Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування апарату теорії нечітких множин
для розв'язання задач теорії управління запасами
(тема)

Виконав:
здобувач _2_ року навчання, групи _САУм-23-1
Кушнарьова К.П.
(прізвище, ініціали)
Спеціальність
124 Системний аналіз
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Системний аналіз і управління
(повна назва освітньої програми)
Керівник ____ доц. Матвієнко О.І.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ _____ ____Сидоров М.В._____
(підпис) (прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра _прикладної математики
Рівень вищої освіти _другий (магістерський)
Спеціальність _124 Системний аналіз
(код і повна назва)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _Системний аналіз і управління
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____
(підпис)
“ _25_ ” _листопада_ 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві _Кушнарьовій Катерині Павлівні
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи _Застосування апарату теорії нечітких множин для розв’язання задач теорії управління запасами

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи _математична модель оптимізації управління запасами в умовах невизначеного попиту

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
1. Системний аналіз предметної області
2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
3. Програмна реалізація
4. Результати обчислювального експерименту
5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Системний аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2024 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання _25_ листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Матвієнко О.І.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 57 с., 10 табл., 14 рис., 1 дод., 11 джерела.

МОДЕЛЮВАННЯ, НЕЧІТКА ЛОГІКА, НЕЧІТКИЙ ПОПИТ, ОПТИМІЗАЦІЯ, УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Об’єкт дослідження – система управління запасами в умовах невизначеного попиту.

Мета роботи – розробка математичної моделі управління запасами, яка забезпечує оптимальний обсяг поставок з урахуванням витрат, тривалості зберігання та забезпечення надійності постачання в умовах невизначеного попиту.

Методи дослідження – методи математичного моделювання, теорії нечітких множин, нечіткої логіки, оптимізації.

У кваліфікаційній роботі створено математичну модель оптимізації запасів на основі нечіткої логіки, яка враховує невизначеність попиту та дозволяє визначати оптимальні обсяги постачання за різними критеріями: мінімальні витрати, максимальна надійність, компроміс між ними. Модель реалізовано у програмному середовищі Wolfram Mathematica. Проведені розрахунки підтвердили ефективність методу для мінімізації витрат та підвищення надійності постачання.

Розроблену модель можна використовувати для управління запасами в торговельних підприємствах, логістичних компаніях та дистрибуційних центрах. Подальший розвиток роботи може включати врахування додаткових факторів, таких як сезонність або динамічні зміни ринку.

ABSTRACT

Introductory note: 57 pages, 10 tables, 14 figures, 1 appendix, 11 sources.

MODELING, FUZZY LOGIC, FUZZY DEMAND, OPTIMIZATION, INVENTORY MANAGEMENT

Object of research – Inventory management system under conditions of uncertain demand.

Purpose of work – Development of a mathematical model for inventory management that ensures optimal supply volumes, taking into account costs, storage duration, and supply reliability under conditions of uncertain demand.

Methods of research – Methods of mathematical modeling, fuzzy set theory, fuzzy logic, and optimization.

The qualification paper develops a mathematical model for inventory optimization based on fuzzy logic, which considers demand uncertainty and determines optimal supply volumes according to various criteria: minimal costs, maximum reliability, and a compromise between them. The model is implemented in the Wolfram Mathematica software environment. Calculations confirm the method's effectiveness in minimizing costs and improving supply reliability.

The developed model can be applied to inventory management in retail enterprises, logistics companies, and distribution centers. Future work may include considering additional factors such as seasonality or dynamic market changes.

ЗМІСТ

С.

Вступ 8
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження 10
1.1 Системний аналіз задачі управління запасами 10
1.1.1 Вербальна модель системи 11
1.1.2 Морфологічний опис системи 12
1.1.3 Функціональна модель системи 12
1.1.4 Інформаційна модель системи 15
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі управління запасам 16
1.2.1 Модель аналізу проблеми 16
1.2.2 Оцінювання вектору пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій 17
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі 24
1.3.1 Змістовна постановка задачі управління запасами 24
1.3.2 Формальна постановка задачі управління запасами 25
1.4 Постановка задач дослідження 27
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання 28
2.1 Огляд методів нечіткої логіки та їх застосування 28
2.1.1 Класичні методи управління запасами 28
2.1.2 Методи нечіткої логіки 29
2.2 Обґрунтування вибору методу та його переваги 40
Висновки за розділом 2 41
3 Програмна реалізація 42
3.1 Система комп’ютерної алгебри Mathematica 42
3.2 Алгоритм розв’язання задачі управління запасами 43
3.3 Опис програми 43
Висновки за розділом 3 46
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз 47

4.1 Обчислювальний експеримент 47
Висновки за розділом 4 52
Висновки 53
Перелік джерел посилання 54
Додаток А Лістинг програми 55

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасні методи управління запасами відіграють ключову роль у забезпеченні ефективності функціонування підприємств і організацій. Однак у реальних умовах попит часто є невизначеним і змінюється через такі фактори, як сезонність, економічна ситуація та зміни в поведінці споживачів. Це створює суттєві виклики для планування постачань і управління запасами, оскільки традиційні методи недостатньо ефективні для врахування такої невизначеності.

Наукові дослідження в галузі управління запасами фокусуються на впровадженні адаптивних моделей, які використовують методи нечіткої логіки, що дозволяють забезпечити оптимальне управління запасами в умовах змінного попиту. Провідні наукові установи та експерти активно вивчають питання впровадження нечітких множин для моделювання невизначеності, що довело свою ефективність у різних практичних застосуваннях, зокрема в економіці, логістиці та виробництві.

Світові тенденції в цій галузі вказують на необхідність створення адаптивних систем, які можуть враховувати різноманітні аспекти задачі, балансуючи між мінімізацією витрат та забезпеченням надійності постачання.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розробка математичної моделі управління запасами в умовах невизначеного попиту, яка дозволяє оптимізувати обсяг поставок з урахуванням витрат на постачання, зберігання та можливий дефіцит, а також забезпечити надійність задоволення попиту.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задач управління запасами в умовах невизначеності;

– ознайомитися з існуючими дослідженнями та методами управління запасами в умовах невизначеності, розглянути їх та оцінити їх переваги та недоліки;

– сформулювати постановку задачі управління запасами, враховуючи варіативність попиту;

– обґрунтувати вибір методу нечіткої логіки для вирішення поставленої задачі;

– розробити математичну модель управління запасами з використанням нечітких множин;

– проаналізувати отримані результати та оцінити їх відповідність поставленим цілям.

Об'єктом дослідження є система управління запасами в умовах невизначеного попиту.

Предметом дослідження є застосування методів нечіткої логіки для оптимізації управління запасами в умовах варіативного попиту.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи математичного моделювання, системного аналізу, методи нечіткої логіки.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі управління запасами

Створення запасів необхідне для забезпечення безперервної та ефективної роботи будь-якого бізнесу. Наприклад, у виробничих процесах, торгівлі, охороні здоров'я та громадському харчуванні правильне управління системою запасів часто визначає конкурентоспроможність і успіх компанії. Залежно від ситуації запаси можуть включати готову продукцію, сировину, напівфабрикати, верстати, інструменти, транспортні засоби та грошові кошти.

Як затоварення, так і недозакупівлі можуть призвести до економічних втрат. Наприклад, швидкопсувні продукти вимагають особливих умов зберігання, що тягне за собою певні витрати. З іншого боку, що нижчий рівень запасів, то більша ймовірність виникнення дефіциту, що призводить до втрат клієнтів, зупинки виробничого процесу тощо. Крім того, низький рівень запасів часто означає необхідність термінової доставки нових партій товарів [1].

Еволюція теорії управління запасами знайшла своє відображення в основних концептуальних підходах. Історично сформувалися три концепції управління: максимізація, оптимізація та мінімізація запасів.

Концепція максимізації запасів передбачає накопичення великих обсягів матеріальних ресурсів. Такий підхід до управління запасами виправданий, коли рівень споживання невідомий або коли дефіциту не можна допустити за жодних обставин. За допомогою надлишкових запасів компанії намагаються забезпечити безперервність виробничого процесу, запобігти перебоям у постачанні та покращити обслуговування клієнтів. При цьому не беруться до уваги негативні аспекти зберігання надлишкових запасів.

Концепція оптимізації запасів почала формуватися на початку XX-го століття і базується на так званому науковому підході до управління запасами. Це найпоширеніша концепція.

Суть концепції мінімізації запасів полягає в тому, що матеріальні ресурси повинні закуповуватися тоді, коли в них виникає потреба, і в кількості, яка відповідає цій потребі. Надлишок матеріальних ресурсів є неприпустимим і свідчить про недоліки в організації бізнес-процесів [2].

Управління запасами є важливою складовою процесу забезпечення підприємств необхідними ресурсами та товарами для безперебійного функціонування. Основна мета управління запасами – забезпечити ефективне використання запасів, мінімізуючи загальні витрати та зменшуючи ризики дефіциту чи надлишку товарів [3].

Однак, в умовах сучасного ринку управління запасами стикається з численними труднощами, зумовленими високою невизначеністю таких факторів, як коливання попиту, непередбачуваність часу постачання та обмеження ресурсів.

1.1.1 Вербальна модель системи

Об’єкт аналізу – «Система управління запасами супермаркету».

Предмет аналізу – «Математичні моделі та методи оптимізації управління запасами з урахуванням варіативності попиту, часу постачання та умов зберігання товарів».

Точка зору: дослідник.

Ціль: системний аналіз методів управління запасами, які дозволяють оптимізувати рівень запасів у супермаркеті, мінімізуючи витрати та знижуючи ризик дефіциту.

Модель типу «чорний ящик» (рис. 1.1) показує на взаємодію системи із зовнішнім середовищем. Система супермаркету розглядається як сукупність функцій, що залежить від зовнішніх змін, таких як попит та час постачання. Це дозволяє фокусуватися на вхідних та вихідних параметрах.

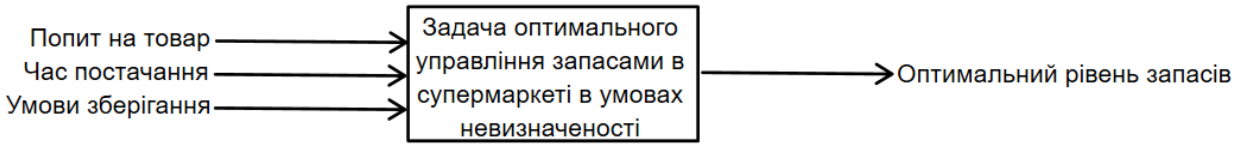

Рисунок 1.1 – Модель типу «чорний ящик»

1.1.2 Морфологічний опис системи

Зробимо морфологічний опис системи на основі зовнішнього середовища, що приведено на рис. 1.2.

