

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874.6

РАССЕЯНИЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ НА КОНИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

© 2000 г. В. А. Дорошенко, В. Ф. Кравченко

Поступила в редакцию 24.01.2000 г.

Представлены результаты исследования задачи возбуждения электрическим радиальным диполем полубесконечного идеально проводящего бесконечно тонкого кругового конуса с периодически прорезанными вдоль образующих щелями. Метод решения задачи основан на использовании интегрального преобразования Конторовича–Лебедева и метода задачи Римана–Гильберта. В случае полупрозрачного конуса и конуса с узкими щелями получено аналитическое решение. Изучено влияние щелей на структуру, поляризацию поля и его поведение вблизи вершины конуса.

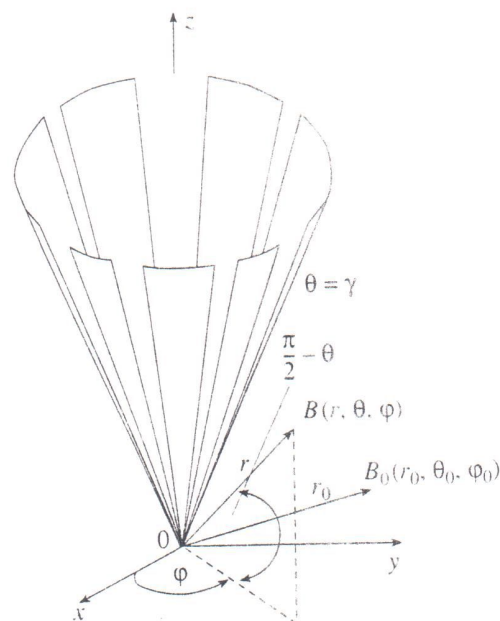
ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных проблем современных информационных технологий является создание сверхширокополосного излучения. Конические структуры обладают ненаправленными свойствами и сверхширокополосностью как по диаграмме направленности, так и по согласованию [1]. Они нашли широкое применение в радиолокации, связи и телеметрии [2–5]. Наличие неоднородностей, в частности щелей на поверхности экрана, влияет на структуру и поляризацию рассеянного поля [2–5], а изменение их числа и размеров позволяет управлять характеристиками рассеяния и создавать направленное излучение. Исследованию электродинамических задач для неоднородных конусов и биконусов посвящены работы [2–6]. Конические структуры с поперечными (азимутальными) щелями рассматривались в [2, 4], а спирально и радиально проводящие поверхности – в [5]. Задача дифракции на полубесконечном идеально проводящем эллиптическом конусе с продольной щелью исследовалась в [6], однако ширина щели предполагалась намного меньше ее длины. Рассматриваемая структура, полубесконечный идеально проводящий бесконечно тонкий круговой конус с периодически прорезанными вдоль образующих щелями, является моделью конической щелевой антенны с управляемой диаграммой и поляризацией излучения. Цель работы – исследование задачи возбуждения электрическим радиальным диполем конуса с периодическими продольными щелями. Частные случаи данной структуры представляют самостоятельный интерес как для теории, так и для практических приложений: конус с продольной щелью, плоский угловой сектор (в частности, четверть плоскости), конус с двумя симметричными щелями (модель V-образной антенны) и т.д. Метод решения основан на использовании интегрального преобразования Конторовича–Лебедева и метода задачи Римана–

Гильберта. В случае полупрозрачного конуса и конуса с узкими щелями получено аналитическое решение задачи и проанализированы структура и поляризация поля, а также его поведение вблизи нерегулярностей границы (вершина конуса, ребра конических лент).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полубесконечный идеально проводящий бесконечно тонкий круговой конус Σ (рисунок) с периодически прорезанными вдоль образующих Δ щелями в сферической системе координат r, ϑ, φ определяется уравнением $\vartheta = \gamma$. Обозначим через d и $l = 2\pi/N$ угловую ширину щелей и период ко-



Геометрия задачи.

