

УДК537.2+519.632+681.7



Л. І. Мочурад

Національний університет «Львівська Політехніка»,
м. Львів, Україна lesiamochurad@gmail.com

РОЗПАРАЛЕЛЕННЯ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Розглянуто задачу розрахунку електростатичного поля паралельного конденсатора. При її розв'язуванні продемонстровано переваги запропонованої методики. Здійснено розпаралелення процедури чисельного розв'язування задачі електростатики з абелевою групою симетрії восьмого порядку. Для підтвердження доречності розпаралелення означеної процедури проведено чисельні експерименти з використанням популярного програмного засобу *OpenMP*.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ТЕОРІЯ ПОТЕНЦІАЛУ, АБЕЛЕВА ГРУПА СИМЕТРІЇ, БАГАТОЯДЕРНІСТЬ ПРОЦЕСОРА, ПРОГРАМНИЙ ЗАСІБ *OPENMP*

Мочурад Л.І. Распараллеливания расчета электростатического поля плоского конденсатора. Рассмотрена задача расчета электростатического поля паралельного конденсатор. При ее решении продемонстрированы преимущества предлагаемой методики. Осуществлено распараллеливания процедуры численного решения задачи электростатики с абелевой группой симметрии восьмого порядка. Для подтверждения уместности распараллеливания обозначенной процедуры проведены многочисленные эксперименты с использованием популярного программного средства *OpenMP*.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА, АБЕЛЕВА ГРУППА СИММЕТРИИ, МНОГОЯДЕРНОСТЬ ПРОЦЕССОРОВ, ПРОГРАММНОЕ СРЕДСТВО *OPENMP*

Mochurad L.I. Parallelization of calculating of the electrostatic field of a plastic condenser. The problem of calculating the electrostatic field of a parallel capacitor is considered. When it was solved, the advantages of the proposed methodology were demonstrated. The parallelization of the numerical solution of the problem of electrostatics with the abelian symmetry group of the eighth order is carried out. To confirm the appropriateness of the parallelization of the specified procedure, numerous experiments were carried out using the popular *OpenMP* software.

MATHEMATICAL MODELING, INTEGRAL EQUATIONS, POTENTIAL THEORY, ABELIAN GROUP OF SYMMETRY, MULTICORER PROCESSORS, THE *OPENMP* SOFTWARE

Вступ

У сучасній техніці складно знайти галузь, де б широко й різноманітно не застосовувались конденсатори. Їх використовують практично у всіх електронних і радіотехнічних схемах. Вони разом з транзисторами і резисторами є основою радіотехніки. Енергія конденсаторів звичайно не дуже велика, проте вони здатні накопичувати її впродовж тривалого часу, а під час розрядження віддають її майже миттєво. Саме ці якості конденсаторів використовують найбільше на практиці. Конденсатори застосовують як згладжувачі пульсацій у випрямлячах змінного струму, в електромагнітних коливальних контурах, для накопичення великої кількості енергії, під час проведення експериментів у галузі ядерної техніки і керованого термоядерного синтезу.

У процесі проектування конденсаторів постає проблема визначення електростатичного поля, утвореного сукупністю заряджених електродів. Аналітичний розрахунок поля часто ускладнений через складну конфігурацію електродів, тому на практиці для визначення електростатичних полів у таких системах широко використовують методи математичного моделювання. У математичній моделі окремі електроди подають у вигляді

розімкнених поверхонь, на яких задають граничні значення потенціалу. Ефективні розв'язки такої задачі можна одержати на підставі методу інтегральних рівнянь, оскільки його застосування пов'язане із знаходженням невідомих величин лише на граничних поверхнях. Однак присутність значної кількості електродів та високі вимоги до точності обчислень суттєво ускладнюють традиційне застосування методу. У такій та подібних ситуаціях доцільно розбивати задачу на незалежні складові врахувавши наявні симетрії в геометрії розімкнених поверхонь та зменшувати складність розглядаючи лише плоскі перерізи просторових конструкцій. Очевидною перевагою розглядуваного підходу є створення передумов для розпаралелення процедури розв'язування задачі в цілому.