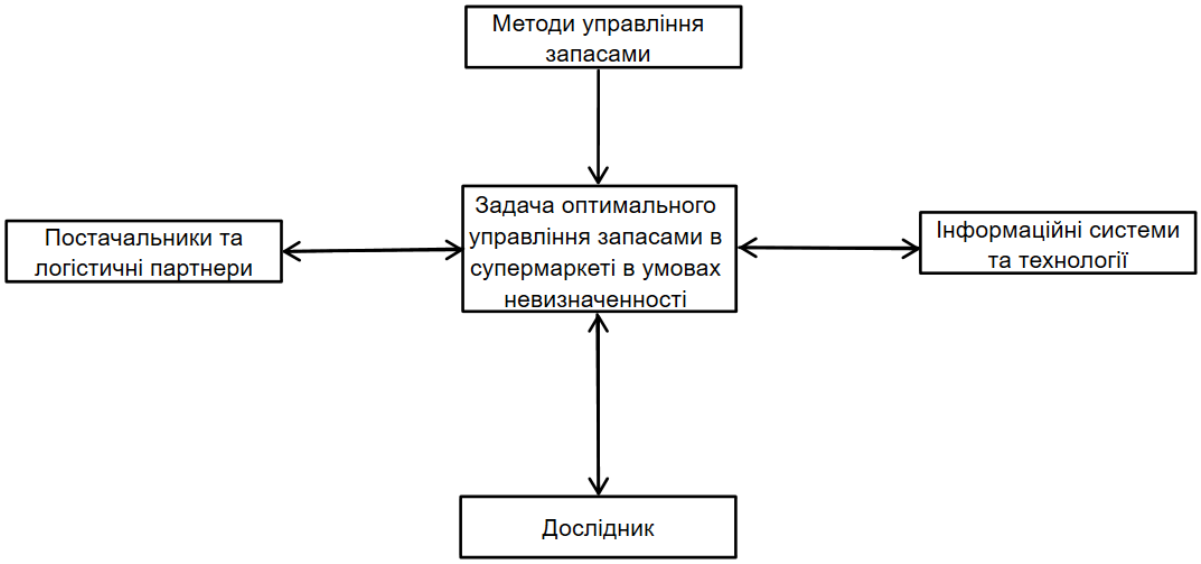

Рисунок 1.2 – Модель зовнішнього середовища системи

Зовнішнє середовище охоплює всі фактори, що впливають на рівень запасів і необхідність у коригуванні управлінських рішень.

1.1.3 Функціональна модель системи

Для означення вимог та функцій системи розробляється IDEF0, яка відповідає вимогам та реалізує усі функції.

IDEF0 може застосовуватися для аналізу функцій системи, для відображення механізмів виконання цих функцій.

IDEF0 процес представляє собою набір взаємодіючих між собою елементів та ресурсів, що споживаються кожною роботою.

Контекстна діаграма представляє собою загальний вид системи та взаємодію її із зовнішнім середовищем.

На рис. 1.3 приведена контекстна діаграма, яка показує функціонування системи в цілому, а після цього на рис. 1.4 проводиться її декомпозиція на фрагменти.

На рис. 1.5 проводиться декомпозиція кожного великого фрагменту системи на дрібні. І далі ще дрібніші для більшої деталізації.

Для того, щоб дати можливість системним аналітикам описати послідовність виконання процесів та всі об’єкти процесу, використовують метод IDEF3, який допомагає розібратися спеціалістам. Це можна побачити на рис. 1.6 – 1.7.

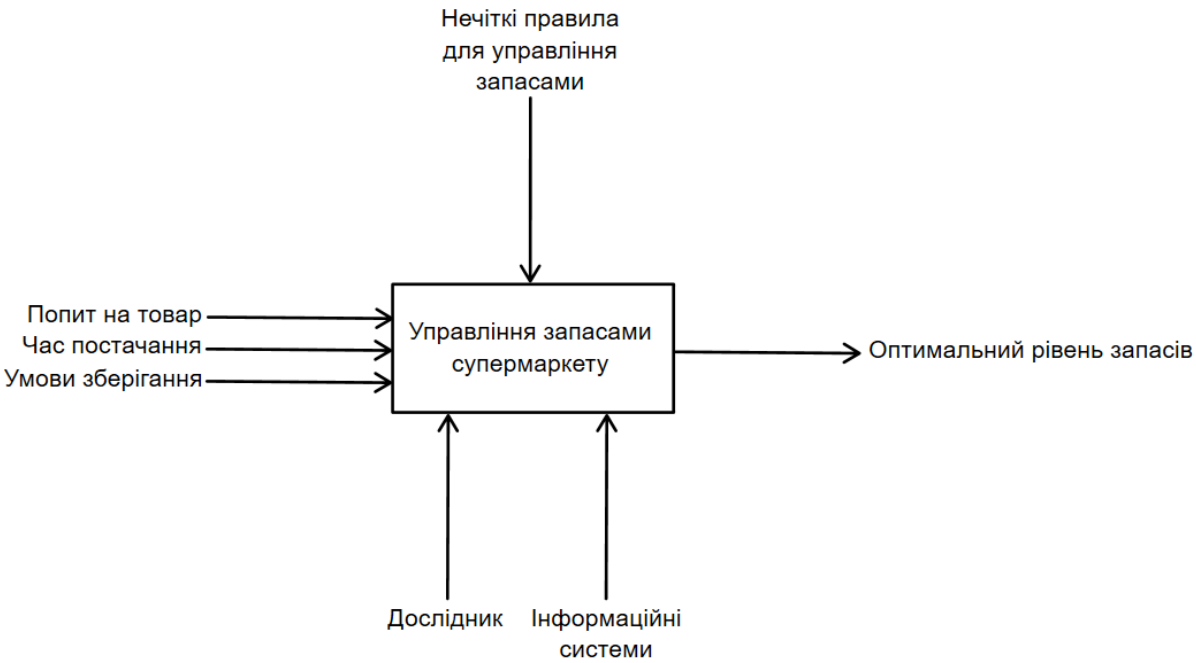

Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма (рівень А-0)

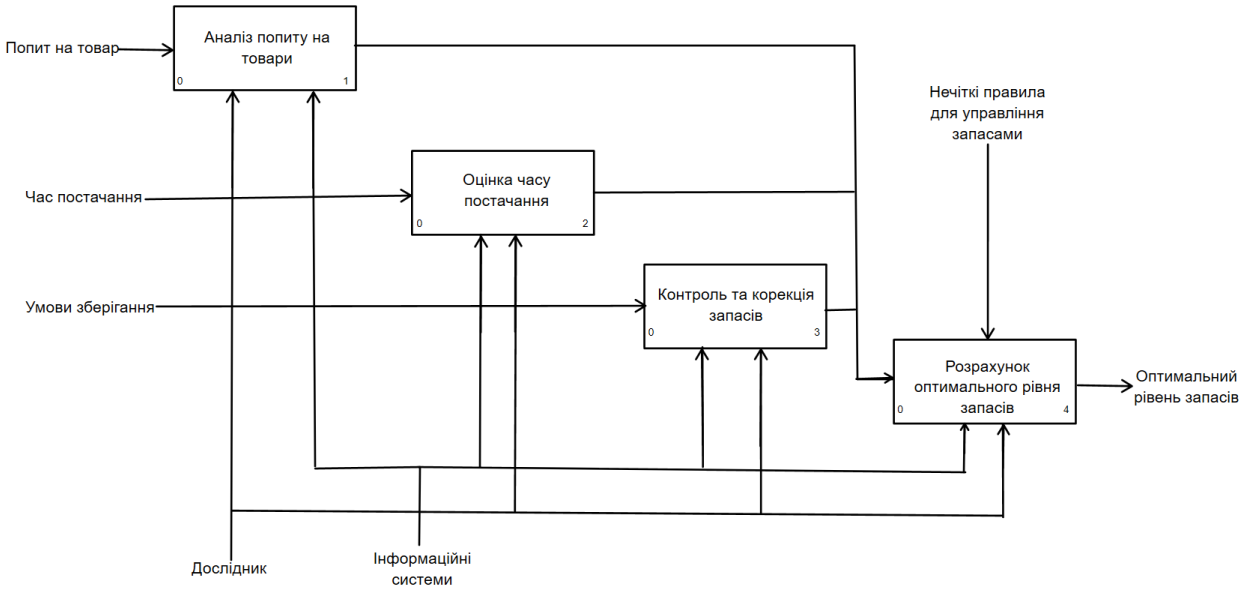

Рисунок 1.4 – Декомпозиція роботи «Управління запасів супермаркету в умовах невизначеності»: (рівень А0)

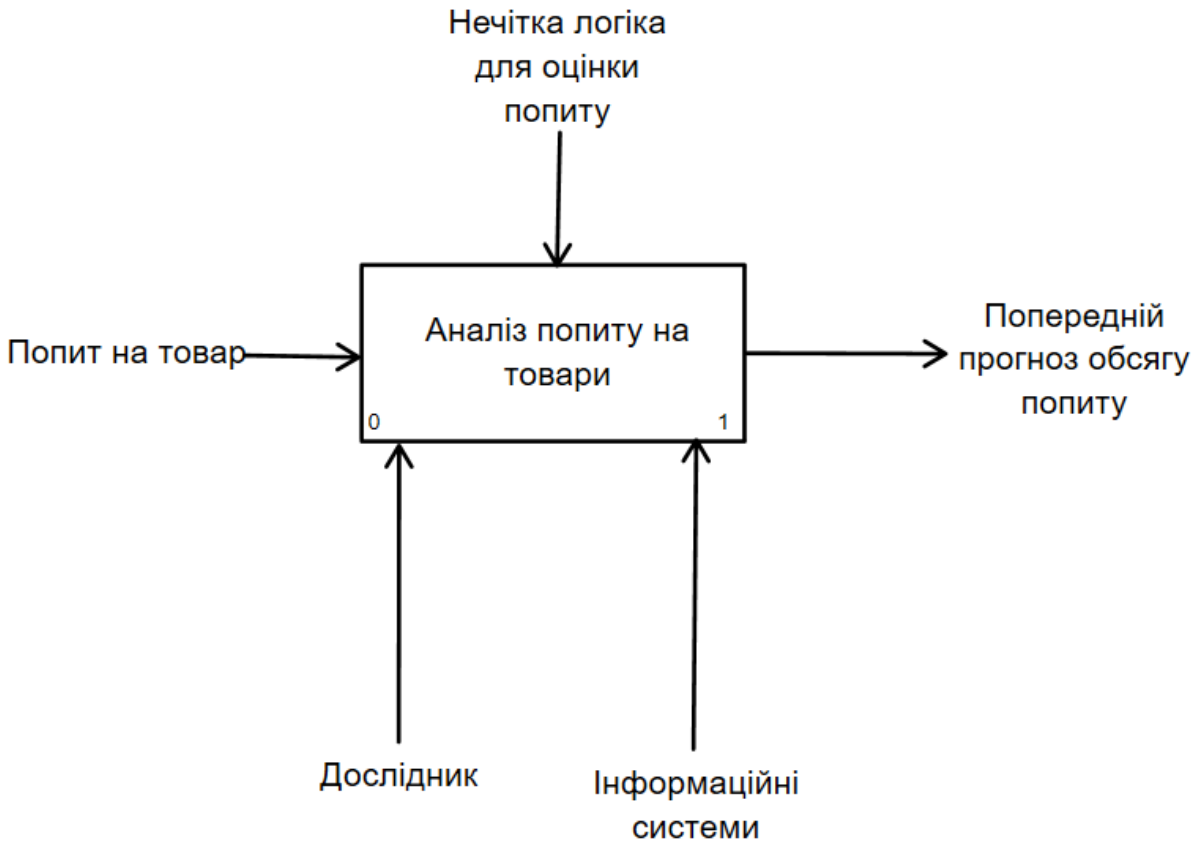

Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Попередній прогноз обсягу попиту»: (рівень А1)