нической структуры (d и l – величины двугранных углов, которые образованы плоскостями, проведенными через ось конуса и ребра соседних конических лент). Конус возбуждается электрическим радиальным диполем с моментом \vec{e} и расположенным в точке $B_0(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$. Поле диполя $\vec{E}^{(вх)}$, $\vec{H}^{(вх)}$ во времени меняется гармонически. Присутствие конуса обуславливает появление рассеянного поля $\vec{E}^{(рас)}$, $\vec{H}^{(рас)}$. Полное поле \vec{E} , \vec{H} :

$$\vec{E} = \vec{E}^{(вх)} + \vec{E}^{(рас)}, \quad \vec{H} = \vec{H}^{(вх)} + \vec{H}^{(рас)} \quad (1)$$

удовлетворяет системе уравнений Максвелла в пространстве, заполненном средой с постоянными магнитной проницаемостью μ и диэлектрической проницаемостью ϵ , и граничному условию на лентах

$$E_{тан}|_{\Sigma} = 0,$$

условию излучения и условию конечности энергии. Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение. Для решения задачи удобно использовать электрический потенциал Дебая U [7], который удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца вне конуса и источника, граничному условию Дирихле на лентах, принципу предельного поглощения и условию вблизи нерегулярностей границы. В соответствии со структурой полного поля U записываем в виде

$$U = U^{(вх)} + U^{(рас)},$$

где

$$U^{вх} = \frac{|\vec{e}| \exp(-ikR)}{r_0 R}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (2)$$

$$\text{Im} k \leq 0, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}_0|.$$

Одним из эффективных средств для исследования граничных задач с конической геометрией является интегральное преобразование Конторовича–Лебедева [8]

$$G(\tau) = \int_0^{\infty} g(r) \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} dr, \quad (3)$$

$$g(r) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tau \text{sh} \pi \tau \exp(\pi \tau) G(r) \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} d\tau. \quad (4)$$

Учитывая представление для $U^{(вх)}$ [5]

$$U^{(вх)} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tau \text{sh} \pi \tau \exp(\pi \tau) \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(\tau, k) \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} U_{m\tau}^{(i)}(\vartheta, \vartheta_0) d\tau,$$

$$a_m(\tau, k) = \frac{\pi |\vec{e}| (-1)^m \exp(-im\varphi_0) H_{i\tau}^{(2)}(kr_0)}{r_0 \text{ch} \pi \tau \sqrt{r_0}} \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + i\tau\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + i\tau\right)},$$

$$U_{i\tau}^{(вх)}(\vartheta, \vartheta_0) = \begin{cases} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \vartheta_0), & 0 < \vartheta < \vartheta_0 \\ P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \vartheta) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \vartheta_0), & \vartheta_0 < \vartheta < \pi, \end{cases}$$

решение граничной задачи ищем в виде интеграла Конторовича–Лебедева (4):

$$U^{(рас)} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tau \text{sh} \pi \tau \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{m\tau}^{(s)} U_{m\tau}^{(s)}(\vartheta, \varphi) \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (5)$$

где

$$b_{m\tau}^{(s)}(\tau, k) = -a_m(\tau, k) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \vartheta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma),$$

$$U_{m\tau}^{(рас)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m, n+m_0}(\tau) \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \vartheta)}{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \gamma)} \times \\ \times \exp(i(m+nN)\varphi), \quad (6)$$

$H_{i\tau}^{(2)}(kr)$ – функция Ханкеля, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $P_{\nu}^m(\cos \vartheta)$ – присоединенная функция Лежандра, $x_{m, n}$ – неизвестные коэффициенты; m_0 – ближайшее к m/N целое число, $\nu = m/N - m_0$, $-1/2 \leq \nu < 1/2$. Верхние знаки в (6) соответствуют области $0 < \vartheta < \gamma$, а нижние $\gamma < \vartheta < \pi$. Требуется выполнение условия конечности энергии накладывает ограничение на $x_{m, n}$ и принадлежности гильбертову пространству L^2 с нормой

$$\|\xi\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + |n|) |\xi_n|^2.$$

2. ПАРНЫЕ СУММАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ. БЕСКОНЕЧНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Использование граничного условия на лентах конуса и условия непрерывности поля в щелях приводят к системе парных функциональных сумматорных уравнений первого рода с ядром в виде тригонометрических функций

