

УДК 517.927:517.95]:519.6

**ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ
В ОБЛАСТЯХ ПІД КАСКАДОМ ГІДПРОСПОРУД
З ПРЯМОКУТНОЮ ОСНОВОЮ НА БАЗІ R-ФУНКЦІЙ**

Подгорний О.Р.

email: oleksii.podhornyi1@nure.ua

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки,

кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

This work addresses the problem of stationary fluid filtration in soil beneath a cascade of hydraulic structures, assuming Darcy's law holds. The mathematical model is formulated as an elliptic equation for the stream function, involving mixed boundary conditions. To determine the unknown flow rates under each structure, additional integral relations are formulated. The study employs a structural-variational approach (the *R*-function method), which incorporates full geometric and analytical data into the computational algorithm. By applying the superposition principle, the original problem is decomposed into a set of boundary value problems with predefined conditions. Solution structures that exactly satisfy all boundary conditions are constructed, with the Ritz variational method used to approximate the unknown components.

Актуальність дослідження фільтраційних течій обумовлена як фундаментальними науковими викликами, так і широким спектром практичних застосувань у різних галузях. Так, фільтраційні течії є базовим об'єктом дослідження в гідродинаміці та механіці пористих середовищ. Вони описують рух рідини або газу в пористих структурах, де складна геометрія середовища та різні ефекти (залежність проникності, насичення, капілярні сили) роблять задачі математично нетривіальними. Також такі моделі відіграють ключову роль у нафтогазовій інженерії, де вони використовуються для прогнозування видобутку вуглеводнів, оптимізації розробки родовищ та оцінки залишкових запасів. Моделі багатозфазної фільтрації дозволяють враховувати взаємодію нафти, води та газу в пористому колекторі. Значна актуальність процесів фільтрації пов'язана з екологічними задачами, зокрема в гідрогеології. Математичне моделювання використовується для аналізу поширення забруднень у підземних водах, оцінки ризиків та розробки стратегій очищення. Тут важливими є задачі переносу домішок, реакційно-дифузійні процеси та вплив неоднорідності ґрунтів. Крім того, фільтраційні моделі широко застосовуються в тепломасообмін, наприклад, при дослідженні сушіння матеріалів, фільтрації в біологічних тканинах або теплообміну в геотермальних системах.

Для дослідження фільтраційних потоків у пористих середовищах традиційно застосовують крайові задачі. Через обмеженість аналітичних

методів, які працюють лише в елементарних випадках, ключову роль у дослідженнях відіграє чисельне моделювання. Поширеними є сіткові та стохастичні методи, підходи на основі скінченних елементів чи фіктивних областей [1, 2]. Попри їхню ефективність, суттєвою проблемою залишається неточність опису складних меж: використання вписаних ламаних для наближення контурів неминує знижує достовірність геометричних даних у розрахунках. Вільним від цього недоліку є структурний метод (метод R -функцій), запропонований академіком НАН України В.Л. Рвачевим.

Розглядається стаціонарна задача напірної фільтрації [3, 4] в області, зображеній на рисунку 1. Область фільтрації Ω обмежена непроникними межами $\partial\Omega_0$ та $\partial\Omega_{2k}$, $k=1,2,\dots,n$, які є лініями течії, а також проникними межами (межами водойми) $\partial\Omega_{2k-1}$, $k=1,2,\dots,n+1$, що є потенціальними лініями. В області діє закон Дарсі, який означає, що втрати напору при фільтрації пропорційні швидкості фільтрації, де вектор швидкості фільтрації визначений як $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