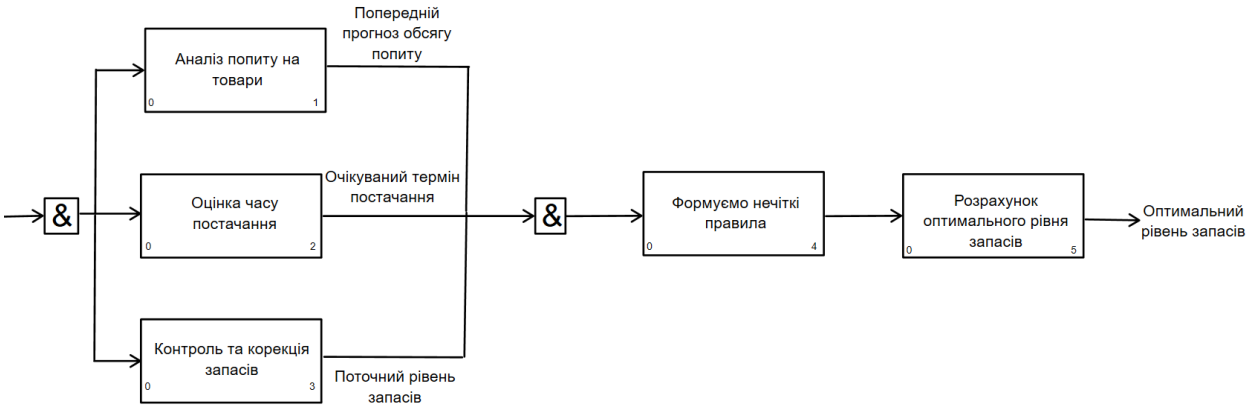

Рисунок 1.6 – Опис роботи «Дослідження моделі управління запасами в супермаркеті в умовах невизначеності»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

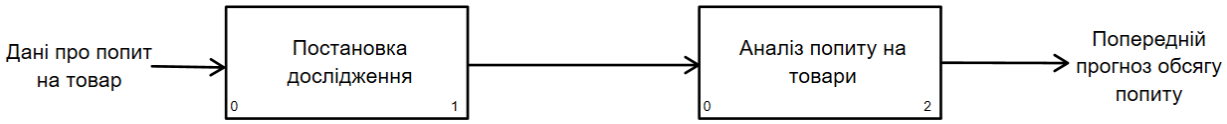

Рисунок 1.7 – Опис роботи «Попередній прогноз обсягу попиту»: (рівень A1) (в нотації IDEF3)

1.1.4 Інформаційна модель

Призначенням інформаційної моделі системи є відображення зв’язків між її елементами у виді структур даних, звертаючи увагу дослідника на взаємозв’язки та склад потоків даних.

Для обробки інформації та опису документообігу використовуються діаграми потоків даних (Data Flow Diagramming, DFD), які також є модельними системами та зображують систему, що досліджується у виді пов’язаних між собою робіт.

Вони використовуються додатково до моделі IDEF0 для гарного відображення поточних операцій.

На рис. 1.8 наведена DFD-діаграма і на рис. 1.9 – декомпозиція.

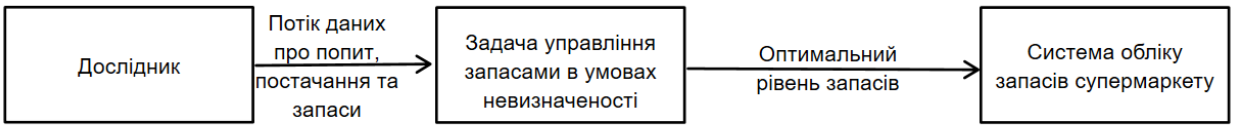

Рисунок 1.8 – DFD-Діаграма

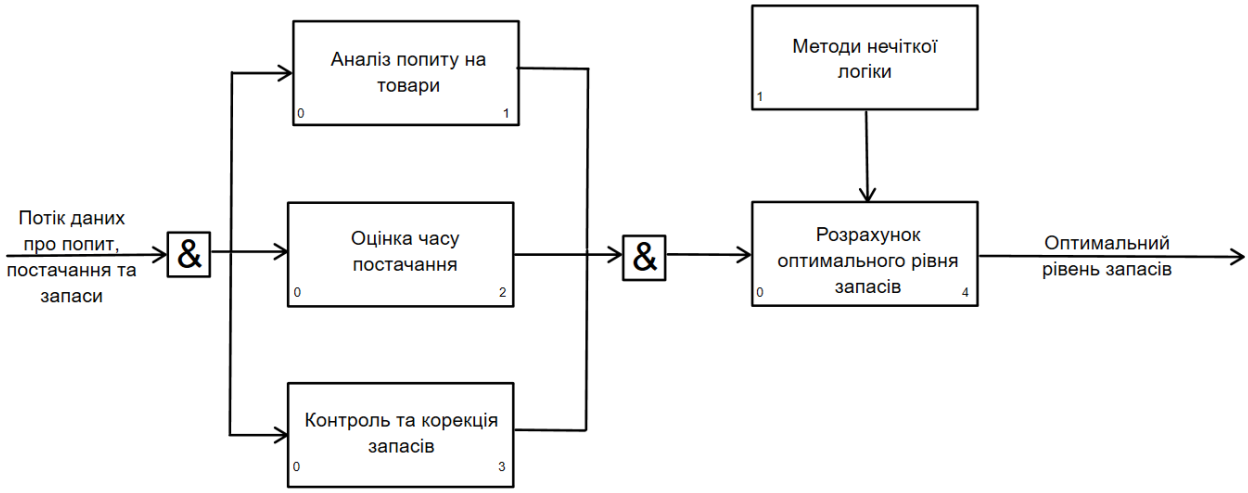

Рисунок 1.9 – DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задач управління запасами

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Математичне моделювання та оптимізація управління запасами здійснюється за кількома основними напрямками.

Перший напрямок – це математичне моделювання на основі класичних моделей управління запасами, таких як модель економічного розміру замовлення (EOQ). Цей підхід ефективно використовується для оптимізації витрат на зберігання запасів і замовлення продукції, а також для прогнозування обсягу замовлень та термінів поповнення запасів. Модель EOQ широко застосовується в практиці управління запасами, але має обмеження при значній нестабільності попиту і змінах умов постачання [3].

Другий напрямок включає методи Just-in-Time (JIT), які націлені на мінімізацію запасів і досягнення безперервного постачання ресурсів або продукції лише за потребою. Цей підхід ефективний для зниження витрат на зберігання, але вимагає високої стабільності постачання та точної координації. Методи JIT менш стійкі до коливань попиту та можуть призвести до дефіциту ресурсів при значній нестабільності ринкових умов [4].

Третій напрямок пов'язаний із застосуванням моделей управління постійним рівнем запасів (Continuous Review Policy), що дозволяють підтримувати запаси на певному заданому рівні. Цей підхід дозволяє враховувати сезонні коливання попиту і запобігає дефіциту продукції, але може вимагати значних ресурсів для постійного моніторингу запасів [5].

Нарешті, четвертий напрямок – це методи нечіткої логіки для управління запасами в умовах невизначеності. Використання нечітких моделей дозволяє враховувати коливання попиту та інші фактори, що важко прогнозувати класичними методами. Нечіткі моделі адаптуються до зміни умов і можуть бути ефективними у випадках нестабільного попиту, але вимагають складних обчислень і спеціалізованого програмного забезпечення для впровадження [6].

1.2.1 Оцінювання вектору пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для вибору методу управління запасами, який найкраще підходить для вирішення задачі, використаємо метод аналізу ієрархій (MAI) з такими критеріями:

– критерій 1: стійкість до змін попиту;

– критерій 2: ефективність витрат;

– критерій 3: гнучкість у відповідь на невизначеність;

– критерій 4: швидкість прийняття рішень.

Можливі альтернативи:

– альтернатива 1: Модель EOQ;

– альтернатива 2: Метод Just-in-Time (JIT);

– альтернатива 3: Модель постійного рівня запасу;

– альтернатива 4: Методи нечіткої логіки.

Для проведення парних порівнянь критеріїв та альтернатив будемо використовувати шкалу порівнянь Т. Сааті, що дозволяє отримати кількісні оцінки без прив'язки до фізичних одиниць.

Ця шкала є безрозмірною, що полегшує приведення параметрів до єдиних одиниць виміру, і базується на принципі числових оцінок інтенсивності переваги (від 1 до 9), де 1 означає рівнозначну важливість, а 9 – надзвичайну перевагу одного елемента над іншим. В процесі порівнянь ми визначимо, який з елементів є найбільш важливим та пріоритетним для досягнення ефективного управління запасами.

Використовуючи метод Сааті при проведенні парних порівнянь ми визначаємо який з елементів є найважливішим і найвірогіднішим. Процес побудови ієрархії включає кілька ключових етапів. Спочатку необхідно створити ієрархічну структуру проблеми, яка відображає критерії та альтернативи, як це продемонстровано на рис. 1.10.

Далі формується матриця попарних порівнянь для кожного рівня ієрархії, де визначається важливість кожного критерію, а також здійснюється порівняння альтернатив стосовно кожного критерію. Після цього обчислюються вектори локальних пріоритетів для всіх критеріїв і альтернатив, що дозволяє оцінити їх відносну важливість.

Обчислюється індекс узгодженності, як сума елементів матриці за стовпцями. На завершальному етапі оцінювання локальні пріоритети перетворюються на глобальні, що відображають вагу кожної альтернативи з урахуванням значущості критеріїв. Це дозволяє об'єктивно оцінити та ранжувати альтернативи. Для перевірки надійності результатів розраховують індекс узгодженості (CI). Якщо відношення узгодженості (CR) менше 0.1, результати можна вважати достовірними для прийняття рішення.