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n} \exp(inN\varphi) = \exp(im_0N\varphi), \quad (7)$$

$$\pi d/l < |N\varphi| \leq \pi,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} N(n+v) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}) x_{m,n} \exp(inN\varphi) = 0, \quad (8)$$

$$|N\varphi| < \pi d/l,$$

где

$$\begin{aligned} N(n+v) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}) &= \\ &= \frac{(-1)^{(n+v)N}}{\pi} \operatorname{ch} \pi \tau \frac{\Gamma(1/2 + i\tau + (n+v)N)}{\Gamma(1/2 + i\tau - (n+v)N)} \times \\ &\times \frac{1}{P_{-1/2+i\tau}^{(n+v)N}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^{(n+v)N}(-\cos \gamma)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя асимптотическое разложение функции $P_{\nu}^m(\cos \gamma)$ при $m \gg 1$ [9], нетрудно показать, что для $\varepsilon_{m,n}$ имеет место оценка

$$\varepsilon_{m,n} = O\left(\frac{1}{N^2(n+v)^2}\right). \quad (10)$$

При таком способе возбуждения плотность поверхностного тока, наведенного на лентах конуса, имеет только радиальную компоненту j_r , которая выражается через коэффициенты $x_{m,n}$ по формуле

$$\begin{aligned} j_r &= \frac{2ik}{\sin \gamma} \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \exp(i(n+v)N\varphi) \times \\ &\times \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} b_m(\tau, k) N(n+v) \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}) x_{m,n}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Оператор функциональных уравнений (7), (8) является неограниченным и несамосопряженным. Поэтому для их решения нельзя воспользоваться аппаратом операторных уравнений в гильбертовых пространствах [10, 11]. Для системы (7), (8) удастся построить левый регуляризатор и свести ее к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) второго рода фредголь-

мовского типа [11, 12]. Преобразуем систему парных уравнений к виду, удобному для регуляризации. Введем коэффициенты $y_{m,n}$, связанные $x_{m,n}$ по формуле

$$y_{m,n} = (-1)^{n-m_0} \frac{n+v}{m_0+v} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}) x_{m,n}, \quad (12)$$

и, дифференцируя (7) по φ , приходим к следующей системе функциональных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|n|}{n} (1 - \delta_{m,n}) y_{m,n} \exp(in\psi) = \exp(im_0\psi), \quad (13)$$

$$|\psi| < (l-d)\pi/l$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_{m,n} \exp(in\psi) = 0, \quad (l-d)\pi/l < |\psi| \leq \pi, \quad (14)$$

с дополнительным условием:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n+v} \frac{|n|}{n} (1 - \delta_{m,n}) y_{m,n} = \frac{1}{m_0+v}, \quad (15)$$

где

$$1 - \delta_{m,n} = \frac{1}{1 - \varepsilon_{m,n}}, \quad \psi = N\varphi - \frac{|\varphi|}{\phi} \pi. \quad (16)$$

Разбивая оператор, соответствующий левой части системы, на главную и вполне непрерывную части и обращая главную часть с помощью метода задачи Римана-Гильберта [13], приходим к БСЛАУ второго рода фредгольмовского типа относительно $y_{m,n}$

$$M_{\nu}(u) y_{m,0} = V^{m_0}(u) + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{|s|}{s} \delta_{m,s} V^s(u) y_{m,s}, \quad (17)$$

$$M_{\nu}(u) = \frac{1}{\nu} \frac{P_{\nu}(-u) - P_{\nu}(-u)}{\nu P_{\nu-1}(-u) + P_{\nu}(-u)},$$

$$y_{m,q} = V_{q-1}^{m_0}(u) +$$

$$+ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{|s|}{s} \delta_{m,s} y_{m,s} V_{q-1}^{s-1}(u) + y_{q,0} P_q(u), \quad (18)$$