1. Постановка задачі

Плоским конденсатором називають систему з двох плоских пластин, розташованих паралельно одна одній на малій у порівнянні з розмірами відстані і розділених шаром діелектрика. Електричне поле плоского конденсатора, в основному, локалізовано між пластинами, однак, поблизу країв пластин і в навколишньому просторі також виникає

порівняно слабке електричне поле, яке називають полем розсіювання. У цілому ряді задач наближено можна нехтувати полем розсіювання і думати, що електричне поле плоского конденсатора цілком зосереджено між його обкладками. Але в інших завданнях нехтування полем розсіювання може призвести до грубих помилок, так як при цьому порушується потенційний характер електричного поля.

Не зменшуючи загальності, розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля паралельного конденсатора, зображеного на рис. 1.

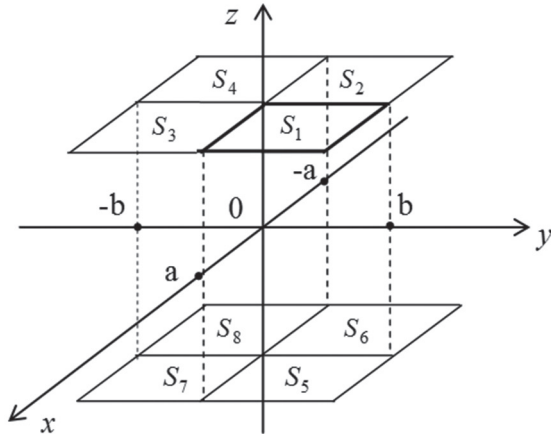


Рис. 1. Розміщення пластин паралельного конденсатора

Легко бачити, що при математичному моделюванні проблеми інформацію про геометрію заряджених електродів подають у вигляді деякої сукупності S двох паралельних прямокутних пластин. Вказані пластини будемо вважати безмежно тонкими, з математичної точки зору двосторонніми та обмеженими кусково-гладкими контурами скінченної довжини. Отже, необхідно знайти функцію $u(P) \in H^1(\Omega_s^-, \Delta)$, яка задовольняє умови

$$\Delta u(P) = 0, \quad P \in \Omega_s^- := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S} \quad (1)$$

$$\delta^\pm u(P) = g_\pm(P), \quad P \in S; \quad (2)$$

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} u(P) = 0, \quad P \in \Omega_s^-; \quad (3)$$

де $\delta^\pm: H^1(\Omega_s^-) \rightarrow H^{1/2}(S)$ – оператори сліду, $g_\pm \in H^{1/2}(S)$ – задані функції, причому g_\pm – відоме значення шуканої функції на S відповідно з додатної та від’ємної сторони, а

$$H^1(\Omega_s^-, \Delta) = \left\{ u \mid u \in H^1(\Omega_s^-), \Delta u \in L_2(\Omega_s^-) \right\}.$$

При електростатичній інтерпретації (1)-(3) (у нашому випадку) $g_+(P) = g_-(P) = f(P)$ ($P \in S$) є граничним значенням потенціалу, яке на кожному із двох електродів приймає постійні значення.

Відомо [1], що задача (1)-(3) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$\iint_S K(P, M) \rho(M) dS_M = f(P), \quad P \in S, \quad (4)$$

де $K(P, M) := 1/\text{dist}(P, M)$ – фундаментальний розв’язок оператора Лапласа в \mathbf{R}^3 , а $\rho(M)$ – шукана

“густина розподілу зарядів” на S . Очевидно, що поверхню S можна представити у вигляді сукупності восьми конгруентних складових S_i ($i=1, 8$) (див. рис. 1).

Вказана задача грає роль модельної. При її розв’язуванні продемонструємо переваги запровадженої методики, оскільки відтворення електростатичного поля плоского конденсатора не є тривіальною проблемою за умов суттєвої відмінності потенціалів на відповідних пластинах і поступового зменшення відстані між ними.

2. Опис методики розв’язування задачі

У роботі [2], встановлено, що розглядувана задача володіє абелевою групою симетрії восьмого порядку. Це дає можливість перейти від сукупної системи інтегральних рівнянь до послідовності восьми незалежних інтегральних рівнянь, заданих лише по одній конгруентній складовій поверхні-електродів — S_1 . Загальним результатом такого підходу є уникнення числової нестійкості, яка може виникати у процесі розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь, що апроксимують відповідні системи інтегральних при непомірному збільшенні їх розмірностей.