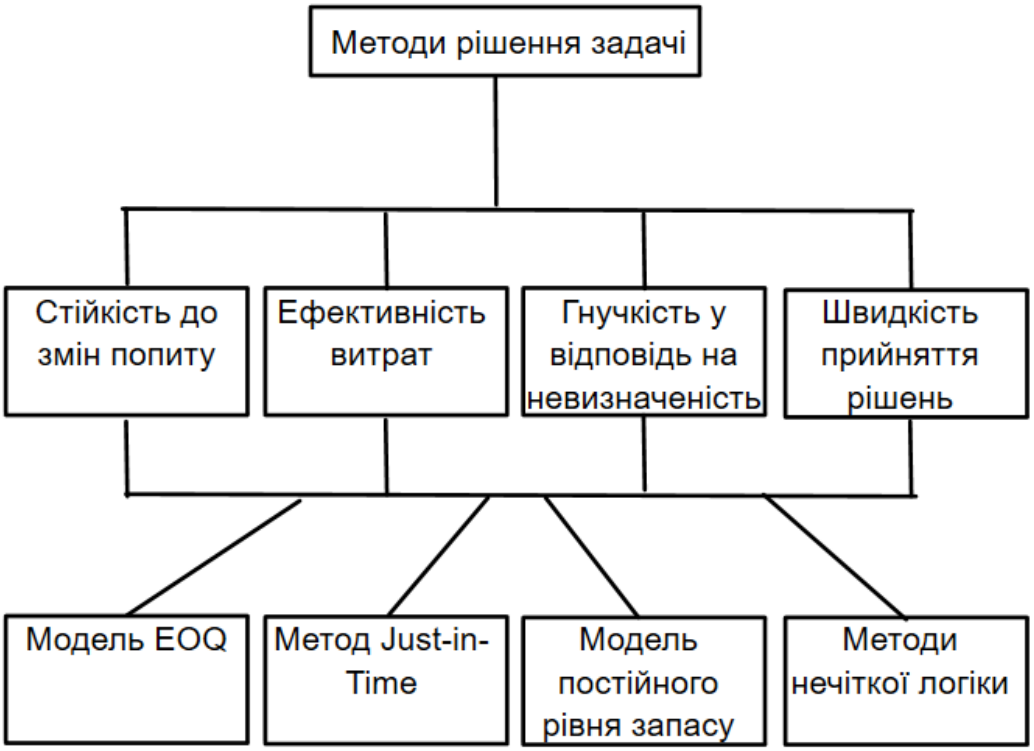

Рисунок 1.10 – Ієрархічна структура проблеми вибору

Таблиця 1.1 – Розрахунок вектору локальних пріоритетів критеріїв

	К1	К2	К3	К4	Середнє геометричне за строками	Вектор пріоритетів
К1	$\frac{1}{4}$	1	8	9	$x_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9} = 3,71$	$p_1^k = \frac{x_1}{\Sigma} = 0,63$
К2	1	4	7	8	$x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7} = 1,85$	$p_2^k = \frac{x_2}{\Sigma} = 0,31$
К3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{2}$	$x_3 = \sqrt[4]{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 3} = 0,54$	$p_3^k = \frac{x_3}{\Sigma} = 0,09$
К4	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	1	2	$x_4 = \sqrt[4]{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1} = 0,27$	$p_4^k = \frac{x_4}{\Sigma} = 0,05$
					$\sum = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,884$	

Тоді:

$$\lambda_{\max}^{k} = 4{,}17$$

та індекс узгодженості:

$$CI^{K} = 0{,}057,$$

$$CR^{K} = \frac{CI^{K}}{RI^{K}} = 0{,}064.$$

Оскільки значення відношення узгодженності менше 0.1, матриця попарних порівнянь є достатньо узгодженою, і можна вважати, що обрані ваги критеріїв є надійними.

Обчислимо вектор локальних пріоритетів критеріїв відносно проблеми

$$\vec{p}^{\,k} = (0{,}63; 0{,}31; 0{,}09; 0{,}05)^{T}.$$

Так само, як і для матриці попарних порівнянь критеріїв розрахуємо вектори локальних порівнянь для критеріїв:

Таблиця 1.2 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К1

К1	А1	А2	А3	А4
А1	1	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
А2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
А3	3	4	1	$\frac{1}{2}$
А4	5	6	2	1

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К2

К1	А1	А2	А3	А4
А1	1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
А2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
А3	2	6	1	$\frac{1}{3}$
А4	4	5	3	1

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К3

К1	А1	А2	А3	А4
А1	1	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{7}$
А2	3	1	5	$\frac{1}{4}$
А3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{6}$
А4	7	4	6	1

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К4

К1	А1	А2	А3	А4
1	2	3	4	5
А1	1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Кінець таблиці 1.5

1	2	3	4	5
A2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
A3	4	5	1	$\frac{1}{2}$
A4	6	3	2	1

Для кожної матриці розраховуємо вектори локальних пріоритетів:

$$\vec{p}_1^{\,A} = \begin{pmatrix} 0,113 \\ 0,0713 \\ 0,2935 \\ 0,5219 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2^{\,A} = \begin{pmatrix} 0,1476 \\ 0,0612 \\ 0,2665 \\ 0,5246 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3^{\,A} = \begin{pmatrix} 0,0941 \\ 0,2357 \\ 0,0608 \\ 0,6094 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_4^{\,A} = \begin{pmatrix} 0,1034 \\ 0,0822 \\ 0,3424 \\ 0,4719 \end{pmatrix}.$$

Так як, матриці попарних порівнянь четвертого порядку, то $RI^A = 0,9$. Обчислимо індекси та відношення узгодженостей для матриць парних порівнянь альтернатив за кожним із критеріїв.

$$CI_{K1}^A = 0,011,\ CI_{K2}^A = 0,055,\ CI_{K3}^A = 0,053,\ CI_{K4}^A = 0,079, \qquad (1.1)$$

$$CR_{K1}^A = 0,013,\ CR_{K2}^A = 0,061,\ CR_{K3}^A = 0,059,\ CR_{K4}^A = 0,088. \qquad (1.2)$$

З формул 1.1 і 1.2 видно, що індекс узгодженності менше 0.1, то результат узгодженний з думками експерта.

Наведемо вектор глобальних пріоритетів альтернатив:

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,113 & 0,1476 & 0,0941 & 0,1034 \\ 0,0713 & 0,0612 & 0,2357 & 0,0822 \\ 0,2935 & 0,2665 & 0,0608 & 0,3424 \\ 0,5219 & 0,5246 & 0,6094 & 0,4719 \end{pmatrix},$$

$$\vec{p} = P^A \vec{p}^K .$$

Вектор глобальних пріоритетів має вигляд:

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,113 & 0,1476 & 0,0941 & 0,1034 \\ 0,0713 & 0,0612 & 0,2357 & 0,0822 \\ 0,2935 & 0,2665 & 0,0608 & 0,3424 \\ 0,5219 & 0,5246 & 0,6094 & 0,4719 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,63 \\ 0,31 \\ 0,09 \\ 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1306 \\ 0,0892 \\ 0,2901 \\ 0,5699 \end{pmatrix}.$$

Розрахунки індексів та відношень узгодженості для всієї ієрархій наведено у наступних формулах:

$$CI = CI^k = (\vec{p}^k, \overrightarrow{CI}^A) = 0,0437,$$

$$RI = RI^K + RI^A = 0,90+,90 = 1,80,$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0,0243.$$

Цей рівень узгодженості є прийнятним і свідчить про достовірність результатів. Оскільки найбільше значення глобальних пріоритетів відповідає четвертій альтернативі, то для розв’язання поставленої задачі обираємо методи нечіткої логіки.

Це рішення є обґрунтованим та оптимальним з точки зору комплексної відповідності обраним критеріям (табл. 1.6).

Таблиця 1.6 – Кінцеві дані

Критерій/ Альтернатива	К1	К2	К3	К4	Глобальні пріоритети
А1	0,113	0,1476	0,0941	0,1034	0,1306
А2	0,0713	0,0612	0,2357	0,0822	0,0892
А3	0,2935	0,2665	0,0608	0,3424	0,2901
А4	0,5246	0,5246	0,6094	0,4719	0,5699

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1. Змістовна постановка задачі

Розглядається задача управління запасами в умовах невизначеного попиту. У реальних умовах попит часто є нечітким і змінюється в межах заданих мінімальних і максимальних значень через такі фактори, як сезонність, економічна ситуація та зміни в поведінці споживачів. Управління запасами передбачає мінімізацію витрат, пов'язаних із поставками, зберіганням та можливим дефіцитом, із забезпеченням надійного задоволення попиту.

Метою задачі є вибір оптимального обсягу поставок, який відповідає заданим критеріям: мінімізація витрат, максимальна надійність постачання або компроміс між ними. Попит представлений як нечітка множина з функцією приналежності, що дозволяє оцінювати ймовірність різних сценаріїв попиту. Витрати обчислюються залежно від обсягу постачань, дефіциту та тривалості зберігання товарів.

Для розв'язання задачі застосовується ідея перетину нечітких множин: оптимальне рішення визначається як компроміс між частинними критеріями ефективності, кожен із яких враховує певний аспект оптимізації. Це дозволяє

забезпечити баланс між економічністю та надійністю в умовах невизначеності.

Вхідні дані:

– мінімальний попит (q_{Min});

– максимальний попит (q_{Max});

– крок (h) зміни ступеня приналежності (μ);

– штрафи за дефіцит;

– витрати на зберігання.

Вихідні дані:

– повна таблиця значень: μ, попит для кожного періоду, сумарні витрати, функція приналежності витрат (μ_u).

1.3.2 Формальна постановка задачі

Постачання ресурсами здійснюється протягом чотирьох циклів, тобто $n=4,\ i=1,2,3,4$. Тривалість кожного часового інтервалу $[t_i, t_{i+1})$ (циклу) однакова і становить один місяць (30 діб). Попит на кожному інтервалі постачання постійний з нечіткою інтенсивністю, отже, його сумарна величина на інтервалі постачання нечітка, вона описується нечіткою величиною $\langle q_{Min}, q_{Max} \rangle$. Значення чисел q_{Min} та q_{Max} вказані в таблиці 1.7.

Таблиця 1.7 – Дані про нечіткі величини, що описують попит

	Номер періоду постачання i			
	1	2	3	4
q_{Min}	90	120	80	100
q_{Max}	130	150	110	140

Обсяги попиту, поставок, дефіциту вимірюються в тонах, витрати - у ти-

сячах гривень, час - у добі.

Витрати на поставку пропорційні її обсягу і визначаються за формулою:

$$K_i(x_i) = 5 \cdot x_i, \; i = 1,2,3,4.$$

Оскільки витрати на поставку становлять 5 тис. грн за 1 тонну.

Витрати на зберігання пропорційні обсягу запасу і часу зберігання і становлять 0,1 тис. грн. на добу. Склади можуть бути завантажені не на 100%, а лише частково, середня завантаженість складу становить 50% від його повної місткості. Тому $0,5$ – коефіцієнт ефективності складу.