здесь $u = \cos(\pi(l-d)/l)$, $P_{\nu}(u)$ – функция Лежандра, функции $V_{n-1}^{m-1}(u)$ и $V^m(u)$ определены и вычислены в [14]. Системы (17), (18) эквивалентны парным функциональным уравнениям (7), (8) и являются результатом их регуляризации. Таким образом, исходная электродинамическая задача сведена к решению бесконечной системы относительно коэффициентов Фурье потенциала Дебая. Неизвестные коэффициенты $y_{m,n}$ не зависят от волнового числа, что удобно для определения поля как вблизи вершины ($kr \ll 1$), так и вдали от

нее ($kr \gg 1$). Решение БСЛАУ существует и единственно и для произвольных параметров задачи может быть получено методом усечений (методом редукции). Приближенное решение, построенное с помощью метода усечений, тем меньше отличается от точного, чем выше порядок усечения [11]. В случае полупрозрачного конуса, когда число щелей велико, а их ширина сравнима с периодом структуры конуса с узкими щелями, норма матричного оператора меньше единицы, что позволяет применить метод последовательных приближений (итераций) для нахождения решения системы (17), (18). Используя метод последовательных приближений и ограничиваясь первым приближением, получаем для $y_{m,n}$ выражения

$$y_{m,0} = \frac{V^{m_0}(u) + \sum_{s \neq 0} A_{ms} [V_{s-1}^{m_0-1}(u) + \Phi_s^{m_0}(u)]}{M_v(u) + \frac{1}{v}(1 - \delta_{m,0}) - \sum_{s \neq 0} A_{ms} W_s^{m_0}(u)}, \quad (19)$$

$$y_{m,s} = \frac{1}{1 - \frac{|s|}{s} \delta_{m,s} V_{s-1}^{m_0-1}(u)} \times$$

$$\times [V_{s-1}^{m_0-1}(u) + \Phi_s^{m_0}(u) + y_{m,0} W_p^m(u)], \quad s \neq 0,$$

где

$$W_s^m(u) = P_s(u) + \delta_{m,0} V_{s-1}^{-1}(u) + \Phi_s(u),$$

$$A_{ms} = \frac{1}{1 - \frac{|s|}{s} \delta_{m,s} V_{s-1}^{m_0-1}(u)} \frac{|s|}{s} \delta_{m,s} V^s(u). \quad (21)$$

Для $\Phi_s^{m_0}(u)$ и $\Phi_s(u)$ имеют место оценки

$$|\Phi_s^{m_0}(u)| < \frac{p}{1-p} [1 - u + \sqrt{1-u} \ln(1 + |m_0|)], \quad m_0 \neq 0,$$

$$|\Phi_s(u)| < \frac{p}{1-p} (1 + |\delta_{m,0}| \sqrt{1-u}), \quad (22)$$

$$p < \text{const} \frac{\sqrt{1-u^2}}{N^2} \sin^2 \gamma.$$

3. ПОЛУПРОЗРАЧНЫЙ КОНУС

Переходя в приближении (19), (20) к пределу при $N \rightarrow +\infty$, $d/l \rightarrow 1$, найдем коэффициенты $y_{m,n}$ и $x_{m,n}$ для полупрозрачного конуса, который представляет собой предельный случай конуса с продольными щелями, когда существует предел

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ d/l \rightarrow 1}} \left[-\frac{1}{N} \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right] = Q > 0. \quad (23)$$

Подставляя предельные значения в (6), получаем выражение для потенциала Дебая ($\gamma < \vartheta_0$)

$$U^{(\text{pac})} = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(im\varphi) \int_0^{+\infty} \frac{\tau \text{sh} \pi \tau \exp(\pi \tau) a_m(\tau, k)}{1 + 2m(1 - \varepsilon_{m,0})Q} \times$$

$$\times \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \vartheta)}{\sqrt{kr} P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma)} d\tau, \quad \gamma < \vartheta < \pi. \quad (24)$$