У процесі знаходження електростатичного поля, створюваного реальною системою, що прив’язана до певної ортогональної системи координат, за умови переважання одного із характерних розмірів сукупної поверхні-електрода, над іншими, для встановлення якісної картини розподілу потенціалу можна обмежитись дослідженням поля в центральному поперечному перерізі просторової конструкції [3]. У такому випадку відносно проста “плоска” модель стає в нагоді для підтвердження достовірності результатів розв’язання задачі в суттєво просторовій постановці. Деталі дослідження останньої висвітлені у роботі [4].

Відомо [5], що густина розподілу поверхневого заряду стрімко зростає поблизу краю зарядженої поверхні. Це пов’язано з наявністю потенціального бар’єра, розмір якого в радіальному напрямі практично співпадає з розміром поверхні. З математичного боку, густина розподілу поверхневого заряду є необмеженою на краю поверхні. Проте функція є неперервною, адже визначена на відкритій множині, і точки колокації на межу не потрапляють. Тому оператори звуження та продовження є обмеженими, і відповідний градієнт існуватиме. У такому випадку математичне моделювання розглядуваного електростатичного поля передбачає також врахування сингулярної поведінки шуканої густини розподілу зарядів $\rho(M)$ в околі кутової точки складової поверхні S_1 . Слід зауважити, що врахування специфіки розімкнених поверхонь, а саме, їх геометричної симетрії, дозволило зменшити кількість контрольованих особливих точок з восьми до однієї. У роботі [6] запроваджено апостеріорний метод оцінювання похибки, який допомагає надійно контролювати нерегулярність $\rho(M)$

в околі кутової точки складової S_1 поверхні S , відмовляючись таким чином від аналітичного врахування її поведінки.

Для графічного зображення поля ефективним виявляється використання еквіпотенціальних ліній. Останнє дає можливість легко побудувати силові лінії, використовуючи таку властивість як ортогональність. Це значно полегшує експериментальне і теоретичне дослідження електростатичного поля. Останній факт має особливо широке застосування в техніці, оскільки при конструюванні електронних ламп, конденсаторів, електронних лінз та інших приладів часто треба знайти розподіл електростатичного поля в просторі.

3. Розпаралелення процедури розв'язування задачі в цілому

Вказана вище процедура створює усі передумови до можливого розпаралелення процедури розв'язування задачі в цілому. Для реалізації паралельних алгоритмів можна використовувати паралельні комп'ютери або таку властивість як багатопотоковість. Перший спосіб дає можливість, вибираючи різну кількість процесорів, досягати або максимальної ефективності їх завантаження, або ж збільшувати швидкість обчислень. Другий спосіб дозволяє, використовуючи сучасні архітектури багатоядерних процесорів, провести експериментальні дослідження застосування найбільш популярного засобу *OpenMP* [7] для розпаралелення процедури чисельного розрахунку електростатичного поля паралельного конденсатора.

На сьогоднішній день більшості персональних комп'ютерів характерна наявність багатоядерних процесорів. Одним з найбільш популярних засобів паралельного програмування на багатоядерних комп'ютерах із загальною пам'яттю є програмний засіб *OpenMP*, за допомогою якого можна розпаралелити окремі частини програми, які будуть виконуватись на ядрах комп'ютера окремими потоками. При цьому не потрібно описувати обмін інформацією.

У нашому випадку, тобто при чисельному розв'язуванні крайової задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії восьмого порядку, отримано вісім незалежних інтегральних рівнянь. Так, з метою більш ефективних затрат комп'ютерного часу доцільно використовувати розпаралелення програми чисельного розв'язування інтегральних рівнянь шляхом одночасного розв'язування їх на незалежних потоках. При цьому кількість ядер може не збігатись з кількістю потоків, на які розпаралелюється програма. На однопроцесорних комп'ютерах паралельна програма виконується одним потоком.

4. Чисельні експерименти

Чисельні експерименти проведені на комп'ютерах різної конфігурації з різною кількістю ядер. Час розв'язування подано в мікросекундах. При цьому,

використовуючи стандарт *OpenMP* програмування реалізовано на мові C++.

