

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІСЬКИХ
ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ**

Вербинський Р.І.

e-mail: ruslan.verbynskyi@nure.ua

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Рибалко А.П.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

In large cities, transportation systems are complex dynamic systems with many interacting elements, including cars, public transport, traffic lights, pedestrians, and road infrastructure. The paper considers the main approaches to the mathematical modeling of processes occurring in such systems. A classical macroscopic traffic model is chosen, which represents the fundamental law of conservation of the number of vehicles in the macroscopic theory of traffic flow. Computational experiments were conducted using test data.

У великих містах транспортні системи є складними динамічними об'єктами з великою кількістю взаємодіючих елементів: автомобілів, громадського транспорту, світлофорів, пішоходів та дорожньої інфраструктури. Через зростання автомобілізації, виникнення проблеми заторів, необхідністю планування транспортної інфраструктури тощо виникає потреба в застосуванні методів прикладної математики для аналізу транспортних систем та процесів в них. Саме математичне моделювання вказаних процесів та впровадження його результатів дозволить зменшити затори, підвищити ефективність транспортної мережі та покращити якість життя у містах. Отже, актуальною є задача розробки інтелектуальних транспортних систем, за допомогою яких сучасні міста перейдуть до систем адаптивного керування рухом, прогнозування трафіку в реальному часі, інтеграції з GPS та мобільними даними.

На сьогодні існує кілька основних класів моделей [1, 2]: мікроскопічні моделі, що описують рух окремих автомобілів; макроскопічні моделі, у яких транспортний потік розглядається як неперервне середовище, подібно до рідини; мезоскопічні моделі, що поєднують попередні підходи і використовують ймовірнісні та кінетичні рівняння, подібні до рівнянь статистичної фізики.

Також останніми роками для аналізу транспортних потоків активно використовується машинне навчання. Тут можна виділити наступні напрямки: прогнозування трафіку, оптимізація роботи світлофорів, виявлення аномалій, побудова цифрових двійників міста.

Для прогнозування трафіку використовуються LSTM-мережі, Graph Neural Networks та Temporal CNN, за допомогою яких аналізують GPS-дані, дані з камер, датчики доріг, мобільні дані тощо. При оптимізації роботи

світлофорів використовується reinforcement learning для побудови агента, що навчається керувати світлофором так, щоб мінімізувати затори та мінімізувати час очікування. У виявленні аномалій методи машинного навчання допомагають знаходити аварії, нетипові затори, перекриття доріг. І нарешті побудова цифрових двійників міста – це створення digital twins транспортної системи міста, що дозволяє тестувати зміни інфраструктури, моделювати нові маршрути, прогнозувати навантаження тощо.

Розглянемо класичну макроскопічну модель трафіку, що базується на рівнянні $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$, де $\rho(x, t)$ – щільність транспортного потоку, $q(x, t)$ – інтенсивність потоку (автомоб./год.), x – координата дороги, t – час. Це рівняння є фундаментальним законом збереження кількості автомобілів у макроскопічній теорії транспортних потоків. Інтенсивність потоку задається функцією щільності $q = \rho v(\rho)$, де $v(\rho)$ – швидкість як функція щільності. Часто використовується модель Гріншилдса, відповідно до якої $v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)$, де $v_{\max}$ – максимальна швидкість, $\rho_{\max}$ – максимальна щільність. Тоді одержуємо нелінійне рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right) = 0. \quad (1)$$

Рівняння (1) є нелінійним гіперболічним рівнянням, що описує утворення та поширення транспортних хвиль (traffic waves). Його було чисельно досліджено з використанням методів машинного навчання на наборі тестових даних і зроблено висновок, що поєднання класичних рівнянь математичної фізики з методами машинного навчання відкриває нові можливості для створення інтелектуальних транспортних систем майбутнього з оптимізацією міського транспорту, плануванням інфраструктури, управлінням дорожнім рухом [3].

Список використаних джерел:

1. Fan T., Wong S. C., Zhang Z., Du J. Stochastic Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model for nonlinear speed–density relationships. *Transportmetrica B: Transport Dynamics*. 2024. Vol. 12, No. 1. Article: 2419402. DOI: 10.1080/21680566.2024.2419402.
2. Huang K., Du Q. Stability of a nonlocal traffic flow model for connected vehicles. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2022. Vol. 82, No. 1. Pp. 221-243. DOI: 10.1137/20M1355732.
3. Безкоровайний В. В., Жабський Д. С., Сидоров М. В. Математична модель задачі еколого-економічної оптимізації логістичних мереж. *Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету*. 2025. Вип. 110. С. 105-112. DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2025.110.0.105.