Витрати на зберігання на одному інтервалі постачання визначаються за формулою:

$$S_i(x_i, d_i) = 0,5 \cdot x_i \cdot (30 - t_i^{деф}) \cdot 0,1, \; i = 1,2,3,4.$$

Тут $t_i^{деф}$ (діб) – тривалість наявності дефіциту протягом і-го циклу постачання, тоді $30 - t_i^{деф}$ (діб) – тривалість бездефіцитної роботи під час цього циклу.

Витрати на штраф за дефіцит пропорційні обсягу дефіциту і часу його наявності та становлять 0,5 тис. грн. на добу. Витрати на зберігання на $i-$ му інтервалі постачання визначаються за формулою:

$$P_i(x_i, d_i) = 0,5 \cdot t_i^{деф} \cdot 0,5$$

Визначити обсяги поставок, за яких надійність забезпечення потреб та економічної ефективності максимальна.

1.4 Постановка задач дослідження

Для досягнення поставленої мети кваліфікаційної роботи необхідно виконати такі завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задач управління запасами в умовах невизначеності;

– ознайомитися з існуючими дослідженнями та методами управління запасами в умовах невизначеності, розглянути їх основні характеристики, переваги та недоліки;

– розробити математичну модель управління запасами, яка враховує невизначений попит, витрати на зберігання, постачання та штрафи за дефіцит;

– провести обчислювальні експерименти з використанням розробленої моделі для оцінки її ефективності та відповідності поставленій меті;

– проаналізувати отримані результати, оцінити їх відповідність поставленим цілям і сформулювати рекомендації щодо практичного застосування моделі.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Огляд методів управління запасами

Для вирішення задач управління запасами існує широкий спектр методів, від класичних до сучасних інтелектуальних підходів, які можуть враховувати невизначеність даних та змінність ринку.

2.1.1 Класичні методи управління запасами

Модель EOQ (Economic Order Quantity).

Метод EOQ дозволяє обчислити оптимальний обсяг замовлення, який мінімізує загальні витрати на зберігання та замовлення товарів. Ця модель базується на припущенні про стабільний попит, відсутність дефіциту та сталий час виконання замовлень.

Формула EOQ виглядає так:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}},$$

де Q^* – оптимальний обсяг замовлення;

D – річний попит;

S – витрати на оформлення одного замовлення;

H – витрати на зберігання одиниці продукції [3].

Модель не враховує невизначеність попиту та часу постачання, що обмежує її застосування в реальних умовах [2].

Метод Just-in-Time (JIT).

JIT є стратегією мінімізації запасів, коли постачання товарів організовано так, щоб вони прибували безпосередньо перед їхнім використанням. Це змен-

шує витрати на зберігання та дозволяє підтримувати низький рівень запасів. Успішна реалізація JIT вимагає стабільного попиту та точного планування. Будь-яке порушення в постачанні або коливання попиту можуть призвести до збоїв [4].

Висока залежність від надійності постачальників та передбачуваності попиту обмежує застосування JIT за умов невизначеності.

Модель постійного рівня запасу (Continuous Review Policy).

Модель заснована на постійному моніторингу рівня запасів. Як тільки рівень запасу знижується до встановленого критичного порогу, ініціюється замовлення для його поповнення. Цей метод забезпечує постійний контроль запасів і може використовуватися для управління товарними залишками на складах із високою частотою замовлень [5].

Як і попередні моделі, не враховує невизначеності та коливань у попиті й постачанні.

2.1.2 Методи нечіткої логіки

Управління запасами в умовах невизначеності потребує підходів, які дозволяють працювати з неповною або нечіткою інформацією, зокрема щодо попиту. Використання нечіткої логіки дає змогу моделювати ситуації, де точні дані недоступні, шляхом роботи з діапазонами можливих значень і функціями приналежності. У контексті задачі управління запасами попит може бути заданий як нечітке число з межами мінімального та максимального значення, що дає можливість гнучко оцінювати різні сценарії розвитку подій.

Нечіткі моделі дозволяють описати варіанти попиту в інтуїтивно зрозумілій формі за допомогою таких змінних, як «низький», «середній» і «високий». Це зменшує складність прийняття рішень і дозволяє ефективно адаптуватися до змін у середовищі.

Прикладом правила, яке можна використовувати у нечіткій моделі, є таке:

якщо попит «високий» і рівень запасів «низький», то обсяг замовлення повинен бути «великим»; якщо попит «середній» і рівень запасів «середній», то обсяг замовлення повинен бути «середнім».

Функції приналежності для змінної «рівень запасів» можуть мати вигляд:

$$\mu_{low}(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b, \\ \dfrac{x-c}{b-c}, b \le x \le c, \\ 0, x > c. \end{cases},$$

де a, b, і c – параметри, які визначають нижню межу, пікове (середнє) значення і верхню межу нечіткого значення відповідно [6].

Алгоритм Мамдані.

Алгоритм Мамдані найбільш поширений метод нечіткого виведення для управління запасами, розроблений Есінгом Мамдані у 1974 році для управління паровими двигунами та котельними установками. Він дозволяє створити базу нечітких правил, що описують залежності між різними змінними, такими як попит, час постачання та рівень запасів, через лінгвістичні правила типу «ЯКЩО–ТО» [6]. Основні етапи алгоритму Мамдані.

Фазифікація вхідних змінних. На цьому етапі конкретні числові зн–ачення вхідних змінних перетворюються у відповідні нечіткі множини. Наприклад, попит на товар можна описати за допомогою лінгвістичних змінних, як-от «низький», «середній» і «високий», де кожне значення має свою функцію належності. Цей крок забезпечує можливість обробки нечітких даних.

Формування бази правил. Для моделі Мамдані розробляється набір правил типу «ЯКЩО–ТО», де кожне правило відображає зв’язок між вхідними та вихідними параметрами. Наприклад:

– якщо попит «високий» і час постачання «короткий», то рівень запасів має бути «середнім»;

– якщо попит «низький» і час постачання «довгий», то рівень запасів має бути «низьким».

Ці правила ґрунтуються на знаннях експертів та досвіді, що дозволяє розширювати їх у разі змін.

Агрегація умов. Кожне правило агрегується з урахуванням ступенів належності вхідних змінних до відповідних нечітких множин. Для реалізації цього використовуються логічні операції, наприклад, «min» для кон'юнкції.

Активізація правил. Після того як знайдено значення належності для всіх умов правил, визначаються значення функцій належності для висновків правил. Наприклад, для кожного правила значення істинності умовного висловлювання активізується, що призводить до обчислення ступеня належності вихідних змінних.

Акумуляція висновків. Всі вихідні значення об'єднуються для кожного правила, щоб отримати загальний висновок. У цьому процесі використовують максимізацію значень належності висновків.

Дефазифікація. Заключним етапом є перетворення нечітких висновків у чітке значення. У алгоритмі Мамдані часто застосовується метод центру ваги (центроїда), щоб отримати остаточне значення. Наприклад, розраховане значення для рівня запасів буде числовим, що дозволяє реалізувати його в управлінській діяльності.

Алгоритм Мамдані добре підходить для моделювання складних взаємозв'язків між змінними, що робить його корисним для задач, де умови управління змінюються на основі досвіду і потребують інтуїтивного підходу. Крім того, він дозволяє описувати складні процеси у формі нечітких правил, що робить його інтуїтивно зрозумілим для експертів і фахівців з управління запасами.

Алгоритм Сугено.

Алгоритм Сугено також широко використовується для задач управління запасами, але має свої особливості. Цей метод є різновидом нечіткої системи виведення, запропонованої Мічіо Сугено в 1985 році як вдосконалення до кла-

сичної моделі Мамдані. Ця модель особливо добре підходить для задач, де бажано отримати чітке вихідне значення з високою точністю та де є потреба в адаптивності моделі. На відміну від алгоритму Мамдані, на виході алгоритм Сугено видає лінійне або константне значення, що дозволяє досягти більшої швидкості обчислень і ефективності. Це корисно для систем, де потрібна висока швидкість обробки даних, наприклад, у режимі реального часу [8].

Основні етапи алгоритму Сугено.

Фазифікація вхідних змінних. Як і в алгоритмі Мамдані, числові значення вхідних змінних перетворюються у нечіткі множини для подальшого опрацювання. Це дає можливість враховувати неточність у вхідних даних і дозволяє використовувати лінгвістичні змінні.

Формування бази правил. Правила в алгоритмі Сугено дещо відрізняються від алгориму Мамдані, оскільки висновки виводяться у вигляді лінійних або постійних функцій. Типове правило має вигляд:

Якщо попит «високий» і рівень запасів «низький» , то

$$z = ax + by,$$

де z – обсяг замовлення;

x – попит;

y – рівень запасів;

a, b – коефіцієнти, що відповідають за вагу кожної з вхідних змінних.

Цей підхід дозволяє враховувати кількісну залежність у вихідних даних, що корисно для задач, де потрібна точна числова оцінка.

Агрегація умов. На цьому етапі використовуються стандартні логічні операції для агрегації умов, щоб визначити ступінь виконання кожного правила.

Активізація та отримання числового висновку. Замість отримання нечітких вихідних значень, кожне правило надає конкретний числовий

результат для вихідної змінної. Це спрощує обробку висновків, але знижує гнучкість порівняно з алгоритмом Мамдані.

Акумуляція результатів та дефазифікація. Алгоритм Сугено вимагає менше обчислень при дефазифікації, оскільки висновки вже мають числовий вигляд. Це робить його придатним для використання у задачах, де потрібен швидкий і точний розрахунок.

Алгоритм Сугено вищий за ефективністю у застосуванні для динамічних систем, де потрібна точна числова оцінка. Це робить його підходящим для задач прогнозування в управлінні запасами, де треба адаптувати модель до швидких змін [9].

Метод оптимізації запасів в умовах нечіткого попиту.

Розглянемо детерміновану динамічну модель із дефіцитом[6]. Припускаємо, що весь інтервал постачання θ розбито на n рівних частин, довжина кожної з яких дорівнює $\frac{\theta}{n}$, позначати i - й інтервал $(i=1,2,...,n)$ будемо $[t_i, t_{i+1})$.

Інтервал $[t_i, t_{i+1}),\ i=1,2,...,n)$, утворює один цикл постачання, тобто до моменту часу t_i запаси ресурсів постачання закінчилися і накопичився дефіцит у розмірі d_i, в цей час здійснюється постачання об'ємом x_i. На інтервалі $[t_i, t_{i+1})$ до моменту, поки на складі системи постачання є запаси, здійснюється задоволення попиту, що надходить. Після того як запаси закінчилися, відбувається накопичення дефіциту і в момент t_{i+1} здійснюється чергове постачання об'ємом x_{i+1} тощо. Накопичений дефіцит (його об'єм дорівнює d_{i+1}) повністю задовольняється виплатою штрафу.

Нехай обсяг попиту на інтервалі $[t_i, t_{i+1})$ дорівнює q_i, тоді об'єм поставки x_i має дорівнювати $q_i - d_i$, тобто

$$x_i = q_i - d_i \text{ та } q_i = x_i + d_i.$$

Визначити варіант постачання, за якого сумарні витрати мінімальні.

