

ОДИН СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРУБКИ ТРАЕКТОРИЙ

В. П. Белогуров, Л. В. Гуц, Э. Г. Петров

Х а р ь к о в

В настоящее время для расчета трубки траекторий применяется два метода: метод геометрического суммирования и метод Монте-Карло (статистических испытаний).

Первый метод основан на предположении независимости и линейности всех входных возмущений. Он не учитывает взаимной корреляции выходных координат и предполагает, что закон распределения выходных координат является нормальным. На практике указанные ограничения часто не выполняются, поэтому результаты, получаемые методом геометрического суммирования, нельзя считать достаточно достоверными.

Метод Монте-Карло свободен от названных ограничений. При наличии точной программы моделирования и неограниченного машинного времени на вычисления он позволяет получить отклонения выходных координат с любой точностью. Однако для определения выходных координат этим методом необходимы полные и многократные расчеты всей траектории движения. Ожидаемая ошибка метода обратно пропорциональна квадратному корню из объема выборки [1]:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{n}} 100\%,$$

где n — количество реализаций программы расчета траектории. Следовательно, если время расчета одной траектории велико, то исследование по методу Монте-Карло с достаточной точностью может оказаться недопустимо длительным. Например, для получения статистических характеристик трубки траектории с точностью до 1,5% при уровне доверительности 0,95 необходимо рассчитать 10 000 возмущенных траекторий [1].

Предлагаемый метод является модификацией метода Монте-Карло и отличается от него тем, что позволяет определить параметры любого сечения трубки траектории без полного расчета всей траектории движения. Это становится возможным благодаря установлению зависимостей между вариациями входных и выходных параметров по ограниченному числу полных просчетов траекторий движения. Имея такие зависимости, можно брать монтекарловские выборки из них без дальнейшего расчета траекторий, что приводит к резкому сокращению машинного времени, необходимого для расчета трубки траекторий.

Для получения искомых зависимостей воспользуемся методами теории чувствительности [2].

Движение летательного аппарата описывается в общем случае системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{X}_i = \varphi_i(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m); \quad (1)$$

$$(i = 1, \dots, n), \quad X_i(0) = X_i^0,$$

где $X_i (i = 1, \dots, n)$ — выходные, а $Y_j (j = 1, \dots, m)$ — входные величины системы. Считаем, что система (1) определяет номинальную траекторию движения.

Пусть входные величины получили вариации ΔY_j . Тогда возмущенное движение описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{X}}_i &= \varphi_i(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n, Y_1 + \Delta Y_1, \dots, Y_m + \Delta Y_m); \\ (i &= 1, \dots, n), \\ \tilde{X}_i(0) &= X_i^0. \end{aligned} \quad (2)$$

Отклонение параметров возмущенной траектории от номинальной определяется как разность

$$\Delta X_i(t) = \tilde{X}_i(t) - X_i(t). \quad (3)$$

Задача сводится к установлению зависимостей между отклонениями возмущенной траектории $\Delta X_i(t)$ и вариациями входных величин ΔY_j

$$\Delta X_i = F(t, \Delta Y_1, \dots, \Delta Y_m).$$

Предположим, что решения систем уравнений (1) и (2) допускают многократное дифференцирование по Y_j . Тогда отклонения возмущенной траектории от номинальной $\Delta X_i(t)$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням Y_j

$$\begin{aligned} \Delta X_i(t, \Delta Y_1, \dots, \Delta Y_m) &= dX_i(Y_j)|_{\Delta Y_j=0} + \\ &+ \frac{1}{2!} d^2 X_i(Y_j)|_{\Delta Y_j=0} + \dots + \frac{1}{k!} d^k X_i(Y_j)|_{\Delta Y_j=0} + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} dX_i(Y_j)|_{\Delta Y_j=0} &= \left(\frac{\partial}{\partial Y_1} \Big|_{\Delta Y_j=0} \Delta Y_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial Y_m} \Big|_{\Delta Y_j=0} \Delta Y_m \right) X_i, \\ &\dots \dots \dots \\ d^k X_i(Y_j)|_{\Delta Y_j=0} &= \left(\frac{\partial}{\partial Y_1} \Big|_{\Delta Y_j=0} \Delta Y_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial Y_m} \Big|_{\Delta Y_j=0} \Delta Y_m \right)^k X_i - \end{aligned}$$

полные дифференциалы, полученные на номинальной траектории полета, т. е. при условии $\Delta Y_j = 0$.

Разложение (4) является искомой зависимостью, связывающей вариации входных величин с отклонениями параметров возмущенной траектории полета от номинальной.

В общем случае порядок разложения определяется степенью нелинейности системы и может быть достаточно большим.