На рис. 2 представлений розподіл ліній рівного потенціалу у площині $x = 0$ при граничних значеннях потенціалу $f_1 = -1$, $f_2 = 1$, кількості точок колокації $N = 100$, при відсутності переважання однієї геометричної складової поверхні над іншими.

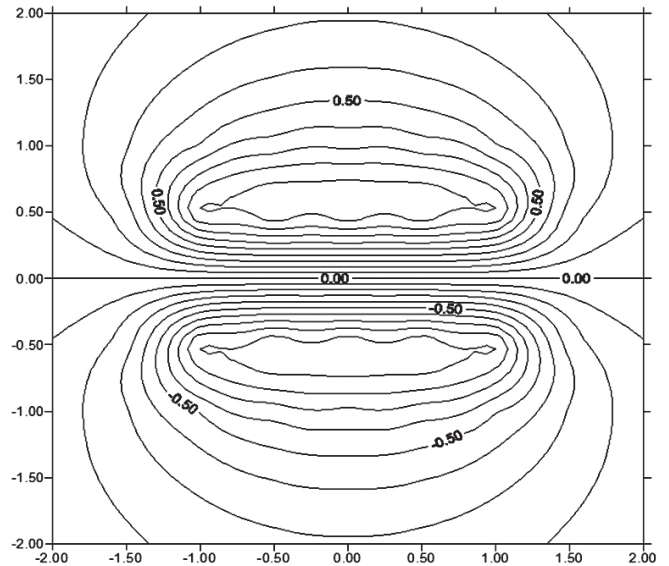


Рис. 2. Розподіл ліній рівня в площині $x = 0$ при $a/b = 1$.

На рис. 3 представлений розподіл ліній рівного потенціалу у площині $x = 0$ при граничних значеннях потенціалу $f_1 = 1$, $f_2 = -100$, кількості точок колокації $N = 100$, при переважанні однієї геометричної складової поверхні над іншими у шістнадцять разів.

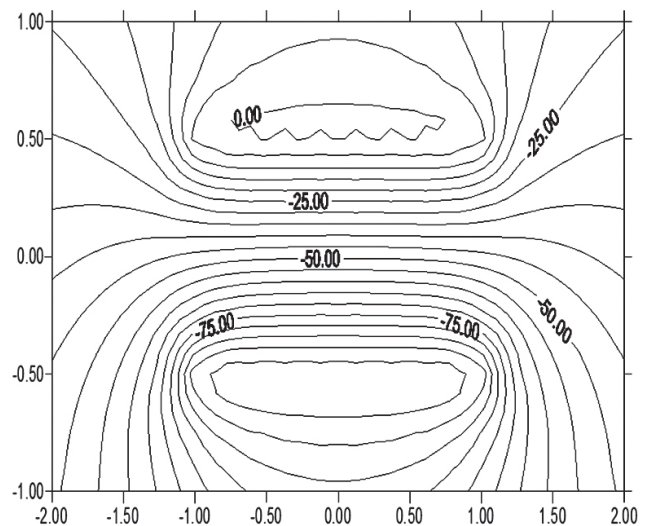


Рис. 3. Розподіл ліній рівного потенціалу у площині $x = 0$ при $a/b = 16$.

У табл. 1 наведено значення потенціалу U електростатичного поля плоского конденсатора в деяких контрольних точках площини $x = 0$ і значення потенціалу при розв'язуванні відповідної "плоскої" задачі електростатики, що дозволяє перевірити достовірність отриманих розв'язків.

Таблиця 1

Потенціал електростатичного поля в площині $x = 0$

(y, z)	$U (a/b=16)$	“плоске” наближення
(-1.00, -0.75)	-79.3731	-79.3729
(-1.00, -0.25)	-66.4593	-66.4594
(-1.00, 0.00)	-46.3909	-46.3910
(-1.00, 0.25)	-27.0001	-27.0004
(-1.00, 0.75)	-10.4086	-10.4082
(-0.75, -0.50)	-99.9925	-99.9930
(1.00, 0.75)	-10.4086	-10.4082
(2.00, -1.00)	-48.9304	-48.9307

У табл. 2 наведено час виконання програми, при розпаралеленні процедури розв’язування задачі з використанням програмного засобу *OpenMP*. r – кількість ядер, p – кількість потоків, t – час виконання програми.