Розглянемо деякий план постачання. Оскільки він має містити інформацію про попит на кожному інтервалі та про розмір постачання на кожному з них, то позначати його будемо

$$(x,q)=(x_1,x_2,...,x_n,q_1,q_2,...,q_n).$$

На інтервалі $[t_i,t_{i+1})$ при плані постачання (x,q) система постачання несе витрати $L_i(x_i,q_i)$, які складаються з витрат на постачання $K_i(x_i)$, витрат на зберігання $S_i(x_i,q_i)$ і витрат на оплату штрафів $P_i(x_i,q_i)$.

Таким чином,

$$L_i(x_i,q_i)=K_i(x_i)+S_i(x_i,q_i)+P_i(x_i,q_i).$$

Сумарні за всіма інтервалами витрати, пов'язані із зазначеним планом, позначимо $L(x,q)$:

$$L(x,q)=\sum_{i=1}^{n}L_i(x_i,q_i).$$

З урахуванням усього сказаного отримуємо таку математичну модель:

$$\begin{cases} L(x,q)\to\min, \\ L(x,q)=\sum\limits_{i=1}^{n}K_i(x_i)+S_i(x_i,q_i)+P_i(x_i,q_i), \\ q_i=f(t_i,t_{i+1}), \\ t_i=\dfrac{\theta}{n}\cdot(i-1), \\ n>0, \textit{ціле}, \\ q_i\ge x_i\ge 0, i=1,2,...,n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Тут функція $f(t_i,t_{i+1})$ і функції $K_i(x_i)$, $S_i(x_i,q_i)$, $P_i(x_i,q_i)$ задані при $i=1,2,...,n$.

Нехай попит визначений нечітко, тобто обсяг попиту q_i на інтервалі $[t_i,t_{i+1})$ є нечітке число з функцією приналежності $\mu_i(u)$ (рис 2.1):

$$\mu_i(u)=\begin{cases} f_i(u), \ \textit{якщо } a_i \le u \le b_i, \\ 0, \ \textit{в іншому випадку}. \end{cases}$$

при цьому за будь-яких допустимих i функції $f_i(u)$ зростаючі.

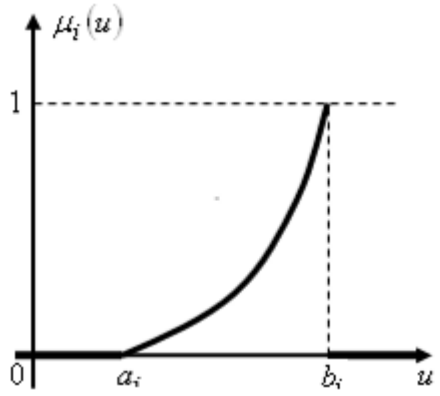

Рисунок 2.1 – Графік функції приналежності попиту на i - му інтервалі

Апроксимуючи функцію $f_i(u)$ лінійною функцією, будемо вважати, що обсяг попиту q_i на інтервалі $[t_i,t_{i+1})$ є нечітка величина $\langle a_i,b_i \rangle$ з функцією приналежності

$$\mu_i(u)=\begin{cases} \dfrac{u-a_i}{b_i-a_i}, \ \textit{якщо } a_i \le u \le b_i, \\ 0, \ \textit{в іншому випадку}. \end{cases}$$

заданої на універсальній множині $[0,+\infty)$ (рис. 2.2).

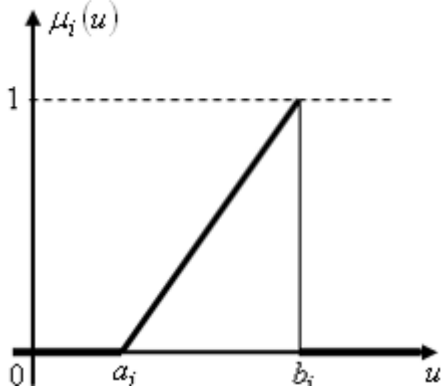

Рисунок 2.2 – Графік функції приналежності трикутного числа $\langle a_i, b_i \rangle$

Для подальшого викладу нам знадобляться такі позначення:

$x_i(q_i)$ – обсяг поставки, за якого витрати $L_i(x_i, q_i)$ мінімальні;

$$L_i(x_i(q_i), q_i) = \min\{K_i(x_i) + S_i(x_i, q_i) + P_i(x_i, q_i)\};$$

$L_i^{\min}$ – мінімальні витрати на i - му інтервалі в разі, коли попит на ньому мінімальний, тобто дорівнють a_i;

$L^{\min}$ – мінімальні витрати з постачання за мінімального попиту на кожному інтервалі:

$$L^{\min} = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i(a_i), a_i);$$

$L_i^{\max}$ – максимальні витрати на i - му інтервалі в разі, коли попит на ньому максимальний, тобто дорівнють b_i;

$L^{\max}$ – максимальні витрати з постачання за максимального попиту на кожному інтервалі:

$$L^{\max} = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i(b_i), b_i);$$

Степінь упевненості в тому, що запропонований варіант (x,q) організації постачання ефективний, характеризуватимемо відповідним значенням функції приналежності нечіткої величини $\widehat{C}_ц$ – «витрати майже мінімальні», що описує нашу мету.

Чим більша різниця $\sum_{i=1}^{n} L_i(x_i,q_i) - L^{\min}$ між витратами, пов'язаними з варіантом (x,q) і мінімальними витратами $L^{\min}$, тим менше ми впевнені в тому, що план (x,q) економічно ефективний.

Будемо виходити з того, що $\widehat{C}_ц$ є нечітка величина $\left\langle L^{\min}; L^{\max} \right\rangle$ з функцією приналежності $\mu_ц(u)$ (рис. 2.3), заданої на множині $[0,+\infty)$. Для плану (x,q) значення u визначається формулою $u = L(x,q)$, тоді

$$\mu_ц(u) = \begin{cases} \dfrac{L^{\max} - u}{L^{\max} - L^{\min}}, & \text{якщо } u \in [L^{\max}; L^{\min}], \\ 1, & \text{якщо } u \le L^{\min}, \\ 0, & \text{якщо } u \ge L^{\max}. \end{cases}$$

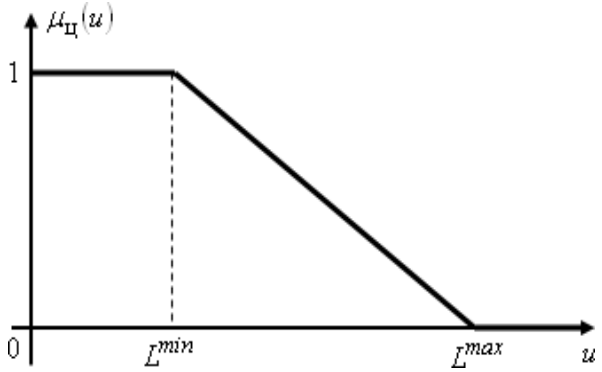

Рисунок 2.3 – Графік функції приналежності показника ефективності

Нехай $q_i \in [a_i, b_i]$, тоді наша впевненість у тому, що на i - му інтервалі постачання сумарний попит дорівнюватиме q_i, дорівнює $\mu_i(q_i)$. Таким чином, наша впевненість у тому, що сумарний попит за всіма інтервалами дорівнюва-

тиме вектору $q=(q_1,q_2,...,q_n)$, дорівнює

$$\mu(q)=\min_{1\le i\le n}\mu_i(q_i).$$

Це випливає з визначення кон'юнкції, оскільки висловлювання «попит за інтервалами дорівнює $q_1,q_2,...,q_n$» еквівалентно наступній кон'юнкції висловлювань: «попит на першому інтервалі дорівнює q_1» ТА «попит на другому інтервалі дорівнює q_2» ТА … ТА «попит на n - му інтервалі дорівнює q_n».

Рішенням задачі (2.1) за нечіткого попиту вважаємо план постачання, за якого ступінь упевненості в тому, що він ефективний за витратами та рівнем забезпечення попиту (значення функції приналежності плану нечіткій множині «розв'язання задачі»), максимальний.

Функцію приналежності нечіткої множини «розв'язання задачі» будемо позначати як

$$\mu_{розв}(x,q).$$

Із властивостей операцій над нечіткими множинами випливає, що

$$\mu_{розв}(x,q)=\min\left\{\mu(q),\mu_{ц}\left(\sum_{i=1}^{n}L_i(x_i,q_i)\right)\right\}.$$

Як розв'язання розглянутого завдання пропонується використовувати такий план постачання (x,q), за якого функція $\mu_{розв}(x,q)$ приймає максимальне значення, тобто який є розв'язком задачі:

$$\begin{cases} \mu_{розв}(x,q) \to \max, \\ L(x,q) = \sum_{i=1}^{n} K_i(x_i) + S_i(x_i,q_i) + P_i(x_i,q_i), \\ q_i = f(t_i, t_{i+1}), \\ t_i = \dfrac{\theta}{n} \cdot (i-1), \\ n > 0, цiле, \\ q_i \ge x_i \ge 0, i = 1,2,...,n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Алгоритм розв'язання задачі.

Розв'язується послідовність задач з обсягами попиту, значення функцій приналежності яких змінюються з фіксованим кроком h. Для визначення величини кроку, задавши допустиму величину похибки ε, знаходимо число кроків M, вважаючи M рівним цілій частині числа $\frac{1}{\varepsilon}+1$. Величина кроку h дорівнює $\frac{1}{M}$.

Під час розв'язання k - ї $(k = 1,2,...,M)$ задачі із зазначеної послідовності задач значення функцій приналежності попиту на кожному часовому інтервалі $[t_i, t_{i+1})$ вважаємо рівними kh. Знаходимо такі значення попиту на кожному часовому інтервалі, для яких значення функцій приналежності попиту дорівнюють kh, тобто знаходимо такі q_i, $i = 1,2,...,n$, що

$$\mu(q_i) = kh, \ i = 1,2,...,n.$$

Розв'язуємо з цими значеннями попиту задачу (2.1), знаходимо сумарні витрати з постачання, пов'язані з цим варіантом значень попиту, і визначаємо рівень нашої задоволеності (значення функції $\mu_ц$). Визначаємо значення цільової функції $\mu_{розв}$ (мінімум з усіх надійностей) задачі (2.2). З отриманих $M+1$ значень обираємо найкраще (максимальне). Обсяги попиту і дефіциту, за яких

отримано це максимальне значення, і є оптимальним планом розглянутої задачі – задачі (2.1) з нечітким попитом.

2.2 Обґрунтування вибору методу та його переваги

Для задачі управління запасами в умовах невизначеного попиту найдоцільніше використовувати метод оптимізації запасів в умовах нечіткого попиту. Цей підхід перевершує класичні методи, такі як EOQ, JIT, або моделі постійного рівня запасу, оскільки враховує невизначеність попиту, варіативність у строках постачання і можливість адаптації до змінних умов.