Это выражение справедливо для источника и точек наблюдения, связанных условием $\vartheta + \vartheta_0 > \pi + 2\gamma$, что обусловлено сходимостью интеграла и соответствует области рассеянного вершины поля. Аналогичное представление будет для $U^{(s)}$ и при $0 < \vartheta < \gamma$. На поверхности полупрозрачного конуса компоненты электромагнитного поля удовлетворяют усредненным граничным условиям вида

$$E_r^+ = E_r^-, \quad (25)$$

$$-\frac{ik}{wQ \sin \gamma} E_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r \tilde{H}_\phi), \quad (26)$$

где $\tilde{H} = H^+ - H^-$, а f^+ и f^- означают предельные значения функции f при $\vartheta = \gamma \pm 0$. Рассмотрим случай осесимметричного возбуждения конуса ($\varphi_0 = 0$, $\vartheta_0 = \pi$). После перехода в представлении (24) к интегрированию по мнимой оси ($\mu = i\tau$) выражение для $U^{(\text{pac})}$ запишем в виде

$$U^{(\text{pac})} = \frac{\pi^2 |\tilde{e}|}{2r_0 \sqrt{rr_0}} \int_{-i\infty}^{+\infty} \frac{\mu T_\mu(r, r_0)}{\Delta_\mu \cos \pi \mu} [P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma)]^2 \times$$

$$\times P_{-1/2+\mu}(-\cos \vartheta) d\mu, \quad \gamma < \vartheta < \pi,$$

где

$$\Delta_\mu = \pi P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) + 2Q \cos \pi \mu, \quad (28)$$

$$T_\mu(r, r_0) = \begin{cases} I_\mu(kr) H_\mu^{(2)}(kr_0), & r < r_0, \\ H_\mu^{(2)}(kr) I_\mu(kr_0), & r > r_0. \end{cases}$$

Используя теорему Коши о вычетах, интеграл в (27) можно разложить в ряд по вычетам относительно полюсов подынтегральной функции и получить решение задачи в виде ряда.

Интегральное представление (27) целесообразно использовать для анализа поля в дальней зоне ($kr \gg 1$), а представление в виде ряда – для выяснения поведения поля у вершины конуса и определения поля в случае близкого расположения источника к вершине ($kr_0 \ll 1$). Приведем

представление одной из компонент полного поля в виде ряда

$$E_{\vartheta} = -\frac{\pi^3 i |\vec{e}|}{rr_0 \sqrt{r_{0s}} \sum_{s=0}^{+\infty} \mu_s (\mu_s^2 - 1/4) \frac{d}{dr} (\sqrt{r} T_{\mu_s}(r, r_0))}{\cos \pi \mu_s \frac{d}{d\mu} \Delta_{\mu} |_{\mu=\mu_s}} \times \quad (29)$$

$$\times [P_{-1/2+\mu_s}(\cos \gamma)]^2 P_{-1/2+\mu_s}(-\cos \vartheta), \quad \gamma < \vartheta < \pi,$$

$$\Delta_{\mu_s} = 0.$$

Спектр граничной задачи для полупрозрачного конуса определяется корнями уравнения $\Delta_{\mu} = 0$, наименьший из которых характеризует поведение поля вблизи вершины конуса. В частном случае полупрозрачного конуса, когда $Q \ll 1$, эти корни находятся вблизи нулей функции $P_{-1/2+\mu}(\pm \cos \gamma)$

$$\mu_s^{\pm} = \alpha_s^{\pm} - \frac{2Q \cos \pi \alpha_s^{\pm}}{\pi \frac{d}{d\mu} [P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma)] |_{\mu=\alpha_s^{\pm}}} + O(Q^2), \quad (30)$$

$$P_{-1/2+\alpha_s^+}(\cos \gamma) = 0, \quad P_{-1/2+\alpha_s^-}(-\cos \gamma) = 0.$$