Таблиця 2

Час виконання програми

N	r	p	t (мс)	N	r	p	t (мс)
100	1	1	1374	400	1	1	6045
		2	1368			2	5882
		4	1368			4	5882
		8	1374			8	6045
	2	1	389		2	1	1596
		2	196			2	797
		4	194			4	796
		8	196			8	797
	4	1	250		4	1	866
		2	148			2	571
		4	60			4	216
		8	60			8	216

На рис. 4 і рис. 5 представлені діаграми, які наочно відображають залежність часу обчислень від кількості ядер.

За результатами чисельних експериментів на комп’ютері з одноядерним процесором час розв’язування задачі за програмою із застосуванням *OpenMP* не суттєво відрізняється від часу розв’язування без його використання, оскільки тут програмно відтворюються два, чотири, вісім потоків, у той час як фізично комп’ютер має одне ядро.

За результатами чисельних експериментів на комп’ютері з одноядерним процесором час розв’язування задачі за програмою із застосуванням *OpenMP* не суттєво відрізняється від часу розв’язування без його використання, оскільки тут програмно відтворюються два, чотири, вісім потоків, у той час як фізично комп’ютер має одне ядро.

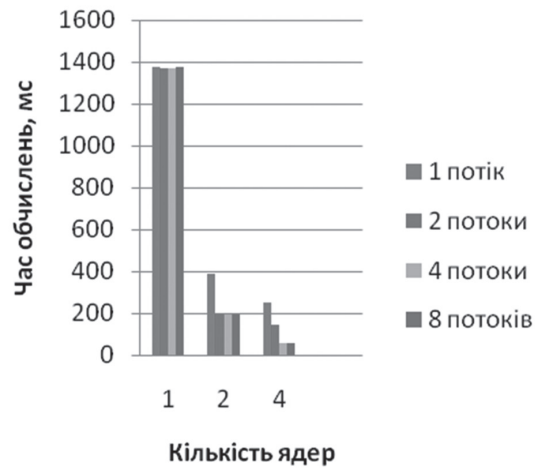


Рис. 4. Залежність часу обчислень від кількості ядер $N = 100$

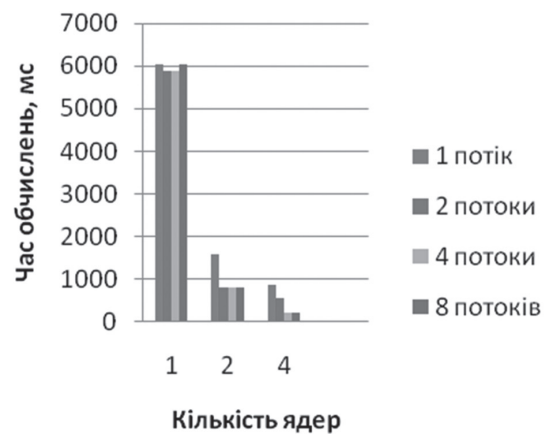


Рис. 5. Залежність часу обчислень від кількості ядер $N = 400$

При виконанні програми на комп’ютері з дво-ядерним процесором час розв’язування задачі за паралельною програмою приблизно в два рази зменшується порівняно з часом розв’язування за звичайною програмою. Часова оцінка у випадку співпадіння кількості потоків і кількості ядер мало відрізняється від часової оцінки, яку отримують збільшуючи кількість потоків за умов незмінної кількості розв’язуваних рівнянь. Це пояснюється тим, що фізично процесор лишається двоядерним.

Якщо програма виконується на комп’ютері з чотириядерним процесором, то час розв’язування задачі за паралельною програмою приблизно в чотири рази зменшується порівняно з часом розв’язування за звичайною програмою. Очевидно, що зі збільшенням кількості ядер ці показники будуть покращуватись. Отже, використання багато-ядерності персонального комп’ютера є доцільним при розв’язуванні задач великих розмірностей з метою більш ефективних затрат комп’ютерного часу на їх виконання.