В случае ограничения ряда k членами появляется некоторая ошибка R_k , которая существенно зависит от величины вариаций входных величин ΔY_j . Чем больше ΔY_j , тем большее количество членов приходится брать в разложении. Нередко случается и так, что стремление R_k к нулю замедляется или даже совсем прекращается с ростом ΔY_j .

Для того чтобы ответить на вопросы: пригоден ли многочлен (4) для вычисления ΔX_i при данных вариациях ΔY_j и если да, то сколько членов надо взять чтобы обеспечить требуемую точность, достаточно проанализировать выражение ошибки R_k

$$R_k = \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial Y_1} \Big|_{\Delta Y_j=0} \Theta \Delta Y_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial Y_m} \Big|_{\Delta Y_j=0} \Theta \Delta Y_m \right)^{k+1} X_i, \quad (5)$$

где k — порядок, которым ограничен ряд Тейлора;

Θ — число, лежащее между 0 и 1.

Рассмотрим более подробно структуру выражения (4). Для наглядности ограничимся $j = 2$ и $k = 3$. В этом случае (4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta X_i = & \frac{\partial X_i}{\partial Y_1} \Delta Y_1 + \frac{\partial X_i}{\partial Y_2} \Delta Y_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial Y_1^2} \Delta Y_1^2 + \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 X_i}{\partial Y_1 \partial Y_2} \Delta Y_1 \Delta Y_2 + \left. \frac{\partial^2 X_i}{\partial Y_2^2} \Delta Y_2^2 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 X_i}{\partial Y_1^3} \Delta Y_1^3 + \right. \\ & + 3 \frac{\partial^3 X_i}{\partial Y_1^2 \partial Y_2} \Delta Y_1^2 \Delta Y_2 + 3 \frac{\partial^3 X_i}{\partial Y_1 \partial Y_2^2} \Delta Y_1 \Delta Y_2^2 + \left. \frac{\partial^3 X_i}{\partial Y_2^3} \Delta Y_2^3 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial Y_j}$, входящие в это выражение, являются функциями чувствительности и характеризуют линейную связь между вариациями входных и выходных величин. Смешанные производные второго порядка характеризуют линейную связь между выходными параметрами траектории. Следовательно, для линейной системы с зависимыми выходными параметрами выражение (6) будет иметь вид

$$\Delta X_i = \frac{\partial X_i}{\partial Y_1} \Delta Y_1 + \frac{\partial X_i}{\partial Y_2} \Delta Y_2 + \frac{\partial^2 X_i}{\partial Y_1 \partial Y_2} \Delta Y_1 \Delta Y_2. \quad (7)$$

Для систем с некоррелированными выходными величинами смешанная производная равна нулю.

Производные второго и более высоких порядков по отдельным вариациям входных параметров характеризуют нелинейные связи между вариациями входных и выходных величин, а смешанные производные третьего и более высоких порядков — нелинейные связи выходных параметров. Если выходные величины взаимно независимы, все смешанные производные будут равны нулю.

Таким образом, выражение (4) универсально и может быть использовано для анализа линейных и нелинейных систем с независимыми и коррелированными выходными параметрами.

Частные производные только в очень редких случаях удается получить в общем виде. Для их определения следует применять численные методы.

Рассмотрим метод конечных разностей. Номинальную траекторию полета определяем как решение системы уравнений (1). Затем, полагая все вариации входных величин, кроме j -й, равными нулю, вычисляем по системе (2) возмущенную траекторию, обусловленную j -й вариацией. Величины отклонений параметров возмущенной траектории находим по формуле (3). Частные производные первого порядка определяются как отношение отклонения параметров возмущенной траектории к величине j -й вариации входного параметра

$$\frac{\partial X_i}{\partial Y_j} = \frac{\Delta X_i}{\Delta Y_j}.$$

Линейные смешанные производные получаются аналогично. Отличие заключается в том, что при этом варьируется число параметров, равное количеству величин, по которым определяется производная. Повторяя расчеты для всех возможных вариаций и всех линейных комбинаций, можно получить полный набор частных производных, определяющих линейную систему.

Для определения частных производных более высоких порядков и нелинейных смешанных производных интервал возможного изменения

вариаций входных параметров целесообразно разбить на несколько участков: $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$...

Для каждого участка первые и линейные смешанные производные вычисляются методом, описанным выше, и служат исходным материалом для определения всех нелинейных производных:

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial Y_1^2} = \frac{\frac{\partial X_i}{\partial Y_1} \Big|_{\Delta Y_1 = \sigma} - \frac{\partial X_i}{\partial Y_1} \Big|_{\Delta Y_1 = 0}}{\sigma_{\Delta Y_1}};$$

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial Y_1^2 \partial Y_2} = \frac{\frac{\partial^2 X_i}{\partial Y_1 \partial Y_2} \Big|_{\Delta Y_1 = \sigma} - \frac{\partial^2 X_i}{\partial Y_1 \partial Y_2} \Big|_{\Delta Y_1 = 0}}{\sigma_{\Delta Y_1}};$$

.....