Таким образом, спектр в этом случае представляет собой возмущенный спектр граничной задачи Дирихле для сплошного конуса [15] при осесимметричном возбуждении. У вершины конуса электрическое поле ведет себя, как $(kr)^{-3/2+\mu_0^-}$, а магнитное – как $(kr)^{-1/2+\mu_0^-}$, здесь

$$\mu_0^- = \alpha_0^- - AQ + O(Q^2), \quad (31)$$

$$A = \frac{2 \cos \pi \mu_0}{\pi P_{-1/2+\alpha_0^-} \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) |_{\mu=\alpha_0^-}}.$$

Принимая во внимание поведение функции $P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma)$ в окрестности первого корня α_0^- [16], предполагая $\gamma \leq \pi/2$ ($1/2 < \alpha_0^- \leq 3/2$), приходим к выводу, что $A > 0$. Поведение электрического поля вблизи вершины сплошного кругового конуса порядка $(kr)^{-3/2+\alpha_0^-}$, а магнитного – порядка $(kr)^{-1/2+\alpha_0^-}$ [17]. Отсюда следует, что особенность поля у вершины полупрозрачного конуса ($Q \ll 1$) больше, чем у сплошного. В случае полупрозрачного конуса при $Q \gg 1$

$$\mu_s = \frac{1}{2} + s + \frac{1}{2Q} [P_s(\cos \gamma)]^2 + O(Q^{-2}), \quad (32)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots,$$

а поле вблизи вершины имеет особенность порядка $(kr)^{-1+1/2Q}$.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИЗ УЗКИХ ЩЕЛЕЙ

Пусть диполь находится внутри и на оси конуса ($\varphi_0 = 0, \vartheta_0 = 0; m = m_0 = 0$). Рассмотрим задачу об изучении из узких щелей ($d/l \ll 1$). Используя оценки и асимптотики функций $V_{p-1}^{n-1}(u)$ при $(1+u) \ll 1$ [14], получаем из (21), (22), (12), (5), (6) асимптотическое разложение по параметру $(1+u)$ потенциала $U^{(pac)}$, соответствующего полю вдали от щелей

$$U^{(pac)} = \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} L(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos \vartheta) d\tau - \frac{(1+u)}{2N} \sum_{n \neq 0} \exp(in\varphi) \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(2)}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{L_n(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos \vartheta)}{F_{i\tau}^n P_{-1/2+i\tau}^N(\pm \cos \gamma)} d\tau + O((1+u)^2 \ln(1+u)), \quad (33)$$

$$L(\tau) = -\frac{1}{2} \text{th} \pi \tau \exp(\pi \tau) b_0(\tau, k) \frac{P_{-1/2+i\tau}(\mp \cos \gamma)}{D_{i\tau} - \frac{1}{N} \ln \left(\frac{1-u}{2} \right)}$$

$$L_n(\tau) = -\frac{1}{2} \frac{\tau \text{sh} \pi \tau \exp(\pi \tau) b_0(\tau, k)}{D_{i\tau} + \frac{1-\delta_n}{N|n| \delta_n}} \frac{1}{N|n|} \frac{1-\delta_n}{\delta_n}.$$

$$D_{i\tau} = \frac{1}{N|n|} (1-\delta_n) |_{n=0},$$

$$F_{i\tau}^N = \frac{D_{i\tau} \frac{1}{N|n|} (1-\delta_n)}{\delta_n D_{i\tau} + \frac{1}{N|n|} (1-\delta_n)} + \frac{1}{2N} (1+u). \quad (34)$$

Верхние знаки в (33) относятся к области $0 < \vartheta < \pi$, а нижние – к $\gamma < \vartheta < \pi$. Устремляя ширину щелей к нулю ($d \rightarrow 0, u \rightarrow -1$) в представлении (33), получаем известное выражение для электрического потенциала Дебая в случае осесимметричного возбуждения сплошного конуса электрическим радиальным диполем [15]. Рассеянное сплошным конусом поле обладает такой же поляризацией, как и поле источника, и имеет три компоненты ($E_r, E_{\vartheta}, H_{\varphi}$). При наличии щелей поле (TM-типа) имеет все компоненты, что свидетельствует об изменении поляризационной структуры поля. Переходя к интегрированию по мнимой оси ($\mu = i\tau$) в (33), представим потенциал U , со