Модель EOQ базується на припущенні про стабільний попит і час постачання, що обмежує її застосування в реальних умовах. Натомість, метод оптимізації запасів дозволяє працювати з нечіткими даними, які відображають невизначеність і змінність попиту. Метод Just-in-Time ефективний для зменшення витрат на зберігання, проте залежність від точного прогнозування попиту робить його уразливим до дефіциту в умовах невизначеності. Модель постійного рівня запасу орієнтована на підтримку заданого порогу, але не враховує варіативність попиту.

На відміну від алгоритмів Мамдані та Сугено, які працюють із лінгвістичними змінними, метод оптимізації запасів надає чіткі кількісні результати. Це особливо важливо для задач, де критичною є мінімізація витрат на зберігання, постачання та компенсацію дефіциту. Завдяки врахуванню функцій приналежності попиту, метод дозволяє гнучко адаптувати плани постачання до змін у середовищі та знаходити оптимальні варіанти з урахуванням різних сценаріїв.

Метод оптимізації запасів забезпечує всебічний підхід до управління, зосереджуючись на мінімізації витрат і максимізації впевненості в ефективності обраного плану. Це робить його універсальним і надійним інструментом для задач управління запасами в умовах невизначеного попиту.

Висновки за розділом 2

Розглянуто сучасні підходи до управління запасами, включаючи класичні методи (EOQ, JIT) та інтелектуальні методи. Обґрунтовано вибір методу оптимізації запасів на основі нечіткої логіки, який враховує невизначеність попиту та дозволяє досягти компромісу між витратами та надійністю. Визначено переваги цього методу перед традиційними підходами.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп’ютерної алгебри Mathematica

Система комп’ютерної алгебри Mathematica є потужним інструментом для розв’язання складних математичних задач, зокрема тих, що стосуються управління запасами із застосуванням апарату теорії нечітких множин. Завдяки широкому функціоналу та гнучкому синтаксису, Mathematica забезпечує ефективну роботу з нечіткими множинами, дозволяючи моделювати невизначеність, яка властива попиту на товари.

Головною перевагою Mathematica є її інтегроване середовище, яке дозволяє виконувати всі етапи роботи: від введення вихідних даних і моделювання до оцінки результатів. Завдяки функціям, таким як Module та Table, система забезпечує гнучкість у формуванні розрахункових алгоритмів, даючи змогу автоматизувати процеси обчислення та зберігати логіку задачі.

На відміну від інших інструментів, таких як Python чи MATLAB, Mathematica пропонує інтуїтивно зрозумілий синтаксис, орієнтований на математичні розрахунки. Це дозволяє швидко розробляти та змінювати моделі навіть користувачам із базовими знаннями програмування. У задачах управління запасами це особливо важливо, адже економічні коливання, сезонність або зміни попиту можуть вимагати оперативної адаптації моделі.

Mathematica також підтримує роботу з нечіткими множинами, що дозволяє моделювати невизначеність, пов’язану з попитом на товари чи умовами постачання. У задачі управління запасами система використовувалася для розрахунку оптимальних обсягів постачань, аналізу функцій приналежності та визначення компромісних рішень, які враховують як витрати, так і надійність.

Таким чином, Mathematica забезпечує точність, автоматизацію й гнучкість, що дозволяє вирішувати задачі оптимізації управління запасами навіть за складних умов невизначеності. Завдяки своїм можливостям, ця

система стала незамінним інструментом для аналізу й розробки математичних моделей із використанням теорії нечітких множин.

3.2 Алгоритм розв’язання задачі управління запасами

Управління запасами полягає у визначенні оптимального рівня замовлення та витрат на поповнення запасів, враховуючи невизначеність попиту та умов постачання. Для розв’язання задачі застосовується нечітка логіка, яка дозволяє врахувати невизначеність через функції приналежності.

Розподілимо алгоритм розв’язання задачі на декілька етапів.

Етап 1. Введення вхідних змінних.

Етап 2. Моделювання нечіткого попиту.

Етап 3. Розраховуємо сумарні витрати для заданого попиту.

Етап 4. Обчислюємо функції приналежності витрат: визначаємо мінімальні витрати з постачання за максимального та мінімального попиту; для кожного значення μ обчислюємо функцію приналежності витрат $\mu_{ц}$.

Етап 5. Створюємо таблицю значень.

Етап 6. Виведення результатів у вигляді таблиці та їх аналіз.

3.3 Опис програми

Мета: Програма створена для автоматизації задачі управління запасами із застосуванням нечіткої логіки. Вона дозволяє обчислити оптимальні витрати та рівні попиту за різними критеріями (мінімальні витрати, максимальна надійність, компроміс між витратами та надійністю).

Введення вхідних змінних.

На першому етапі визначаються ключові змінні, які є основою для подальших розрахунків:

– Мінімальний попит (q_{Min}): визначає найнижчий попит для кожного періоду.

– Максимальний попит (q_{Max}): визначає найвищий попит для кожного періоду.

– Крок (h): використовується для розбиття значень ступеня приналежності μ, що змінюється від 0 до 1.

Ці змінні вводяться як числові масиви для кожного періоду часу, що дозволяє враховувати змінність попиту в різні періоди.

Приклад вхідних результатів:

а) $q_{Min} = [90,120,80,100]$;

б) $q_{Min} = [130,150,110,140]$;

в) $h = 0,1$.

Моделювання нечіткого попиту.

На цьому етапі для кожного значення μ обчислюється нечіткий попит для кожного періоду за формулою:

$$demand = q_{Min} + \mu \cdot (q_{Max} - q_{Min})$$

Ця функція дозволяє плавно змінювати значення попиту від мінімального ($\mu = 0$) до максимального ($\mu = 1$). Змінюючи μ, можна моделювати різні сценарії попиту залежно від рівня невизначеності.

Розрахунок сумарних витрат для заданого попиту.

Для кожного значення нечіткого попиту обчислюються витрати за періодом за допомогою функції:

$$L_i(\overline{\overline{x_i}}, q_i) = 5 \cdot \overline{\overline{x_i}} + 1,5 \cdot \frac{(\overline{\overline{x_i}})^2}{q_i} + \frac{7,5}{q_i} \cdot (q_i - \overline{\overline{x_i}})^2,\ \overline{\overline{x_i}} = \frac{10}{18} \cdot q_i$$

Далі сума витрат для всіх періодів обчислюється як:

$$L(x,q)=\sum_{i=1}^{n} L_i(\overline{\overline{x_i}},q_i)$$

Обчислення функцій приналежності витрат.

Функції приналежності витрат ($\mu_ц$) дозволяють оцінити рівень оптимальності кожного сценарію. Вони розраховуються за формулою:

$$\mu_ц=\frac{L^{\max}-L}{L^{\max}-L^{\min}},$$

де $L^{\max}$ - мінімальні витрати з постачання за максимального попиту на кожному інтервалі; $L^{\min}$ - мінімальні витрати з постачання за мінімального попиту на кожному інтервалі.

Це значення дозволяє оцінити, наскільки витрати відхиляються від максимально допустимих і мінімально можливих. Чим більше $\mu_ц$, тим витрати ближчі до мінімальних.

Створення таблиці значень.

На цьому етапі для кожного значення μ створюється таблиця, яка містить такі дані:

– Значення μ від 0 до 1 із кроком h.

– Нечіткий попит для кожного періоду.

– Сумарні витрати.

– Значення функції приналежності витрат ($\mu_ц$).

Для розрахунків використовуються функції: Table, яка генерує набір значень для кожного значення μ, та Total, яка підсумовує витрати для кожного набору попиту.

Виведення результатів у вигляді таблиці та їх аналіз.

На фінальному етапі результати таблиці аналізуються для визначення оптимальних рішень:

– максимальна надійність ($\mu_ц = 0$): визначаються сценарії з найменшими витратами;

– мінімальні витрати ($L(x,q) = \min$): вибирається рядок із мінімальними сумарними витратами;

– компроміс між витратами та надійністю ($\mu = 0{,}5$): визначається середнє значення попиту та витрат.

Отримані результати представлені у вигляді таблиці на рис. 3.1.

Повна таблиця розрахунків:

μ	Попит (Період 1)	Попит (Період 2)	Попит (Період 3)	Попит (Період 4)	Сумарні витрати (LTotal)	Функція приналежності витрат (μ_c)
0.	90.	120.	80.	100.	1841.67	1.
0.1	94.	123.	83.	104.	1907.78	0.9
0.2	98.	126.	86.	108.	1973.89	0.8
0.3	102.	129.	89.	112.	2040.	0.7
0.4	106.	132.	92.	116.	2106.11	0.6
0.5	110.	135.	95.	120.	2172.22	0.5
0.6	114.	138.	98.	124.	2238.33	0.4
0.7	118.	141.	101.	128.	2304.44	0.3
0.8	122.	144.	104.	132.	2370.56	0.2
0.9	126.	147.	107.	136.	2436.67	0.1
1.	130.	150.	110.	140.	2502.78	0.

Оптимальні результати:

Критерій	μ	Попит (Період 1)	Попит (Період 2)	Попит (Період 3)	Попит (Період 4)	Сумарні витрати (LTotal)	Функція приналежності витрат (μ_c)
Максимальна надійність	1.	130.	150.	110.	140.	2502.78	0.
Мінімальні витрати	0.	90.	120.	80.	100.	1841.67	1.
Компроміс між витратами та надійністю	0.5	110.	135.	95.	120.	2172.22	0.5

Рисунок 3.1 – Повна таблиця розрахунків витрат і функцій приналежност та оптимальні результати за критеріями

Висновки за розділом 3

Описано алгоритм розв’язання задачі управління запасами з використанням нечіткої логіки. Реалізовано програму в середовищі Wolfram Mathematica, що забезпечує автоматизацію розрахунків і адаптацію до різних сценаріїв попиту. Продемонстровано зручність і ефективність розробленого програмного забезпечення.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент

Постачання ресурсами здійснюється протягом чотирьох циклів, тобто $n=4, i=1,2,3,4$. Тривалість кожного часового інтервалу $[t_i, t_{i+1})$ (циклу) однакова і становить один місяць (30 діб). Попит на кожному інтервалі постачання постійний з нечіткою інтенсивністю, отже, його сумарна величина на інтервалі постачання нечітка, вона описується нечіткою величиною $\langle a_i, b_i \rangle$. Значення чисел a_i та b_i вказані в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Дані про нечіткі величини, що описують попит

	Номер періоду постачання i			
	1	2	3	4
a_i	90	120	80	100
b_i	130	150	110	140

Обсяги попиту, поставок, дефіциту вимірюються в тонах, витрати - у тисячах гривень, час - у добі.

Витрати на поставку пропорційні її обсягу і визначаються за формулою:

$$K_i(x_i) = 5 \cdot x_i,\ i = 1,2,3,4.$$

Оскільки витрати на поставку 5 тис. грн за 1 тонну.