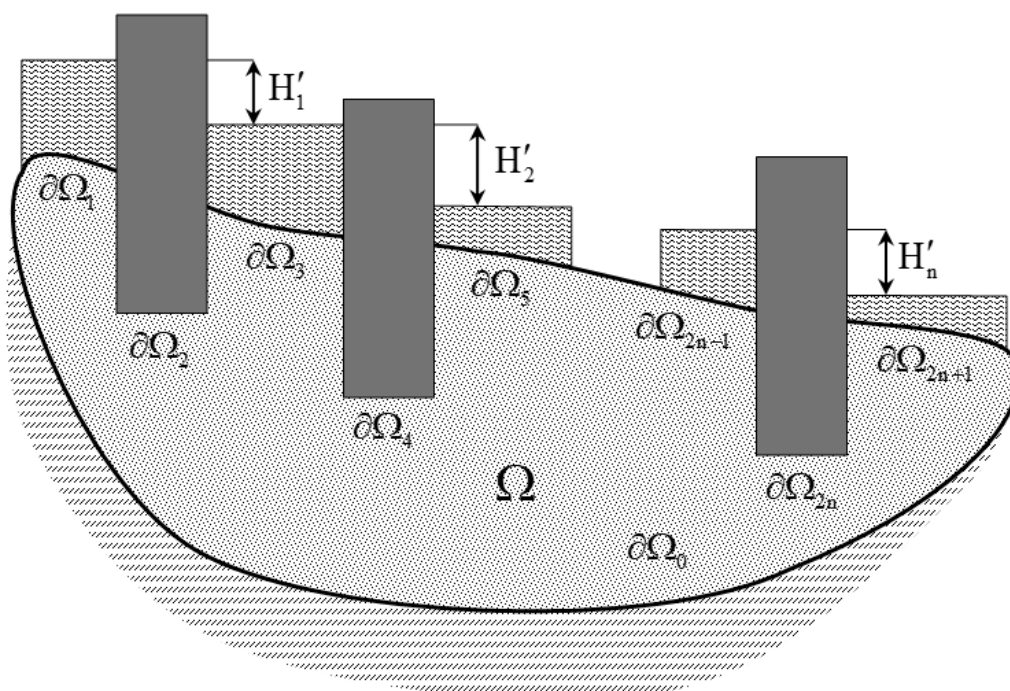


Рисунок 1 – Область фільтрації під каскадом гідроспоруд з прямокутними основами

Аналіз плоских фільтраційних течій зручно проводити за допомогою функції течії $\psi = \psi(x, y)$, що вводиться співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тоді для функції течії можна поставити наступну крайову задачу:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\kappa(x, y)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\kappa(x, y)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \text{ у } \Omega, \quad (1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (2)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_{2k}} = Q_k, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{2k-1}} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n+1, \quad (4)$$

$$\int_{\partial\Omega_{2k}} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} ds = -H'_k, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

де $\kappa(x, y)$ – коефіцієнт фільтрації, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до відповідних ділянок межі, H'_k – діючий напір, а Q_k – повні витрати рідини на ділянці меж $\partial\Omega_{2k}$, $k=1, 2, \dots, n$.

Особливістю постановки задачі (1) – (5) є те, що величини Q_k , $k=1, 2, \dots, n$, є невідомими і їх потрібно знайти в процесі розв'язання задачі.

Використовуючи принцип суперпозиції та структурний метод (метод R -функцій) ми маємо можливість найбільш повно та точно враховувати геометричну інформацію, що міститься в постановці задачі.

Суть методу R -функцій у застосуванні до розв'язування крайових задач математичної фізики полягає у побудові структури розв'язку, тобто жмутка функцій, що залежить від невизначених компонентів і точно задовольняє при довільному їх виборі всі крайові умови задачі. Апроксимація невизначеної компоненти виконується, наприклад, за допомогою варіаційного методу Рітца.

Дана робота є продовженням досліджень, розпочаті автором у [5].

Список використаних джерел:

1. Khan W. et al. Exact Solutions of Navier Stokes Equations in Porous Media. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2014. Vol. 96, № 2. P. 235–247.
2. Ляшко И. И., Великоиваненко И. М., Лаврик В. И., Мистецький Г. Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. Киев : Наукова думка, 1974. 202 с.
3. Ferziger J. H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 2002. 423 p
4. Ляшко И. И., Великоиваненко И. М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. Киев : Наукова думка, 1973. 264 с.
5. Подгорний О. Р. Чисельний аналіз методом R -функцій фільтраційних течій у неоднорідному ґрунті. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2018. Вип. 18. С. 147-162.