-\rho t + \rho\tau_s)\|X(\tau_s + O)\|$. Из формулы (8) следует при $t' = \tau_s$, что

$$X(t) = X_s + \int_{\tau_s}^{t}\Phi(X(\tau),\alpha,\beta)\,d\tau + A_s ,$$

где $X_s = X(\tau_s)$. Тогда $X(\tau_s + 0) = X_s + A_s$ и $\|X(t)\| \le \exp(-\rho t + \rho\tau_s)\left(\|X_s\| + \|A_s\|\right)$. Точно так же для любого k имеем неравенство

$$\|X_{k+1}\| \le \exp(-\rho\tau_{k+1} + \rho\tau_k)\left(\|X_k\| + \|A_k\|\right).$$

Пусть τ_l – точка последовательности $\{\tau_k\}$, ближайшая к t_0 справа. Тогда, применяя последовательно полученное неравенство, найдем

$$\|X_k\| \le \left(\sum_{i=1}^{k-1}\exp(-\rho\tau_k + \rho\tau_i)\|A_k\| + \exp(-\rho\tau_k + \rho\tau_0)\|X_0\|\right)$$

и поэтому

$$\|X(t)\| \le \left(\exp(-\rho t + \rho t_0)\,\|X_0\| + \sum_{i=1}^{s}\exp(-\rho t + \rho\tau_1)\|A_i\|\right).$$

Случайный числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{s}\exp(-\rho t + \rho\tau_i)\|A_i\| = b - \|X_0\|$$

сходится с вероятностью 1 [6]. Случайная величина

$C_n = \sum\limits_{k:\, t-n \ge \tau \ge t-n-1} \|A_k\|$, $n \ge 0$ в нашем случае имеет конечное, не зависящее от n математическое ожидание $\mathbf{E}[C_n] = \lambda\mathbf{E}[\|A_i\|]$ и поэтому, используя неравенство Чебышева [7], найдем

$$\Pr\left\{C_n > \exp(\rho n / 2)\right\} < \lambda\exp(\rho n / 2)\,\mathbf{E}\left[\|A_i\|\right].$$

Из формулы Бореля–Кантелли [8] вытекает, что неравенство $C_n > \exp(\rho n / 2)$ с вероятностью 1 выполняется только для конечного набора номеров n. Так как $\left(b - \|X_0\|\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} C_n\exp\left(\rho n / 2\right)$, то предыдущее утверждение обеспечивает существование случайной постоянной b. Объединяя используемые здесь неравенства, находим $\|X(t)\| \le b$.

Лемма 2. Пусть $X(t')$ и $X(t'')$ суть два решения уравнения $dX / dt = \Phi$, которые отвечают двум различным начальным условиям $X'(0) = X'_0$ и $X''(0) = X''_0$. Тогда

$$\|X'(t) - X''(t)\| < \exp(\rho t - \rho t_0)\|X'_0 - X''_0\|.$$

Доказательство. Пусть $Y = X' - X''$ и тогда

$$\frac{d}{dt}\|Y\|^2 = 2\left\langle\left(\Phi(X,\alpha,\beta) - \Phi(X_n,\alpha,\beta)\right), Y\right\rangle = 2\left\langle B(X_a)Y, Y\right\rangle$$

где X_a – некоторая точка на отрезке, который соединяет точки $X(t')$ и $X(t'')$ в R^n. Интегрирование полученного неравенства доказывает утверждение леммы 2. При заданных реализациях $\{\tau_k\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{A_m\}_{-\infty}^{\infty}$ решение $X(t)$ уравнения (1) с $X(t_0) = X_0$ можно рассматривать также как функцию от t_0, $X(t; X_0, t_0)$. На основе этой случайной функции построим процесс $\{X_\infty(t)\}$.

Теорема 4. *При фиксированных X_0 и t с вероятностью* 1 *существует предел*

$$X_\infty(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} X(t; X_0, t_0). \qquad (11)$$

Этот предел не зависит от X_0. Он определяется только реализациями $\{\tau_k\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{A_m\}_{-\infty}^{\infty}$ и таким образом представляет собой траекторию случайного стационарного процесса $\{X_\infty(t)\}$.