Витрати на зберігання пропорційні обсягу запасу і часу зберігання і становлять 0,1 тис. грн. на добу. Склади можуть бути завантажені не на 100%, а лише частково, середня завантаженість складу становить 50% від його повної

місткості. Тому $0,5$ – коефіцієнт ефективності складу. Витрати на зберігання на одному інтервалі постачання визначаються за формулою:

$$S_i(x_i, d_i) = 0,5 \cdot x_i \cdot (30 - t_i^{деф}) \cdot 0,1,\ i = 1,2,3,4\,.$$

Тут $t_i^{деф}$ (діб) – тривалість наявності дефіциту протягом і-го циклу постачання, тоді $30 - t_i^{деф}$ (діб) – тривалість бездефіцитної роботи під час цього циклу.

Витрати на штраф за дефіцит пропорційні обсягу дефіциту і часу його наявності та становлять 0,5 тис. грн. на добу. Витрати на зберігання на $i-$ му інтервалі постачання визначаються за формулою:

$$P_i(x_i, d_i) = 0,5 \cdot t_i^{деф} \cdot 0,5$$

Визначити обсяги поставок, за яких надійність забезпечення потреб та економічної ефективності максимальна. Розв'язок. Будемо змінювати значення функцій приналежності з кроком $0,1$, тобто $h = 0,1$. Результати обчислень зведено в таблицю 4.2.

Таблиця 4.2 – Проміжні результати

Значення функції $\mu_i(q_i)$	Обсяг попиту за періодами				Мінімум сумарних витрат	Значення функції $\mu_ц$
	q_1	q_2	q_3	q_4		
1	2	3	4	5	6	7
0	90	120	80	100	1841,67	1
0,1	94	123	83	104	1907,78	0,9
0,2	98	126	86	108	1973,89	0,8

Кінець таблиці 4.2

1	2	3	4	5	6	7
0,3	102	129	89	112	2040	0,7
0,4	106	132	92	116	2106,11	0,6
0,5	110	135	95	120	2172,22	0,5
0,6	114	138	98	124	2238,33	0,4
0,7	118	141	101	128	2304,44	0,3
0,8	122	144	104	132	2370,56	0,2
0,9	126	147	107	136	2436,67	0,1
1	130	150	110	140	2502,78	0

Оскільки попит постійний, то

$$t_i^{\partial e\phi} = \frac{q_i - x_i}{q_i} \cdot 30\,,\ i = 1,2,3,4\,.$$

Тоді сумарні витрати на i − му ($i = 1,2,3,4$) інтервалі дорівнюють

$$L_i(x_i, q_i) = 5 \cdot x_i + 0{,}5 \cdot x_i \cdot (30 - t_i^{\partial e\phi}) \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot (q_{_i} - x_i) \cdot t_i^{\partial e\phi} \cdot 0{,}5 =$$

$$= 6{,}5 \cdot x_i - 0{,}05 \cdot x_i \cdot t_i^{\partial e\phi} + 0{,}25 \cdot (q_i - x_i) \cdot t_i^{\partial e\phi} =$$

$$= 6{,}5 \cdot x_i - 0{,}05 \cdot x_i \cdot \frac{(q_i - x_i)}{q_i} \cdot 30 + 0{,}25 \cdot \frac{(q_i - x_i)^2}{q_i} \cdot 30\,.$$

Для відшукання мінімуму цієї функції за заданого попиту (за заданого q_i) обчислимо її похідну

$$(L_i(x_i, q_i))'_{x_i} = 5 + \frac{3}{q_i} \cdot x_i \cdot -\frac{15}{q_i} \cdot (q_{_i} - x_i).$$

Розв’язуючи рівняння

$$5 + \frac{3}{q_i} \cdot x_i \cdot -\frac{15}{q_i} \cdot (q_{_i} - x_i) = 0,$$

знаходимо точку екстремуму функції $L_i(x_i, q_i)$ (оптимальний об’єм поставки за розміром попиту, що дорівнює $q_{_i}$):

$$\overline{\overline{x_i}} = \frac{10}{18} \cdot q_{_i},$$

оптимальний розмір дефіциту тоді дорівнює

$$\overline{\overline{d_i}} = q_{_i} - \overline{\overline{x_i}} = \frac{8}{18} \cdot q_{_i}.$$

Мінімальні витрати при попиті $q_{_i}$ дорівнюють

$$L_i(\overline{\overline{x_i}}, q_i) = 5 \cdot \overline{\overline{x_i}} + 1{,}5 \cdot \frac{(\overline{\overline{x_i}})^2}{q_i} + \frac{7{,}5}{q_i} \cdot (q_{_i} - \overline{\overline{x_i}})^2.$$

Під час заповнення шостої графи таблиці 4.2 за попередньою формулою обчислено значення мінімальних витрат для кожного з чотирьох циклів постачання, їхню суму і вказано у відповідному рядку цієї графи.

Заповнення сьомої графи здійснено за формулою

$$\mu_{ц} = \frac{L^{\max} - u}{L^{\max} - L^{\min}},$$

де u – число з відповідного рядка п'ятої графи;

$L^{\max}$ – мінімальні витрати з постачання за максимального попиту на кожному інтервалі, це число зазначено в останньому рядку шостої графи;

$L^{\min}$ – мінімальні витрати з постачання за мінімального попиту на кожному інтервалі, число вказано у верхньому рядку шостої графи таблиці.

Оптимальні результати наведені у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3. – Оптимальні результати за різними критеріями

Критерій	Значення функції $\mu_i(q_i)$	Обсяг попиту за періодами				Мінімум сумарних витрат	Значення функції $\mu_{ц}$
		q_1	q_2	q_3	q_4		
Максимальна надійність	1	130	150	110	140	2502,78	0
Мінімальні витрати	0	90	120	80	100	1841,67	1
Компроміс між витратами та надійністю	0,5	110	135	95	120	2172,22	0,5

Висновки за результатами оптимізації:

Критерій «Максимальна надійність».

Для досягнення максимальної надійності всі запити задовольняються на максимальному рівні попиту в кожному періоді. Це забезпечує найвищу готовність до невизначеного попиту, однак сумарні витрати становлять 2502,78, що є найвищим значенням серед усіх критеріїв. Функція приналежності витрат ($\mu_{ц}$) у цьому випадку дорівнює 0, оскільки витрати максимально відхиляються

від мінімальних.

Критерій «Мінімальні витрати».

У цьому сценарії попит задовольняється на мінімальному рівні для кожного періоду. Це дозволяє досягти найнижчих сумарних витрат у розмірі 1841.67, а функція приналежності витрат (μ_u) дорівнює 1, що вказує на повну оптимізацію з точки зору мінімізації витрат. Проте цей підхід може не відповідати реальним потребам, якщо фактичний попит перевищує мінімальні значення.

Критерій «Компроміс між витратами та надійністю».

У разі компромісу між витратами та надійністю попит задовольняється на середньому рівні між мінімальним і максимальним у кожному періоді. Це забезпечує баланс між задоволенням невизначеного попиту та економічністю, із сумарними витратами 2172.22. Функція приналежності витрат (μ_u) дорівнює 0.5, що вказує на середній рівень відхилення від мінімальних витрат. Цей підхід є найбільш гнучким і збалансованим для умов невизначеності.

Вибір оптимального сценарію залежить від пріоритетів компанії. Якщо головною метою є забезпечення найвищої надійності постачання, то варто обирати максимальний рівень попиту, хоча це й призводить до найвищих витрат. Для економії ресурсів і мінімізації витрат доречно використовувати сценарій із мінімальним попитом. Якщо важливо враховувати як економічність, так і можливі коливання попиту, найкращим рішенням буде компромісний підхід.

Висновки за розділом 4

Проведено обчислювальний експеримент, який підтвердив ефективність розробленої моделі у зниженні витрат на управління запасами та підвищенні надійності постачання. Отримані результати демонструють оптимальні стратегії забезпечення потреб залежно від критеріїв витрат і надійності.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було вирішено задачу управління запасами в умовах невизначеного попиту. Розроблено математичну модель оптимізації запасів, яка враховує нечіткий характер попиту, мінімізує витрати та забезпечує надійність постачання. Для реалізації моделі використано сучасний математичний інструмент Wolfram Mathematica, що дозволило автоматизувати обчислення та провести багатокритеріальний аналіз.

У процесі роботи проведено огляд класичних і сучасних методів управління запасами, зокрема моделей EOQ, JIT, алгоритмів Мамдані та Сугено. Це дало змогу визначити переваги розробленого методу оптимізації запасів в умовах нечіткого попиту, який є більш гнучким і адаптивним до умов ринкової невизначеності. Модель реалізована з урахуванням трьох основних критеріїв: мінімізація витрат, максимізація надійності та компроміс між ними.

Результати дослідження підтвердили ефективність запропонованого підходу для задач управління запасами. Розроблена модель має практичне застосування в торговельних підприємствах, логістичних компаніях і дистрибуційних центрах. Вона сприяє оптимізації витрат на зберігання та постачання, забезпеченню стабільності постачань і підвищенню ефективності роботи складських систем.

Наукова значущість роботи полягає у використанні методів нечіткої логіки для моделювання та оптимізації процесів управління запасами. Соціально-економічна значущість полягає у можливості зменшення витрат на управління запасами та забезпечення стабільності постачань для кінцевих споживачів.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на врахування сезонних коливань попиту, динаміки цін і термінів постачання, а також на інтеграцію моделі з великими логістичними системами. Розроблене рішення може стати основою для створення програмного забезпечення, яке автоматизує процеси управління запасами та адаптує їх до специфічних потреб користувачів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Манжос Т. В., Мельник О. О., Луцишина Ж. В. Модель управління запасами з нечітким трикутним попитом *Бізнес Інформ*, 2018. № 11. С. 174–179.

2. Крикавський Є. В., Похильченко О. А., Фертч М. Логістика та управління ланцюгами поставок. Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2020. 848 с.

3. Bowersox D. J., Closs D. J., Cooper M. B. Supply chain logistics management. International Editon, 2002. 678 p.

4. Firmao. URL: https://firmao.com.ua/blog_net/ua/management/definition-and-advantages-of-the-just-in-time-method-in-logistics (дата звернення: 23.09.2024).

5. Chopra S., Meindl P. Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation. Pearson, 2010. 541 p.

6. Флегонтов А. В., Вилков В. Б., Черных А. К. Моделирование задач принятия решений при нечетких исходных данных. Москва : Лань, 2020. 329 с.

7. Mamdani E.H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. 1974. No. 121.12. P. 1585–1588.

8. Passino K., Yurkovich S. Fuzzy Control. California : Addison–Wesley, 1998. 522 p.

9. Sugeno M. Industrial applications of fuzzy control. Elsevier, 1985. 278 p.

10. Novak V., Perfilieva I., Mockor J. Mathematical principles of fuzzy logic: Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 15.

11. Єгорова О.В. Нечіткі моделі управління запасами: проблеми, аналіз, розвиток *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2012. Т. 4, № 3 (58). С. 24-31.