Количество участков, на которые разбивается интервал возможных изменений вариаций входных величин, определяется как порядком производных, которыми ограничен ряд Тейлора (4), так и условием быстрой сходимости ряда. В итоге количество участков обусловлено допустимой ошибкой R_k .

После вычисления всех необходимых производных, уравнение (4) используется как математическая модель траектории полета. Вариации входных величин формируются при помощи выборки случайных чисел, изменяющихся от -1 до $+1$ и имеющих закон распределения, аналогичный закону распределения варьируемой величины. Эти вариации подставляются в уравнение (4), по которому вычисляются вариации выходных параметров. Процесс многократно повторяется и полученные в результате монтекарловские выборки используются для вычисления необходимых статистик трубки траекторий полета.

Предлагаемый метод позволяет резко сократить машинное время, необходимое для расчета статистических характеристик трубки траекторий полета. Особенно ощутим выигрыш при расчете траекторий летательных аппаратов с большим временем полета. В этом случае время полного расчета одной траектории a , следовательно, и общее время расчета по методу Монте-Карло линейно зависит от времени полета. Время расчета по формуле (4) практически во всех случаях остается постоянным (в среднем около 500 реализаций в минуту).

Другим достоинством метода является получение функций чувствительности и корреляционных зависимостей выходных величин, тогда как при методе Монте-Карло эти величины приходится рассчитывать специально.

Недостатком метода является быстрый рост числа полных расчетов траекторий полета, необходимых для расчета коэффициентов уравнения (4), при увеличении числа варьируемых входных параметров. В особенности это относится к расчету смешанных производных. Однако в тех случаях, когда можно ограничиться учетом смешанных линейных производных малых порядков, даже при большом числе возмущений (порядка 100) время расчета составляет около 10% времени расчета методом Монте-Карло.

Эффективно также объединение разнородных возмущений, действующих на летательный аппарат, в группы с одной размерностью. Как правило, большинство возмущений можно свести к вариациям сил и моментов, действующих на летательный аппарат. Например, как вариацию продольной силы можно рассматривать разбросы силы тяги двигателей, коэффициента лобового сопротивления, начальной массы, секунд-

ного расхода, плотности воздуха и др. Все это позволяет резко уменьшить время расчета.

Рассмотренный метод может быть использован при анализе точности любых нестационарных систем, у которых решения систем уравнений движения (1) и (2) допускают многократное дифференцирование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. С. Лодсдон, Р. К. Африкано. Модифицированная процедура Монте-Карло. «Ракетная техника и космонавтика», 1968, № 6.
2. П. В. Кокотович, Р. С. Рутман. Чувствительность систем автоматического управления. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 4.

СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ДРОБЛЕНИЯ В КОНУСНОЙ ДРОБИЛКЕ ПРИ НЕКОНТРОЛИРУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

М. Б. Карелин

Х а р ь к о в

Рассматриваются вопросы автоматической оптимизации процесса дробления нерудных материалов в конусных дробилках конечных стадий, производящих заполнители для бетонов. Подобные задачи характерны для многих систем управления сложными технологическими процессами.

Для рассматриваемого класса объектов выбор универсального критерия эффективности и построение системы автоматической оптимизации, обеспечивающей поддержание оптимального значения выбранного критерия при неконтролируемых возмущениях, представляет значительный теоретический и практический интерес.

Для процессов стохастической природы, к которым относятся процессы дробления, при решении задачи оптимального управления целесообразно рассматривать систему вида [1]

$$\frac{dy}{dt} = f(Y, X, U), \quad (1)$$

где $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$;

n — мерный вектор выходных величин:

$$X = (X_1, \dots, X_{n_1});$$

n_1 — мерный вектор возмущений;

$$U = (U_1, \dots, U_{n_2});$$

n_2 — мерный вектор управляющих воздействий.

В задаче оптимального управления процессом дробления, описываемом системой (1), управление $U(t)$ выбирается таким, чтобы решение системы (1) оптимизировало некоторый функционал

$$\int F \{ U(t), X(t), Y(t) \} dt. \quad (2)$$

Очевидно, что при некотором известном критерии эффективности процесса дробления E , функционально связанном с вектором $Y(t)$, задача управления процессом (1) сводится к оптимизации функционала

$$\int E \{ X(t), U(t) \} dt. \quad (3)$$