Висновки

Розглянуто ефективну методику розрахунку електростатичного поля плоского конденсатора. Отримано ряд суттєвих переваг у порівнянні з

існуючими підходами. А саме: вдалось уникнути числової нестійкості внаслідок зменшення порядку матричних рівнянь, які апроксимують відповідні інтегральні; врахування специфіки розімкнених поверхонь (їх геометричної симетрії) дозволило значно зменшити кількість контрольованих особливих точок (в найкращому випадку мати справу лише з однією); отримано усі передумови до розпаралелення процедури розв'язування задачі в цілому та здійснено аналіз деяких аспектів цієї процедури. Проведені дослідження показують наскільки реальною і важливою стає можливість ефективного використання багатоядерності персонального комп'ютера для розв'язування задач великих об'ємів. При цьому час розв'язування задачі на багатоядерних персональних комп'ютерах значно скорочується при автоматичному розпаралелюванні програми за допомогою інтерфейсу *OpenMP*.

Список літератури: 1. *Sybil Yu. M.* Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface // Матем. студії. 1997. Т. 8. № 2. — С. 79-96. 2. *Гарасим Я.* Метод інтегральних рівнянь при числовому моделюванні граничних задач теорії потенціалу та можливості його ефективного використання / Я. Гарасим, Л. Мочурад, Б. Остудін // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2008. — Вип. 14 — С. 64-74. 3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов — М.: Физматлит, 2004. — 400 с. 4. *Гарасим Я. С.* Розпаралелення методу інтегральних рівнянь при розв'язуванні граничних задач теорії потенціалу за наявності симетричних елементів межі / Я. С. Гарасим, Л. І. Мочурад, Б. А. Остудін // Матеріали третьої міжнарод. наук.-техн. конф. «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», 25-27 вересня 2008 р., м. Львів — Вид-во ПП «Вежа і Ко», 2008. — С. 342-346. 5. *Morrison J. A.* Charge singularity at the corner of a flat plate // J. A. Morrison, J. A. Lewis. // SIAM J. Appl. Math. Vol. 31. № 2. 1976. P. 233-249. 6. *L. Mochurad.* Maximal Using of Specifics of Some Boundary Problems in Potential Theory After Their Numerical Analysis / L. Mochurad, Y. Harasym, B. Ostudin. // International Journal of Computing. — 2009. — Volume 8, Issue 2. — С. 149-156. 7. *Voss M. J.* OpenMP share memory parallel programming / M. J. Voss. — Toronto, Canada, 2003. — 270 p.

RESUME

Lesya Mochurad

Parallelization of calculating of the electrostatic field of a plastic condenser

The electron-optical systems are basic components of the modern research complexes by the help of which complicated physical processes related to motion of the charged particles in the corresponding potential fields are studied. The problem of calculating the electrostatic field of a parallel capacitor is an important part in the mathematical modeling of the modern electron-optical systems.

Solution is realized via the construction and improvement of the numerical modeling methods in the case of the complicated electrostatic fields. An effective method based on the method of integral equations in combination with the apparatus of group theory is considered in this work.

The methodology which is described above provides stability of procedure of finding the approximate solution of the boundary integral equation. Firstly, this methodology allows us to use the main computer memory more effectively, diminishing it at forming every system of linear algebraic equations which approximate corresponding integral equations. Secondly, pre-conditions are created for separating the process of solving task in general. The parallelization of the numerical solution of the problem of electrostatics with the abelian symmetry group of the eighth order is carried out.

It is also noticed that under predominance of one geometrical component surface over the other ones the changes of the potential value in its transversal cuts close to central are not noticeable. To state the high-quality representation of the field in the central transversal cuts of the electron-optical systems, one can limit the research by the flat cuts of spatial constructions, since boundary surfaces satisfy the geometrical properties mentioned above. Taking into account the specific characters of initial boundary value problem in the mathematical model, describing so-called flat electrostatic field, is considered.

The problem of calculating the electrostatic field of a parallel capacitor is considered. When the problem of calculating the electrostatic field of a parallel capacitor was solved, the advantages of the proposed methodology were demonstrated. To confirm the appropriateness of the parallelization of the specified procedure, numerous experiments were carried out using the popular OpenMP software.

For the representation of the electrostatic field equipotential lines are used, thus, solutions are analysed by the help of distribution of lines of equal potential.

Поступила в редколлегию 02.10.2017