Доказательство. Пусть $t'_0 \ge t''_0$ и $X'(t)$, $X''(t)$ – случайные решения уравнения (1) с начальными условиями $X'(t'_0) = X_0$, $X''(t''_0) = X_0$. Пусть номер l момента τ_l определен так, как при доказательстве леммы 1. Так как для любого решения $X(t)$ уравнения (1) выполняется

$$X_{k+1} = X_k + A_k + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\Phi(X(\tau,\alpha,\beta,))\,d\tau ,$$

то, определив по этой формуле случайные последовательности $\{X'_k\}$, $\{X''_k\}$, получим, применяя лемму 2 при $t = \tau_{k+1}$ и $t_0 = \tau_k$:

$$\|X'_{k+1} - X''_{k+1}\| < \exp(\rho\tau_{k+1} - \rho\tau_k)\|X'_k - X''_k\|.$$

Из этого неравенства и формулы (2.4) при $t' = t'_0$ имеем

$$\|X'(t) - X''(t)\| < \exp(\rho t - \rho t')\|X_0 - X''(t'_0)\|. (12)$$

Так как в силу леммы 1 $\|X''(t'_0)\| < b$, то из неравенства (12) следует, что с вероятностью 1 выполняются условия Коши для функции $X(t; X_0, t_0)$ при $t \to \infty$. Таким образом, с той же вероятностью предел (11) существует. Пусть теперь решения $X'(t)$ и $X''(t)$ отвечают начальным условиям $X'(t_0) = X'_0$, $X''(t_0) = X''_0$. Тогда, полагая в (11) $t'_0 = t'$ и устремляя $t_0 \to -\infty$, получаем, что $X'_\infty(t) = X''_\infty$. Таким образом, предел (11) не зависит от X_0.

Каждая траектория $X_\infty(t)$ однозначно восстанавливается по реализациям $\Psi(t)$. Иными словами, она является случайным функционалом от $\Psi(t)$, который обозначим, подчеркнув явную зависимость от $\Psi(t)$, как $X_\infty(t) = X_\infty(t, \Psi(t'))$.

Из процедуры построения этого функционала следует, что он обладает свойством

$$X_\infty(t + \tau, \Psi(t')) = X_\infty(t, \Psi(t' - \tau)) \qquad (13)$$

при любом τ. Функционалы $X(t; X_0, t_0)$ измеримы, так как зависят от конечного набора случайных параметров. В силу (11) функционал $X_\infty(t)$ также измерим, как предел измеримых функционалов. Таким образом, распределение вероятностей для $X_\infty(t)$ индуцируется распределением вероятностей для процесса $\Psi(t)$. В силу формулы (11) распределение вероятностей для процесса $X_\infty(t + \tau)$ индуцируется распределением вероятностей для процесса $\Psi(t - \tau)$. Но процесс $\Psi(t)$ – стационарен. Поэтому распределения вероятностей для процессов $\Psi(t - \tau)$ и $\Psi(t)$ совпадают. Отсюда следует, что и процесс $X_\infty(t)$ – стационарен.

Теорема 5. *Процесс $X_\infty(t)$ асимптотически при $t \to \infty$ приближает по вероятности каждый из процессов $X(t)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется*

$$\Pr\{\|X(t) - X_\infty(t)\| > \varepsilon\} \to 0, \qquad t \to \infty. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $X_\infty(t_0) = X''$. Тогда, полагая в неравенстве (13) $t_0 = t'_0$, $X'(t) = X(t)$, $X''(t) = X_\infty(t)$, получим

$$\|X(t) - X_\infty(t) \le \exp(-\rho t + \rho t_0)\|X_0 - X_\infty(t_0)\|$$

и так как $\|X_\infty(t_0)\| < b$, то при $t \to \infty$ следует утверждение теоремы 5.

Докажем теперь теорему, важную для определения оптимального управления в стационарном приближении.