ответствующий полному полю, в виде ряда вычетов по полюсам подынтегральной функции

$$U = \frac{1}{N}(1+u) \frac{\pi i |\vec{e}|}{r_0 \sqrt{r_0 r}} \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_n \cos nN\varphi \times \left\{ \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\mu G_\mu(\xi_s^+, r, r_0) P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos\vartheta)}{d\mu P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos\gamma)} \right\}_{\mu=\alpha_s^+} + \left\{ \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\mu G_\mu(\xi_q^{nN-}, r, r_0) P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos\vartheta)}{P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos\gamma)} \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos\gamma) \right\}_{\mu=\alpha_q^{nN-}} \quad (35)$$

$$+ O((1+u)^2 \ln(1+u)), \quad \gamma < \vartheta < \pi,$$

$$G_\beta(\alpha, r, r_0) = \begin{cases} \left(\frac{kr}{2}\right)^{\beta-\alpha} I_\alpha(kr) H_\alpha^{(2)}(kr_0), & r < r_0, \\ \left(\frac{kr_0}{2}\right)^{\beta-\alpha} H_\alpha^{(2)}(kr) I_\alpha(kr_0), & r > r_0, \end{cases}$$

$$\chi_n = \begin{cases} 1/2, & n = 0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases}, \quad P_{-1/2+\alpha_s^{nN\pm}}^{\pm nN}(\pm \cos\gamma) = 0, \quad (36)$$

$$F_\mu^{nN} \Big|_{\mu=\xi_s^{nN\pm}} = 0, \quad (37)$$

$$\xi_s^{nN\pm} = \alpha_s^{nN\pm} - \frac{(1+u)}{2N} \bar{D}_\mu^{nN} \Big|_{\mu=\alpha_s^{nN\pm}} + O((1+u)^2), \quad (38)$$

$$\bar{D}_\mu^{nN} = \frac{(-1)^{nN} \cos \pi \mu}{\pi \frac{\Gamma(1/2 + \mu + nN)}{\Gamma(1/2 + \mu - nN)} \frac{d}{d\mu} [P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos\gamma) P_{-1/2+\mu}^{-nN}(-\cos\gamma)]}, \quad \alpha_s^{nN\pm} \Big|_{n=0} = \alpha_s^\pm,$$

где α_q^{nN+} соответствует верхнему знаку у аргумента функции Лежандра, а корни α_q^{nN-} – нижнему. В структуре поля, рассеянного конусом с узкими щелями, присутствуют слагаемые, соответствующие полю для сплошного конуса и обусловленные наличием щелей. Рассеянное поле представляется бесконечным набором *TM*-волн эллиптической поляризации. Спектр граничной задачи для конуса с узкими щелями состоит из корней $\xi_s^{nN\pm}$ (38) уравнения (37) и представляет собой возмущенный щелями спектр $\{\alpha_s^{nN\pm}\}$ граничной задачи для сплошного конуса [15]. Поведение поля у вершины ($\gamma \leq \pi/2$) характеризуется наименьшим собственным значением спектра

$$\xi_0^- = \alpha_0^- - \frac{(1+u)}{2N} A + O((1+u)^2), \quad (39)$$

при этом электрическое поле имеет особенность порядка $(kr)^{-3/2+\xi_0^-}$, а магнитное убывает как $(kr)^{-1/2+\xi_0^-}$ по мере приближения к вершине. Таким образом, продольные узкие щели увеличивают особенность поля у вершины конуса. Вблизи нерегулярностей границы (кромки щелей, вершина) компонента поля E_ϑ , перпендикулярная кромкам, определяется выражением

$$C_N(kr)^{-3/2+\xi_0^-} \left\{ -1 + \operatorname{Re} \left[\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho^2 + 2i\rho + 1}} \right] \right\}, \quad (40)$$

$$r < r_0, \quad 0 < \vartheta < \gamma, \quad \rho = \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \exp(-i\varphi) \right)^N.$$