Теорема 6. *Уравнение (9), отвечающее процессу $X(t)$, обладает единственным устойчивым решением $g_\infty(X)$, которое определяет распределение вероятностей в R^n и которое притягивает при $t \to \infty$ условные распределения $g(X, t{:}\, X_0, t_0)$ при любых X_0 и t_0.*

Доказательство. В силу свойства (12) для любой окрестности σ любой точки $X \in R^n$ имеем

$$\left|\Pr\left[X(t) \in \sigma\right] - \Pr\left[X_\infty(t) \in \sigma\right]\right| \to 0, \ t \to \infty.$$

В частности, так как процессы имеют непрерывные плотности одномерных распределений вероятностей соответственно $g(X,t)$ и $g_\infty(X,t)$, то почти всюду по X имеем $\left|g(X,t) - g_\infty(X,t)\right| \to 0$ при $t \to \infty$. Плотность $g_\infty(X,t)$ не зависит от t, так как процесс $X_\infty(t)$ стационарен. Поскольку $g(X,t)$ удовлетворяет уравнению (9), то $g_\infty(X)$ обязана удовлетворять уравнению

$$\mathbf{L}_X \, g_\infty = 0 \qquad \text{либо} \qquad \mathbf{L}_K \, g_\infty = 0. \qquad (15)$$

Следующая теорема является объединением известных утверждений [5,9]. Мы ее приводим вместе с доказательством для полноты изложения.

Теорема 7. *Пусть $\underline{X}(t)$ – процесс, определяемый уравнением (1) и начальным условием $\underline{X}(t_0) = \underline{X}_0$, в котором $\underline{\Psi}(t)$ суть n-мерный белый шум с ковариационной матрицей D,*

$$\mathbf{E}\left[\underline{\Psi}(t)\underline{\Psi}(t')\right] = D\Delta(t - t'), \quad \mathbf{E}\left[\underline{\Psi}(t)\right] = 0.$$

Тогда для процессов $\underline{X}(t)$ и $\underline{X}_\infty(t)$ и отвечающим им одномерных плотностей $\underline{g}(X,t)$ и $\underline{g}_\infty(X,t)$ справедливы утверждения, аналогичные теоремам 5, 6. При этом Фурье-образ плотности $\underline{g}_\infty(X,t)$ является решением уравнения

$$-i\left\langle K, \Phi\left(\partial / \partial K\right)\right\rangle \underline{h}_\infty = \frac{1}{2} < K, DK > \underline{h}_\infty. \quad (16)$$

Доказательство. Обобщенный случайный процесс $\underline{\Psi}(t)$ может рассматриваться как следующий слабый предел. Заменим векторные амплитуды $\{A_m\}$ на $\{\sigma A_m\}$, $\sigma > 0$ и перейдем к пределу $\lambda \to \infty$ и $\sigma \to \infty$ так, что $\lambda\sigma = const$. Тогда производящий функционал (5) перейдет в производящий функционал белого шума с ковариационной матрицей $D = const * M$, где $M_{lm} = \mathbf{E}[a_l a_m]$, $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Решения $\underline{X}(t)$ стохастического дифференциального уравнения (1) с белым шумом в качестве порождающего процесса являются пределами с вероятностью 1 решений $X(t)$ уравнений (1) с дробовым шумом $\Psi(t)$ для тех же начальных условий. Точно так же процесс $X_\infty(t)$ сходится с вероятностью 1 к некоторому стационарному процессу $\underline{X}_\infty(t)$. Оператор L_K в уравнениях Колмогорова, отвечающих процессам $\underline{X}(t)$ и $\underline{X}_\infty(t)$, также получается описанным выше предельным переходом. Тогда из формулы (16) путем подстановки явного выражения (10) и предельного перехода получаем уравнение (16).

Перейдем теперь к формулировке теоремы, содержащей основной результат работы об эквивалентности задач параметрической оптимизации динамических систем, возмущенных дробовым шумом, и систем, возмущенных белым шумом с соответствующей ковариационной матрицей.

Теорема 8. *Оптимальное управление в стационарном приближении процессом* $X_\infty(t)$ *эквивалентно оптимальному управлению аналогичным процессом, который порождается белым шумом с ковариационной матрицей*

$$D = \lambda M . \tag{17}$$

Доказательство. Так как

$$f(K) = 1 - 0{,}5 < MK, K > + o(\|K\|^2) \text{ при } \|K\| \to 0$$

и $\mathbf{E}_0[\|A_m\|] < \infty$, $\mathbf{E}_0[_m| < \infty$, то

$$h_\infty = 0{,}5 < HK, K > + o(\|K\|^2), \tag{18}$$

где H — матрица вторых моментов плотности распределения $\underline{g}_\infty(\underline{X})$.