Поведение E_r -компоненты, параллельной кромке, характеризуется слагаемым

$$\tilde{C}_N(kr)^{-3/2+\xi_0^-} \ln |1 - \rho \sqrt{\rho^2 + 2i\rho + 1}|, \quad (41)$$

$$r < r_0, \quad 0 < \vartheta < \gamma,$$

здесь C_N и \tilde{C}_N – известные коэффициенты.

В случае конуса с одной узкой щелью ($N = 1$) выражения (40), (41) упрощаются, из чего следует, что компоненты поля, перпендикулярные кромке щели, вблизи ребра ведут себя по ϑ как $|\gamma - \vartheta|^{-1/2}$. Для азимутальной компоненты электрического поля в щели имеет место представление

$$E_\varphi^{(pac)} = \frac{1}{\sin\gamma} \frac{\sqrt{2\pi i |\vec{e}|}}{r r_0 \sqrt{r_0}} \frac{\sin(\varphi/2)}{\sqrt{\cos\varphi - \cos(d/2)}} \times \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\mu (kr_0/2)^{\xi_s^+ - \mu} I_\mu(kr_0)}{d\mu P_{-1/2+\mu}^{-nN}(\cos\gamma)} \Big|_{\mu=\alpha_s^+} \times \frac{d}{dr} [\sqrt{r} H_{\alpha_s^+}^{(2)}(kr)] \times [1 + O(1+u)], \quad \vartheta = \gamma, \quad r > r_0, \quad |\varphi| < d/2. \quad (42)$$

Из (42) следует, что у кромки щели тангенциальная компонента электрического поля имеет особенность порядка $((d/2)^2 - \varphi^2)^{-1/2}$. Это согласуется с условием Мейкснера [18].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований показано, что задача возбуждения электрическим радиальным диполем полубесконечного идеально проводящего бесконечно тонкого конуса с периодически прорезанными вдоль образующих щелями с помощью интегрального преобразования Конторовича–Лебедева и метода задачи Римана–Гильберта свелась к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа относительно коэффициентов Фурье компонент поля. В частных случаях полупрозрачного конуса, конуса с узкими щелями получены интегральные представления и представления в виде ряда для электрического потенциала Дебая и компонент электромагнитного поля. Изучены спектр граничной задачи, структура, поляризация поля и его поведение вблизи нерегулярностей поверхности (вершина конуса, кромки щелей). Показано, что продольные щели влияют на поляризацию поля и усиливают его особенность вблизи вершины. Приведенный алгоритм может быть использован и для решения граничных электродинамических задач с более сложной геометрией рассеивающей поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзенберг Г.З., Белоусов С.П., Журбенко Э.М. и др. Коротковолновые антенны. М.: Радио и связь, 1985.
2. Колодий Б.И., Куриляк Д.Б. Осесимметричные задачи дифракции электромагнитных волн на конических поверхностях. Киев: Наук. думка, 1995.
3. Samaddar S.N., Mokole E.L. // IEEE Trans. 1998. V. AP-46. № 2. P. 181.
4. Blume S., Grafmuller B. // IEEE Trans. 1988. V. AP-36. P. 1066.
5. Гошин Г.Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1987.
6. Vafiadas E., Sahalos J.N. // IEEE Trans. 1990. V. AP-38. № 11. P. 1894.
7. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
8. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 10/11. С. 1193.
9. Крайцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
10. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
11. Шестопалов В.П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наук. думка, 1983.
12. Дорошенко В.А., Сологуб В.Г. // РЭ. 1990. Т. 35. № 12. С. 2624.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
14. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространении электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971.
15. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 2.
16. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968.
17. Ван Бладель. ТИИЭР. 1983. Т. 71. С. 146.
18. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.