Функционал качества $\underline{J}$ полностью определяется матрицей H

$$\underline{J} = \mathrm{Sp(HG)} \tag{19}$$

с некоторой положительно-определенной матрицей G.

Для нахождения матрицы H воспользуемся формулами (10) и (15). Удерживая в разложении (18) только квадратичные члены, получим, что матрица H является решением стационарного уравнения Ляпунова $BH + HB = \lambda M$, где $B = B(0)$ и $\Phi(X) = BX + o(\|X\|^2)$. Матрица же $\underline{H}$, отвечающая уравнению (1), в котором $\Psi(t)$ заменяется на белый шум с ковариационной матрицей D, определяется аналогично из уравнения

$$B\underline{H} + \underline{H}B = -D. \tag{20}$$

Потребовав теперь, чтобы $H = \underline{H}$, получим формулу (17).

Таким образом, задача параметрической оптимизации динамической системы (1), возмущенной дробовым шумом (3), эквивалентна задаче параметрической оптимизации динамической системы (1), возмущенной белым шумом $\Psi(t)$ с ковариационной матрицей (17). Практически это означает, что хорошо разработанный статистический аппарат параметрической оптимизации, базирующийся на гипотезе о белом шуме, как о порождающем процессе, возможно распространить и на решения задач оптимизации динамических систем, подверженных воздействию эквивалентного в энергетическом отношении дробового шума.

3. Заключение

В заключение отметим, что доказанная теорема 8 имеет место только для функционалов качества квадратичного вида. Поэтому результат работы можно сформулировать и таким образом. Если движение системы определяется уравнением (1) с $\Psi(t) \in R^n$, то существует асимптотическая плотность распределения вероятностей $g_\infty(X)$, моменты которой вполне определяются вторыми моментами шума $\Psi(t)$.

Полученные в работе результаты относятся к классу случайных процессов — случайных дробовых шумов, представляющих собой случайную последовательность мгновенных импульсов. Вместе с тем ясно, что с практической точки зрения важно распространение этих результатов на более широкий класс возмущающих процессов, значимых в практическом отношении. Помимо того, что дробовые шумы достаточно распространены, они в качестве модели удобны благодаря возможности применения теории марковских процессов. Можно высказать гипотезу, что результаты работы справедливы для некоторого более широкого класса стационарных случайных процессов, чем рассмотренные, а именно для класса, внутри которого возможно осуществить слабый предельный переход к белому шуму.

Литература: 1. *Александров Е.Е.* К вопросу о параметрической оптимизации регулируемых систем // Изв. вузов. Электромеханика. 1990. № 6. С.84—87. 2. *Александров Е.Е.* Параметрическая оптимизация регулируемых динамических систем с помощью функций Ляпунова // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. № 3. С.44—49. 3. *Гнеденко Б.В, Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336с. 4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1961. 406 с. 5. *Гихман Н.Н., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т.III. М.: Наука, 1971. 496 с. 6. *Вирченко Ю.П., Ласкин Н.В.* Огрубленное описание распределения решений уравнения Ланжевена // Теоретическая и математическая физика. 41, № 3. 1979. С.406—417. 7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т.1. 528 с., Т.2. 728 с. 8. *Ламперти Дж.* Вероятность. М.: Наука, 1973. 184 с. 9. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 560 с. 10. *Справочник по теории автоматического управления* / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 758 с.

Поступила в редколлегию 25.11.99

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дикарев В.А.

Мазманишвили Александр Сергеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры САУ ХГПУ. Научные интересы: теория связи, радиофизика, прикладная математика. Адрес: Украина, 61002, Харьков, ул.Фрунзе, 21, тел. 40-00-56.

Сила Татьяна Александровна, аспирантка кафедры КГМ ХГПУ. Научные интересы: теория устойчивости, прикладная математика, теория автоматического управления. Адрес: Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 40-03-55.

Слипченко Николай Иванович, канд. техн. наук, доцент кафедры МЭПУ ХТУРЭ, проректор по научной работе ХТУРЭ. Научные интересы: моделирование процессов формирования интегральных структур, разработка теории многофункциональных частотных элементов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 47-01-07.